Загальна постановка задачі оптимального управління. Критерії оптимальності. Теоретико-функціональні обмеження на вектори стану та управління.

1. Постановка задач оптимального керування та їх класифікація

Оптимальним називають найкраще в деякому сенсі керування. У більшості випадків перевести об'єкт керування з одного стану в інший (з вихідного в заданий) можна безліччю способів. Ці способи реалізуються за допомогою різних законів керування. Часто серед них можна вибрати такий закон, щоб перехідний процес був оптимальним за певним критерієм (критерієм оптимальності). У якості критерію може виступати, наприклад, мінімум енергії, що витрачається на процес переходу або мінімум часу переходу. Критерій оптимальності формалізується у вигляді деякого функціонала, екстремум якого (мінімум або максимум) свідчить, що перехідний процес і керування оптимальні.

Загальний вид функціонала такий:

$$J = g_0\,(X(t_k), t_0, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} (X(t), U(t), t\, dt) \qquad (2.1)$$

де X – вектор змінних стану об'єкта керування; U вектор керуючих впливів; t_0, $t_к$ – початковий і кінцевий моменти часу перехідного процесу.

Функція g_0 визначає „якість" крайових станів, у тому числі, пов'язаних з величинами t_0 та $t_к$. Функція f_0 визначає „якість" траєкторій $X(t)$ і керування $U(t)$ на інтервалі $[t_0; t_к]$.

Задача, у якій відшукується екстремум функціонала (1), називається *задачею Больца*. В окремих випадках функціонал (1) може приймати такі види:

$$J = g_0\,(\;(t_0),\, X\,(t_к), t_0, t_к) \qquad (2.2)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_к} f_0\;\; X(t), U(t), t\, dt) \qquad (2.3)$$

У першому випадку задача пошуку екстремуму називається *задачею Майера*, у другому – *задачею Лагранжа*.

Прикладами задачі Майера є: задача максимальної швидкодії

$$J = t_к - t_0 \rightarrow \min, \qquad (2.4)$$

задача на максимальну відстань переміщення

$$J = x(t_к) - x(t_0) \rightarrow \max. \qquad (2.5)$$

Приклад задачі Лагранжа - задача на мінімальне енергоспоживання:

$$J = \int_{t_0}^{t_к} u^2(t)dt \to \min . \qquad (2.6)$$

Вид підінтегральної функції критерію (6) пояснюється тим, що потужність керуючого сигналу, як правило, пропорційна квадрату його амплітуди. Крім того, використання квадрату, а не першого ступеня керування *u(t)* дозволяє врахувати ту обставину, що в перехідному процесі керування може бути від'ємним. В окремих випадках, коли відомо, що керування завжди додатне, функціонал може бути й більш простим:

$$J = \int_{t_0}^{t_к} u(t)dt \to \min . \qquad (2.7)$$

Можна показати, що задачі Майера й Лагранжа мають однаковий ступінь загальності, тобто шляхом певних перетворень можна задачу Лагранжа представити у вигляді задачі Майера і навпаки.

Важливою обставиною при розв'язуванні задач оптимального керування є те, що компоненти векторів X і U не можуть розглядатися як незалежні функції часу, здатні приймати будь-які значення. На вектори X і U обов'язково накладаються деякі обмеження у вигляді рівнянь зв'язку, гранично припустимих значень тощо. Як мінімум, варто вказати на диференціальні рівняння самого об'єкта керування, що зв'язують компоненти векторів X, $\ddot{X}$ *і* U. Наприклад, розглянемо прямолінійний рух тіла масою m під дією керуючого впливу u, що створюється встановленим на тілі двигуном. Позначимо через x координату центру мас тіла й припустимо, що ніякі інші сили на тіло не діють. Тоді у відповідності із другим законом Ньютона рівняння руху тіла має вигляд $\ddot{X}(t)m = u$. Останнє рівняння еквівалентне системі двох рівнянь першого порядку: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 m = u$.

Розділяють „*класичні*" (у вигляді рівностей) і „*некласичні*" (у вигляді нерівностей) обмеження. „Класичні", у свою чергу, діляться на *голономні*, *неголономні* й *ізопериметричні*.

Голономні обмеження являють собою алгебраїчні рівняння зв'язку шуканих функцій *X(t)* і *U(t)*, записані, для зручності, у вигляді однорідних рівнянь із нульовою правою частиною:

$$\varphi_i(X,U,t) = 0, \quad i = 1...r, \qquad (2.8)$$

де r - кількість алгебраїчних рівнянь.

Для задач оптимізації динамічних режимів роботи об’єктів керування голономні обмеження нетипові. Крім того, як правило, цих обмежень можна позбутися ще на етапі формулювання задачі шляхом відповідних перетворень. Тому надалі вони не розглядаються.

Неголономні обмеження являють собою диференціальні рівняння:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = 0, \ \ i = 1 \ldots n, \tag{2.9}$$

де n - кількість диференціальних рівнянь.

Це диференціальні рівняння об’єкта керування, а також інші рівняння, що дозволяють врахувати додаткові обмеження.

Ізопериметричні обмеження мають вигляд:

$$\int_{t_0}^{t_\kappa} \varphi_i(X, U, t)dt = c_i = const, \ i = 1 \ldots k, \tag{2.10}$$

де k - кількість інтегральних рівнянь.

$$\int_{t_0}^{t_\kappa} u^2(t)dt = c = const.$$

За допомогою певних перетворень ізопериметричні обмеження перетворюються в неголономні. Це перетворення полягає у введенні додаткових змінних, похідні яких за часом рівні підінтегральним виразам (2.22):

$$\dot{x}_{n+i} = \varphi_i(X, U, t), \ \ i = 1 \ldots z, \tag{2.12}$$

де z - кількість „нових” додаткових умов.

Умовно говорячи, нові змінні „розширюють” вихідну систему рівнянь об’єкта. Підставляючи (2.24) в (2.22), одержимо:

$$\int_{t_0}^{t_\kappa} \varphi_i(X, U, t)dt = \int_{t_0}^{t_\kappa} \dot{x}_{n+i}dt = x_{n+i}(t_\kappa) - x_{n+i}(t_0) = c_i. \tag{2.13}$$

Для спрощення вважають $x_{n+i}(t_0) = 0$, тоді $x_{n+i}(t_\kappa) = c_i$.

Типовим прикладом некласичних обмежень є обмеження на максимальні значення керуючих величин (обмеження на керування по модулю):

$$|u_i| \le u_{i,\max}, \ i = 1...m, \tag{2.14}$$

де *m* - кількість обмежень на керування.

Інший вид додаткових умов, що накладаються на задачу ~~-~~ це *крайові умови*, що визначають значення змінних об'єкта в початковий і кінцевий моменти часу перехідного процесу. За видом крайових умов розрізняють *задачі із закріпленими кінцями*, коли $X(t_0)$ і $X(t_к)$ відомі (задані), і *задачі з рухомими кінцями*, коли частина або всі компоненти цих векторів невідомі (можуть приймати довільні значення). Серед останніх задач часто зустрічаються *задачі з вільним правим кінцем*, у якій вектор $X(t_к)$ невідомий.

Залежно від визначеності моменту часу $t_к$ задачі розділяють на *задачі з фіксованим і нефіксованим часом*. До останнього типу задачі відноситься задачі на максимальну швидкодію.

Отже, задача оптимізації керування полягає в тому, щоб знайти такі вектори $U(t)$ і $X(t)$, які доставляють екстремум функціоналу критерію оптимальності з урахуванням усіх обмежень і крайових умов. Ці вектори називаються відповідно оптимальним керуванням і оптимальною траєкторією. У результаті розв'язку задачі оптимальне керування може бути знайдене або як *оптимальна програма*

$$U = U(t), \tag{2.15}$$

або як *оптимальна стратегія*

$$U = U(X). \tag{2.16}$$

Для побудови системи керування другий розв'язок, мабуть, більш бажаний, тому що дозволяє побудувати замкнену систему, здатну оптимальним чином функціонувати при будь-яких початкових умовах. Однак визначити оптимальну стратегію, як правило, набагато складніше, чим оптимальну програму.

Розв'язування задач оптимізації динамічних режимів здійснюється різними методами, основними з яких є: класичне варіаційне числення; метод максимуму Понтрягіна; динамічне програмування Беллмана.

2.Критерії оптимальності

Критерії оптимальності можуть бути різні і залежать від задачі, що вирішується. Найчастіше зустрічаються такі критерії оптимальності:

1) Точність САУ при впливі, що змінюється,

2) Час перехідного процесу,

3) Економічність;

4) Продуктивність;

5) Інтегральні критерії.

Поняття керованості і спостережності специфічні для методу *простору станів.* При класичному описанні динамічних систем у термінах *вхід* - *вихід* проблема керованості і спостережності не виникає.

При використанні методу *простору станів* не втрачається цілісна картина об'єкта. При записі рівняння стану передбачається, що в об'єкті можуть відбуватись інші процеси й існувати перемінні, не доступні для спостереження чи ті, що не піддаються управлінню.

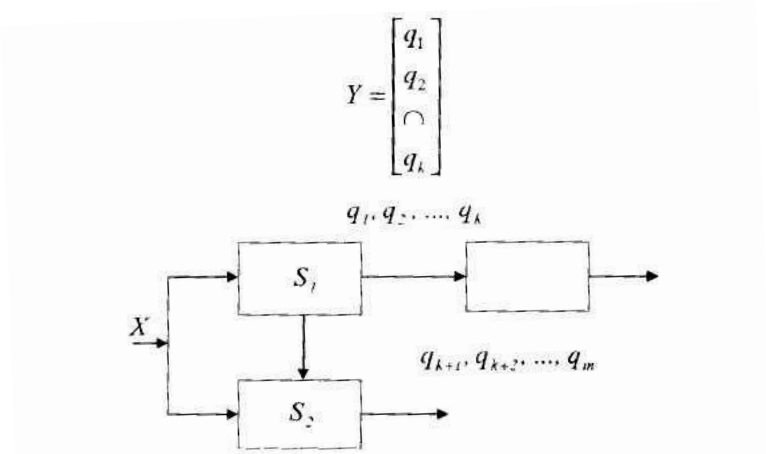

Рис. 6.1. **Схема системи, що не спостерігається, але керована**

Аналогічно система, показана на рис. 6.2, буде тією, що спостерігається, але не керованою, тому що сигнал ***X*** впливає тільки на перемінні $1, q_2, \ldots, q_k$, а на перемінні ($q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_m$)ззовні впливати не можна.

Враховуючи *викладене, всі системи можна розділити на такі чот категорії: що спостерігаються і керов ані; що спостерігаються але некеровані; що не спостерігаються, але керовані; що не спостерігаються і некеровані.*

Поняття керованості і спостережності мають принципове значення при дослідженні систем будь-якої природи. Неврахування некерованості і неспостережності може привести до помилкових висновків.

Умови **керованості і спостережності** можна зв'язати з видом матриць, що

описують систему. Для приклада розглянемо, при я ких умовах може виникнути неспостережність чи некерованість у найпростішому випадку, коли матриця ***A*** діагональна,тобто $A\ \mathrm{diag} a_{ij}$.

Нехай система має вигляд, показаний на рис. 6.3, де і - вектори розмірності

$$Y = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cap \\ q_k \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cap \\ q_m \end{bmatrix}$$

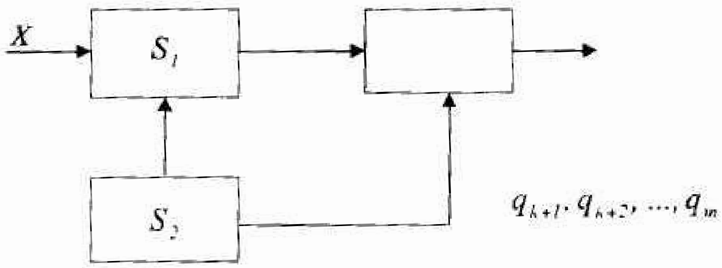

Рис. 6.2. **Схема системи, що спостерігається, але некерована**

2, j - вектор розмірності 3.

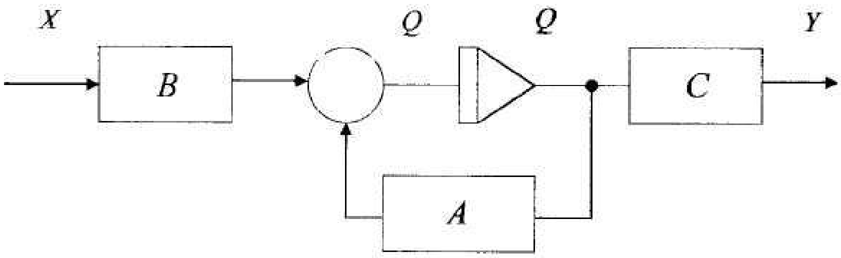

Рис. 6.3. **Схема системи**

Управління системи в матричному вигляді записується так:

$$\dot{Q} = A_{(2x2)}Q + B_{(2x3)}X;$$
$$Y = C_{(2x2)}Q + D_{(2x3)}X,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}; \quad D = 0.$$

Якщо один з рядків у матриці ***B*** (наприклад, перший) складається цілком з нульових елементів, тоді відповідна координата (перша) буде некерованою, тому що жодна з трьох керуючих дій не чинить керуючого впливу q1.

У загальному випадку матриця ***A*** недіагональна, а самі пере мінні стану можуть впливати один на другий. Тому, навіть якщо немає безпосереднього впливу управління на дану координату стану ***q***, такий вплив може виникнути більш складним чином: управління ***X*** впливає на якусь іншу координату, а вже ця координата через матрицю ***A*** впливає на дану координату. У такому випадку роль матриці ***B*** відіграє добуток матриць ***AB***. Якщо й у цьому випадку впливу ***X*** на координату ***q***, немає, тоді може виявитись, що такий вплив здійснюється ще більш опосередкованим чином - через матрицю $\boldsymbol{A\,(AB) = A^2\,B}$ та ін.

Тоді умову повної керованості можна записати так: *система є цілком керованою, якщо ранг матриці* $\mathbf{[B, AB, A^2\,B, A^{m-1}, B]}$ дорівнює ***m.***

Рангом матриці називають максимальний розмір її мінорів, відмінних від нуля. Мінор k-того порядку матриці розмірністю (m -1) виходить викреслюванням будь-яких (m - k) рядків і (l – k) стовпців матриці.