Лекція 14 ***Аналітичне конструювання систем оптимального управління***

Серед напрямків теорії оптимального управління своєю практичною результативністю, особливо для багатовимірних систем виділяється напрямок, який одержав назву аналітичне конструювання регуляторів (АКР). Термін аналітичне означає, що в даному методі заздалегідь відомо аналітичне (формульне) вираз для оптимального управління $u_{опт}(t)$ і потрібно визначити тільки параметри цього виразу. Вперше цей термін був введений академіком А.М. Лєтовим в 1960 р Розглянемо методи АКР для лінійних багатовимірних об'єктів.

1) Метод Лєтова - Калмана

Для лінійного стаціонарного детермінованого об'єкта, що описується матричним диференціальним рівнянням

$$\dot{x}=ax+bu, \quad где \quad x\in X, \quad u\in U, \quad x(t_0)=0 \qquad (14.1)$$

потрібно визначити управління u, що доставляє мінімум функціоналу:

$$I=x^{T}(t_k)\rho x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k}(x^{T}\beta x+u^{T}k^{-1}u)dt, \qquad (14.2)$$

де $x^{T}(t_{k})\,rx(t_{k})$ - термінальна складова, яка визначає вимоги до кінцевого стану об'єкта;

r, b, k - задані, позитивно певні, симетричні матриці коефіцієнтів функціонала.

Розглянемо позитивно певну квадратичну форму від фазових координат об'єкту:

$V = x^{T}\Gamma x$, де Г - деяка невідома матриця коефіцієнтів, і визначимо її повну похідну на рівняннях об'єкта (1).

$$\frac{dV}{dt}=\dot{x}^T\Gamma x+x^T\dot{\Gamma}x+x^T\Gamma\dot{x}=(x^Ta^T+u^Tb^T)\Gamma x+x^T\dot{\Gamma}x+x^T\Gamma(ax+bu).$$

Припустимо, що шукане оптимальне управління має вигляд:

$u = u_{опт} = -kb^T \Gamma x$ (14.3)

Підставами цей вислів в формулу для похідної.

$$\frac{dV}{dt}=x^Ta^T\Gamma x-x^T\Gamma bkb^T\Gamma x+x^T\dot{\Gamma}x+x^T\Gamma ax-u^T_{опт}k^{-1}u_{опт}=$$
$$=x^T(\dot{\Gamma}+\Gamma a+a^T\Gamma-\Gamma bkb^T\Gamma)x-u^T_{опт}k^{-1}u_{опт}.$$

Вимагатимемо, щоб:

$$\dot{\Gamma}+\Gamma a+a^T\Gamma-\Gamma bkb^T\Gamma=-\beta \quad (14.4)$$

тоді:

$$\frac{dV}{dt}=-x^T\beta x-u^T_{опт}k^{-1}u_{опт} \quad (14.5)$$

В силу позитивної визначеності матриць b і k отримали, що похідна є функція негативна. Тому, згідно з 2-го методу Ляпунова замкнута АС з керуванням $u_{опт}$ є асимптотично стійкою. Рівняння (14.4) називається матричним диференціальним рівнянням Риккати - його рішення (матриця Г) визначає невідомі параметри оптимального закону керування $u_{опт.}$Причому матриця Г виходить позитивно певної незалежно від того стійка або нестійка вихідна система.

Доведемо тепер, що управління $u_{опт}$ забезпечують не тільки стійкість замкнутої системи, а й доставляють мінімум заданому функціоналу якості (тобто є оптимальними). Для цього проинтегрируем вираз (14.5):

$$\int_{t_0}^{t_k}\frac{dV}{dt}dt=-\int_{t_0}^{t_k}x^T\beta x dt-\int_{t_0}^{t_k}u^T_{опт}k^{-1}u_{опт}dt$$

або

$$\int_{t_0}^{t_k} x^T\beta x dt=-x^T(t_k)\Gamma(t_k)x(t_k)+x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0)-\int_{t_0}^{t_k} u_{опт}^T k^{-1}u_{опт}dt$$

Підставами даний інтеграл в вираз для I

$$I=x^T(t_k)\rho x(t_k)-x^T(t_k)\Gamma(t_k)x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k} u^T k^{-1}u-\int_{t_0}^{t_k} u_{опт}^T k^{-1}u_{опт}dt$$

Так як I функція за визначенням неотрицательная, то її абсолютний мінімум (нуль) досягається при $u=u_{опт}$ і $\Gamma(t_k)=\rho$.І так, отриманий результат можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

<u>Теорема Лєтова-Калмана</u>: Для об'єкта $\dot{x}=ax+bu, x(t_0)=0, x\in X, u\in U$

оптимальними в сенсі мінімуму функціоналу

$$I=x^T(t_k)\rho x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k}(x^T\beta x+u^T k^{-1}u)dt$$

служать управління

$u_{опт}(t)=-kb^T\Gamma(t)x(t),$ де Г (t) - позитивно певна матриця-

рішення рівняння Риккати $\dot{\Gamma}+\Gamma a+a^T\Gamma-\Gamma bkb^T\Gamma=-\beta$ при граничному умови $\Gamma(t_k)=\rho$

Отже, процедура визначення оптимального управління зводиться до вирішення нелінійного диференціального рівняння Риккати в зворотному часу при граничному умови $\Gamma(t_k)=\rho$, В запам'ятовуванні отриманої програми Г (t) і її реалізації в реальному часі. Відзначимо, що дана обчислювальна процедура істотно спрощується при вирішенні <u>нетермінальних</u> завдань оптимального рівняння (коли не задані вимоги до кінцевого стану об'єкта і часу оптимізації),

тобто $I=\int_0^\infty(x^T\beta x+u^T k^{-1}u)dt,$ (t k = ¥ і x (t k) rx (t k) = 0 в силу стійкості). У цьому випадку оптимальний закон виходить стаціонарним (Г (t) = const) $u=-kb^T\Gamma x$, А матриця Г є рішенням вже алгебраїчного рішення Риккати ($\dot{\Gamma}\to 0$, Вимушене рішення)

$$\Gamma a+a^T\Gamma-\Gamma bkb^T\Gamma=-\beta$$.

2) **Метод А.А. Красовського**

Даний метод отримав назву АКР за критерієм узагальненої роботи був запропонований Олександром Аркадійовичем Красовським в 1968 році. Суть методу полягає у видозміні функціоналу якості

$$I=x^T(t_k)\rho x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k}(x^T\beta x+u^Tk^{-1}u+u^T_{\text{опт}}k^{-1}u_{\text{опт}})dt$$

шляхом додавання інтегральною складовою $\int_{t_0}^{t_k}u^T_{\text{опт}}k^{-1}u_{\text{опт}}dt$, Яка визначає обмеження на управління вже в оптимальній системі. Оскільки оптимальні управління на етапі завдання вимог до системи (функціоналу) ще не відомі, то функціонал виходить полуопределенним, хоча і має ясний фізичний зміст. Але такий штучний прийом дозволив істотно знизити обчислювальні труднощі розглянутого методу.

Виведемо основні розрахункові співвідношення для даного методу стосовно для того ж лінійного об'єкта:

$$\dot{x}=ax+bu,\quad x(t_0)=0, x\in X, u\in U. \qquad (14.6)$$

Знову введемо в розгляд позитивно певну квадратичну форму V = x ^{T} Гx і визначимо її повну похідну на рівнянні руху об'єкта (14.6).

$$\dot{V}=\dot{x}^T\Gamma x+x^T\dot{\Gamma}x+x^T\Gamma\dot{x}=(x^Ta^T+u^Tb^T)\Gamma x+x^T\dot{\Gamma}x+x^T\Gamma(ax+bu).$$

Приймемо, що оптимальне управління має вигляд:

$u_{опт}$ = -kb^T Γx,

тоді:

$$\dot{V}=x^T(a^T\Gamma+\dot{\Gamma}+\Gamma a)x-u^T k^{-1}u_{опт}-u_{опт}^T k^{-1}u.$$

Очевидно, що $\dot{V}$ знакоотріцательна тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови: u = $u_{опт}$ і $\dot{\Gamma}+\Gamma a+a^T\Gamma=-\beta,$ де b - позитивно певна матриця. Останнє рівняння нам уже відомо, як рівняння Ляпунова, що зустрічається в теорії стійкості. Так, згідно з другим методом Ляпунова його рішення (матриця Г) буде позитивно певної (відповідно до постановкою завдання оптимального управління) лише в тому випадку, коли вихідний об'єкт (його матриця а) стійка. Таким чином, оптимізація за критерієм узагальненої роботи на відміну від методу Лєтова-Калмана, передбачає апріорну стійкість вихідного об'єкта, що звужує сферу застосування методу.

Доведемо тепер, що управління $u_{опт}$ доставляють мінімум функціоналу I. Для цього використовуємо той же прийом, що і при доказі в методі Лєтова-Калмана.

$$\int_{t_0}^{t_k}\frac{dx^T\Gamma x}{dt}dt=-\int_{t_0}^{t_k}x^T\beta x dt-\int_{t_0}^{t_k}(u^T k^{-1}u_{опт}^T k^{-1}u)dt$$

$$\int_{t_0}^{t_k}x^T\beta x=-x^T(t_k)\Gamma(t_k)x(t_k)+x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_k}(u^T k^{-1}u_{опт}+u_{опт}^T k^{-1}u)dt$$

Підставами цей вислів в I

$$I=x^T(t_k)\rho x(t_k)-x^T(t_k)\Gamma(t_k)x(t_k)+x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_k}(u^T k^{-1}u_{опт}+u_{опт}^T k^{-1}u)dt+\int_{t_0}^{t_k}(u^T k^{-1}u+u_{опт}^T k^{-1}u_{опт})dt=$$
$$=x^t(t_k)\rho x(t_k)-x^T(t_k)\Gamma(t_k)x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k}(u-u_{опт})^T k^{-1}(u-u_{опт})dt$$

Отже отримуємо, що абсолютний мінімум I досягається при $u = u_{опт}$ і $\Gamma(t_k) = r$. Знову сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема А.А. Красовського. Для лінійного детермінованого підвалина - чівого об'єкта $\dot{x}=ax+bu, x(t_0)=0, x\in X, u\in U$

оптимальними в сенсі мінімуму функціоналу

$$I=x^T(t_k)\rho x(t_k)+\int_{t_0}^{t_k}(x^T\beta x+u^Tk^{-1}u+u_{опт}^Tk^{-1}u_{опт})dt$$

є

рівняння $u=u_{опт}=-kb^T\Gamma(t)x,$ де Г - позитивно визначено - ная симетрична матриця- рішення лінійного матричного диф- ференціального рівняння Ляпунова. $\dot{\Gamma}+\Gamma a+a^T\Gamma=-\beta,$ при краї - вом умови $\Gamma(t_k) = r$.

Відзначимо, що в разі нетермінальних завдання (t_k = ¥) управління $u_{опт}$ виходить стаціонарним $u_{опт} = -kb^T\Gamma x$, а матриця Г визначається з рішення вже алгебраїчного рівняння Ляпунова $\Gamma a + a^T\Gamma = -b$, методи вирішення якого досить добре розроблені.

Порівняльна характеристика методів оптимального управління.

Таку порівняльну оцінку проведемо з трьох позицій: клас оптимізуються об'єктів, обчислювальні труднощі застосування того чи іншого методу і можливість практичної реалізації синтезованих управлінь.

Область застосування принципу максимуму Понтрягіна включає в себе широкий клас нелінійних нестаціонарних об'єктів з досить загальними обмеженнями на фазові координати, управління, час і т.д. Однак для нього характерні значні обчислювальні труднощі, пов'язані перш за все з необхідністю вирішення двухточечной крайової задачі для системи пов'язаних рівнянь. Крім того, оптимальні управління виходять у вигляді складних нелінійних законів або програм, що не завжди зручно реалізувати на практиці. У зв'язку з цим більш кращим виявляється динамічне програмування, в якому оптимальний закон керування виходить у вигляді зворотного зв'язку за координатами стану, що легко практично піддається реалізації. Однак необхідність вирішення функціонального рівняння Беллмана (в приватних похідних), неоднозначність одержуваного рішення призводить до суттєвих обчислювальних труднощів.

Аналітичне конструювання Лєтова-Калмана-Красовського дає досить простий шлях реалізації оптимального закону керування (у вигляді аналітичної лінійної функції від координат об'єкту) і при цьому забезпечуються порівняно невисокі обчислювальні труднощі, пов'язані з рішенням рівнянь Риккати і Ляпунова. Але в даний час ці методи в основному обмежуються класом лінійних об'єктів та досить вузьким колом можливих обмежень.

Узагальнюючи все вищесказане, можна сказати, що застосування того чи іншого методу залежить від поставленого завдання, особливостей об'єкта управління, характеристик застосовуваних обчислювальних засобів і, природно від здатності інженера-конструктора правильно формалізувати поставлену задачу і зробити вибір відповідного методу оптимального управління.