Лекція 15. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів

Задача синтезу оптимального керування для лінійних систем, що мінімізує інтегрально-квадратичний критерій, називається задачею аналітичного конструювання оптимальних регуляторів (АКОР). Це метод синтезу для лінійних систем з лінійним законом керування.

Дано клас об'єктів управління, збурений рух яких описується диференціальним матричним рівнянням

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad t_0 = 0, \qquad (15.1)$$

де *A*, *B* – задані матриці коефіцієнтів математичних моделей розмірності $n \times n$, $n \times m$ відповідно, в загальному випадку можуть залежати від часу; *x(t)* – вектор координат стану системи розмірності *n*; *u(t)* – вектор управління розмірності *m*.

Необхідно знайти матрицю *R* (розмірність $m \times n$) рівняння регулятора

u(*t*) = Rx (*t*), (15.2)

таку, щоб на асимптотичних стійких рухах системи (5.1), (5.2), що збурені випадковими початковими відхиленнями *x0*, мінімізувався функціонал

$$I(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Px}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{Du}(t))dt. \qquad (15.3)$$

Перша складова мінімізує відхилення реальної траєкторії від заданої (нульової), а друга – енергетичні витрати. Матриці *P*, *D* – задані додатньо-визначені матриці розмірності $n \times n$ та $m \times m$ відповідно(*P>0, D³0*). В загальному випадку ці матриці залежать від часу, а їх значення визначають вплив кожної складової векторів координат стану та управління на критерій. Матриці *P*, *D* можуть задаватися самостійно розробником оптимальної системи управління, на основі апріорної інформації від експертів або їх визначення може відповідати цілі окремої оптимізаційної підзадачі.

(

<u>ПАМ'ЯТКИ З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.</u>

Матриця $\mathbf{Q}$ називається невід'ємно-визначеною, якщо для будь-якого вектору $\mathbf{x} \neq 0$ $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} \geq 0$. Матриця R називається додатньо-визначеною, якщо для будь-якого вектору $\mathbf{u} \neq 0$ $\mathbf{u}^T\mathbf{Ru} > 0$. Матриця $\mathbf{C}$ називається симетричною, якщо $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ Згідно з критерієм Сильвестра, для того, щоб симетрична матриця була додатньо-визначеною достатньо, щоб всі її головні ведучі мінори були додатними. Головні ведучі мінори порядку k називають визначник, складений з елементів матриці , що стоять на перетині перших k рядків і перших k стовпців.

5

.

1

Матрицю R закону управління (15.2) іноді називають матрицею коефіцієнтів підсилення регулятора.
Для розв’язання даної задачі можна використати принцип максимуму Понтрягіна або метод динамічного програмування Белмана.
Розв'язок на нескінченому інтервалі часу. При $tk \to \infty$ коефіцієнт підсилення регулятора для системи (15.1) з критерієм (15.3) має вигляд
$R = -D^{-1}B^TS$, (15.4)
причому матриця R не залежить від часу. Матриця S – симетрична матриця чисел розмірності $n \times n$, яка визначається з алгебраїчного рівняння Ріккаті виду
$SA + A^TS - SBD^{-1}B^TS + P = 0$. (15.5)
Дане рівняння розв'язується за допомогою методів матричної алгебри.
Відмітимо, що функція:
$V(x) = x^TSx$
є функцією Ляпунова, тобто синтезована лінійна система при додатньовизначеній матриці S згідно з другим методом Ляпунова асимтотично стійка.

ПАМ’ЯТКА З КУРСУ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.

Другий метод Ляпунова: якщо для нелінійної системи можна підібрати таку знаковизначену функцію $V(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$, щоб її похідна $\frac{dV}{dt}$, взята вздовж фазової траєкторії, також була знаковизначеною (або знакопостійною), але мала знак, протилежний знаку V, то система стійка, причому при знаковизначеній функції $\frac{dV}{dt}$ - асимптотично стійка.

Розв'язок на скінченому інтервалі часу. Ця задача виникає, коли необхідно перевести систему зі стану $x(t_0)$ в $x(t_к)=0$ за визначений час, тобто при $t > T$ незакінчений перехідний процес веде до значних втрат якості одержуваного напівпродукту або значних енергетичних втрат. А коли енергетичні витрати під час перехідного процесу при $(t_k - t_0) \to T$ не перевищують витрат при $(t_k - t_0) \to \infty$ або їх перевищення виправдане задача зводиться до нескінченого інтервалу часу. При $(t_k - t_0) = T$ функціонал якості (15.3) доповнюється так званою термінальною складовою і має вигляд

$$I(\mathrm{u}) = 0.5\mathrm{x}^T(T)\mathrm{G}\mathrm{x}(T) + 0.5\int_{t_0}^{t_k} (\mathrm{x}(t)^T \mathrm{P}\mathrm{x}(t) + \mathrm{u}(t)^T \mathrm{D}\mathrm{u}(t))dt, \qquad (15.6)$$

де G – задана симетрична матриця чисел розмірності $n \times n$ $(G \geq 0)$, що визначає середньо-квадратичне відхилення координат стану або їх комбінації від нульових значень в кінцевий момент часу.
Матриця підсилення регулятора $R(t)$ (в даному випадку залежна від часу, див. (15.2)) набуде вигляду

$$\mathrm{R}(t) = -\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{S}(t), \qquad (15.7)$$

де $S(t)$ – симетрична додатньо-визначена матриця розмірності $n\times n$ визначається з диференціального рівняння типу Ріккаті виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{S}(t)}{dt} = -\mathbf{S}(t)\mathbf{A} + \mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}(t) - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}(t) - \mathbf{P}, \\ \mathbf{S}(T) = \mathbf{G}; \end{cases} \tag{15.8}$$

Відмітимо, що всі складові вектора стану повинні бути досяжними, тобто вимірюваними, інакше для оцінки стану € необхідно використовувати спостерігачі. Також матричне диференціальне рівняння типу Ріккаті (5.8) справедливе для нестаціонарного випадку, коли матриці A(t), B(t), D(t), P(t) залежать від часу.

Відмітимо, що суттєвим є виконання умови керованості. За визначенням система називається повністю керованою, якщо з будь-якого початкового стану x_0 вона може бути переведена в будь-який наперед заданий стан $x_к$ за допомогою деякого управління $u(t)$ за кінцевий час $(t_k - t_0) \geq 0$. Зокрема при постійних матрицях A та B система (5.1) – (5.2) буде повністю керована тоді і тільки тоді, коли ранг $(n\times nm)$ матриці керованості L_c дорівнює n, де

$$\mathbf{L_c} \equiv [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \tag{15.9}$$

Приклад 1. Визначити матрицю керованості трисекційної пластинчастої пастеризаційно-охолоджувальної установки ОПУ-10, математична модель якої задається у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dt_{гв}}{d\tau} = -0{,}0136\ t_{гв} + 0{,}676\ G_п + 0{,}0136\ t_{хв}; \\ \dfrac{dt_{мп}}{d\tau} = -0{,}0123\ t_{мп} + 0{,}0066\ t_{мр} - 0{,}0414\ G_м + 0{,}0056\ t_{гв}; \\ \dfrac{dt_{хв}}{d\tau} = -0{,}0055\ t_{хв} - 0{,}0092\ t_{гв} + 0{,}0027\ t_{мр} - 0{,}00355\ G_м; \\ \dfrac{dt_{мр}}{d\tau} = -0{,}0068\ t_{гв} + 0{,}0054\ t_{мп} - 0{,}0169\ G_м + 0{,}0013\ t_{мх}; \end{cases} \tag{15.10}$$

де $t_{гв}$ — температура гарячої води, $t_{мп}$ — температура пастеризації, $t_{хв}$ — температура холодної води, $t_{мр}$ — температура молока рекуперації, $G_п$ — витрата пари, $G_м$ — витрата молока, $t_{мх}$ — температура сирого молока.

Необхідно привести об'єкт у простір змінних станів:

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) + \mathrm{G}w(t); \tag{15.11}$$

та оцінити керованість системи.

За диференціальними рівняннями складаємо вектор координат стану, вектор управління та вектор зовнішніх збурень:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} t_{гв} \\ t_{мп} \\ t_{хв} \\ t_{мр} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}=\begin{bmatrix} G_n \\ G_м \end{bmatrix}; \qquad w=[t_{мх}]. \tag{15.12}$$

Матриці рівняння (5.11):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -0.0136 & 0 & 0.0136 & 0 \\ 0.0056 & -0.0123 & 0 & 0.0066 \\ -0.0092 & 0 & -0.0055 & 0.0027 \\ -0.0068 & 0.0054 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0.676 & 0 \\ 0 & -0.0414 \\ 0 & -0.00355 \\ 0 & -0.0169 \end{bmatrix}; \mathbf{G}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0013 \end{bmatrix} \tag{15.13}$$

Визначаємо матрицю керованості об’єкта за виразом (5.9):

$$\mathbf{N}_k=\begin{bmatrix} 0.6760 & 0 & -0.0092 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0414 & 0.0038 & 0.0004 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0036 & -0.0062 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0169 & -0.0046 & -0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.14}$$

Відповідно ранг цієї матриці становить *rank* $N_k = 4 = n$, тобто об’єкт повністю керований.

Приклад 2. Дано об’єкт керування:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u, \quad \text{де} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{15.15}$$

Необхідно мінімізувати функціонал керування:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}+ru^2\right)dt, \tag{15.16}$$

де $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$, $r,\ q_1,\ q_2$ – додатні числа.

Згідно (5.5) рівняння Ріккаті запишеться:

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}-\frac{1}{r}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}=0. \tag{15.17}$$

з останнього отримується система рівнянь та її розв’язок:

$$\begin{cases} q_1 - \frac{1}{r}k_{12}^2 = 0, \\ k_{11} - \frac{1}{r}k_{12}k_{22} = 0, \\ q_2 - \frac{1}{r}k_{22}^2 + 2k_{12} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} k_{12} = \pm\sqrt{rq_1}, \;\; k_{22} = \pm\sqrt{r\left(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1}\right)}, \\ k_{11} = \pm\sqrt{q_1\left(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1}\right)}. \end{array} \qquad (15.18)$$

З отриманих розв’язків виділяємо ті, що задовольняють додатньо-визначеності матриці Ріккаті:

$$k_{11} = \sqrt{q_1\left(q_2 + 2\sqrt{rq_1}\right)}, \;\; k_{12} = \sqrt{rq_1},$$
$$k_{22} = \sqrt{r\left(q_2 + 2\sqrt{rq_1}\right)}. \qquad (15.19)$$

Отже, оптимальне керування отримується у вигляді:

$$u = -\frac{1}{r}\left(k_{12}x_1 - k_{22}x_2\right). \qquad (15.20)$$

Переваги аналітичного конструювання перед методом динамічного програмування очевидні: вимоги щодо гладкості функцій об’єкта та критерію зняті; не доводиться вирішувати крайову задачу; в методі динамічного програмування існування функції *S(x)* не гарантовано.

Контрольні запитання

1. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Автономна система.
2. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Неавтономна система.
3. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Розв’язок на нескінченому інтервалі часу.
4. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Розв’язок на скінченому інтервалі часу.
5. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Нестаціонарна система.
6. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Побудова керування при неповній інформації про вектор стану.
7. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Нелінійна система.
8. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Стохастична система.
9. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів. Дискретний випадок.

Методи математичного програмування

Побудова аналітичних розв’язків різних задач оптимального керування можлива лише в простих випадках. Часто такі задачі можуть бути сформульовані завдяки ідеалізації, що суттєво відрізняється від реалій.

Основним же підходом до рішення реальних задач є приблизна числова оптимізація, основним підходом якої є використання методів нелінійного програмування для апроксимації об’єктів керування. Тобто переходу постановки задачі оптимального керування об’єктом в диференційно-інтегральній формі до задач у формі нелінійних рівнянь з обмеженнями, тобто до задач нелінійного програмування.

Перехід від задач оптимального управління нескінчено-вимірних об’єктів до задач скінчено-вимірної оптимізації, зокрема до задач нелінійного програмування називається редукцією.

Виділяють проекційні методи або методи ортонормованих базисних функцій та метод сіток. Але метод сіток можна звести до проекційного, якщо в якості базисних функцій взяти фінітні функції (ті які відрізняються від нуля лише на досліджуваній області), тобто всі ці методи є проекційними.

Сутність методу сіток (метод скінчених різниць).

Функцію неперервного аргументу замінюють сітковою функцією, що визначена в вузлах сітки.

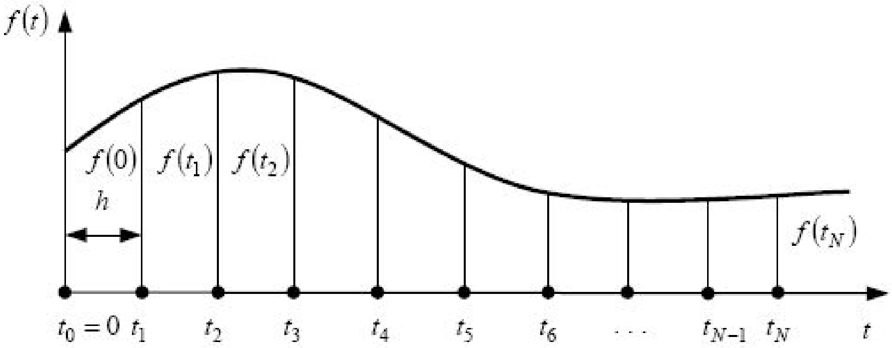

Рис.8. До методу сіток

Тут функція *f(t)* характеризується її дискретними значеннями – числами $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_{N-1}), f(t_N)$. Похідні замінюють різницевими аналогами – лінійними комбінаціями значень сіткових функцій в вузлах сітки. В результаті, наприклад, крайова варіаційна задача:

$$\min_{f(t)} I(f) = \min_{f(t)} \int_0^T F\left(f(t), f'(t), t\right) dt \qquad f(0) = f^0, \; f(T) = f^T \qquad (15.21)$$

замінюється дискретним еквівалентом – дискретною крайовою задачею (різницевою схемою):

$$\min_{f(t_i)} I\left(f(0), f(t_1), \dots, f(t_N)\right) = \min_{f(t_i)} h \sum_{i=0}^{N-1} F\left(f(t_i), \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h}, t_i\right) \qquad (15.22)$$

$$f(0) = f^0, \; f(t_N) = f^T$$

Так як крайові умови відомі, то задача зводиться до пошуку екстремуму функції N-1 змінних $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_{N-1})$. Таким чином нескінчено-вимірна задача зводиться до скінчено-вимірної.

Існує ряд проблем, основна з яких вибір розмірності задачі (кроку h), яка пов’язана з точністю отриманих розв’язків. Навіть якщо n невелике, але

N – досить велике, то задача математичного програмування є досить громіздкою.

Розглянемо випадок, об'єкт описується векторно-матричним рівнянням:

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),\ \mathbf{A}=\text{const},\ \mathbf{B}=\text{const}. \qquad (15.23)$$

якщо використати скінчені різниці першого порядку, дане рівняння перепишеться скінченим еквівалентом:

$$\frac{\mathbf{X}\left[(k+1)h\right]-\mathbf{X}[kh]}{h}=\mathbf{A}\mathbf{X}(kh)+\mathbf{B}\mathbf{U}(kh). \qquad (15.24)$$

Для того, щоб операція диференціювання була правомірна, необхідно, щоб h було малим в порівнянні з найменшою постійною часу процесу.

Тут використовується формула:

$$\mathbf{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau. \qquad (15.24)$$

Визначаючи послідовно $\mathbf{X}(kh)$ з кусочно-постійним управлінням маємо:

$$\mathbf{X}(h)=e^{\mathbf{A}h}\mathbf{X}^0+\int_0^h e^{\mathbf{A}(h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(0),$$

$$\mathbf{X}(2h)=e^{\mathbf{A}2h}\mathbf{X}(h)+\int_h^{2h} e^{\mathbf{A}(2h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(h),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}\left((k+1)h\right)=e^{\mathbf{A}(k+1)h}\mathbf{X}(kh)+\int_{kh}^{(k+1)h} e^{\mathbf{A}((k+1)h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(kh). \qquad (15.26)$$

або в загальному випадку дискретна модель може бути представлена:

$$\mathbf{X}\left((k+1)h\right)=\mathbf{\Phi}(kh)\mathbf{X}(kh)+\beta\mathbf{U}(kh), \qquad (15.27)$$

де $\mathbf{\Phi}=e^{\mathbf{A}h},\ \beta=\int_0^h e^{\mathbf{A}(h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}.$

Звідси знаходимо формулу для практичного використання:

$$\mathbf{X}(kh)=\mathbf{\Phi}^k\mathbf{X}^0+\beta\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-1-i}\,\mathbf{U}(i\,h). \qquad (15.28)$$

Тоді задача побудови оптимального програмного управління в термінах математичного програмування формулюється так:

$$I\left(\mathbf{U}(t_k),\mathbf{X}(t_k)\right)=h\sum_{k=0}^{N-1}f_0\left(\mathbf{X}(t_k),\mathbf{U}(t_k)\right)\to\min_{\mathbf{X}(t_k),\mathbf{U}(t_k)} \qquad (15.29)$$

з обмеженнями:

– у формі нерівності:

$$\begin{cases}\mathbf{X}(t_k)\in X^n\subset R^n, & k=\overline{0,N-1},\\ \mathbf{U}(t_k)\in U^m\subset R^m, & k=\overline{0,N-1},\end{cases} \qquad (15.30)$$

– у формі рівності:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t_N) = \mathbf{X}^T, \\ \mathbf{X}(t_{k+1}) - e^{\mathbf{A}h}\left[\mathbf{X}(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_k-\tau)} d\tau \mathbf{B}\mathbf{U}(t_k)\right] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (15.31)$$

Контрольні запитання

1. Математичне програмування. Загальна постановка задачі пошуку оптимального розв'язку.
2. Математичне програмування. Проекційні методи.
3. Математичне програмування. Метод сіток.
4. Метод моментів.