Керованість лінійних стаціонарних систем. Приведення не цілком керованої системи до канонічного вигляду

1.Керованість лінійних стаціонарних систем

Розглянемо стаціонарну лінійну динамічну систему, що описується векторно-матричним рівнянням (4.1) та охоплюється головним одиничним зворотним зв'язком, тобто замкнену систему (рис. 1).

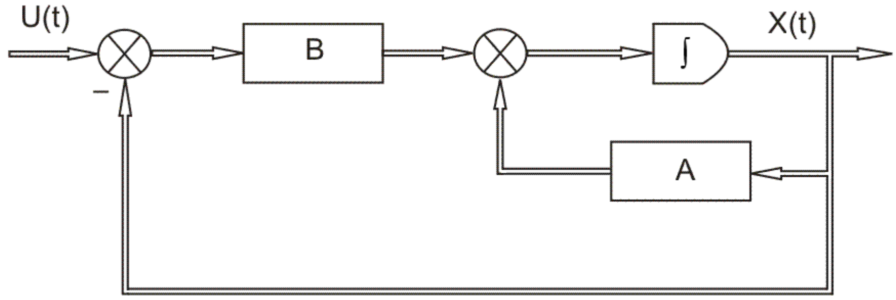

Рис. 1. Структурна схема замкнутої системи

В такому випадку рівняння (4.1) прийме вигляд

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}[(\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\,.$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B} \quad \ldots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right| = n\,.$$

Для випадку, коли «жорсткий» зворотний зв'язок не є одиничним, а описується матрицею постійних параметрів **R,** векторно-матричне рівняння запишеться у вигляді

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\,.$$

Критерій керованості буде мати вигляд

$$rank\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{B} \quad \ldots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B}\right| = n\,.$$

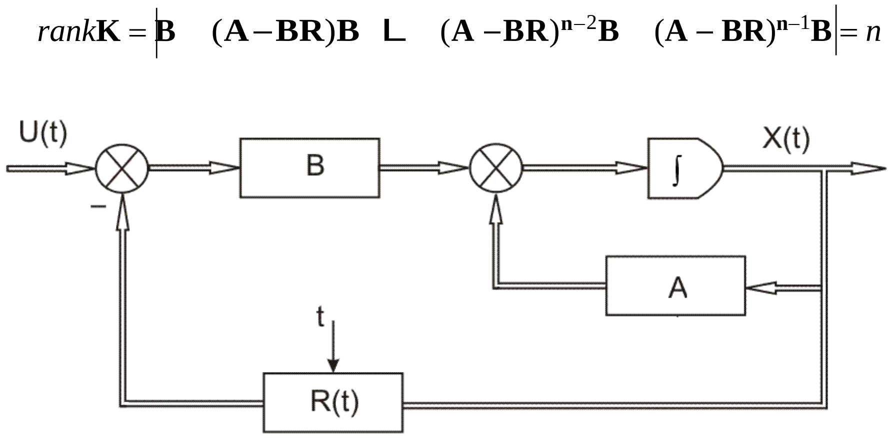

Рис. 2. Структурна схема замкнутої системи з «гнучким» зворотним зв'язком

В разі «гнучкого» зворотного зв'язку (рис.2) динамічна система (2) стає нестаціонарною, оскільки матриця **R** буде включати компоненти, що є функціями часу, т.ч.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)]\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\,,$$

$$\text{де } \mathbf{A} - \mathbf{BR}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t) .$$

Для систем четвертого порядку зі «гнучким» зворотним зв’язком при постійних компонентах матриці **A** та **B** будемо мати критерій керованості

$$rank\mathbf{K}(\tau) = rank\left|\mathbf{K_1} \quad \mathbf{K_2}(t) \quad \mathbf{K_3}(t) \quad \mathbf{K_4}(t)\right| = 4 ,$$

де $\mathbf{K_1} = \mathbf{B}$;

$$\mathbf{K}_2(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)]\mathbf{B} ; \qquad (t) ,$$

$$\mathbf{K_3}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)]^2(t)\mathbf{B} - 2\mathbf{B}\mathring{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B} ;$$

$$\mathbf{K_4}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)]^3(t)\mathbf{B} + 2[\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\mathring{\mathbf{R}}(t)[\mathbf{A} - \mathbf{BR}(t)]\mathbf{B} - 3\mathbf{B}\mathring{\mathbf{R}}(t)\mathbf{B}.$$

Для випадку, коли на вхід стаціонарної системи (рис. 4) подається вектор спостережуваних координат **Y**(t) = **CX**(t) + **DU**(t) **,** будемо мати для одиничного зворотного зв’язку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BD})\mathbf{U}(t) = \mathbf{AX}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$$

де **A** = (**A** – **BC**); $\tilde{\mathbf{B}}$ = (**B** – **BD**).

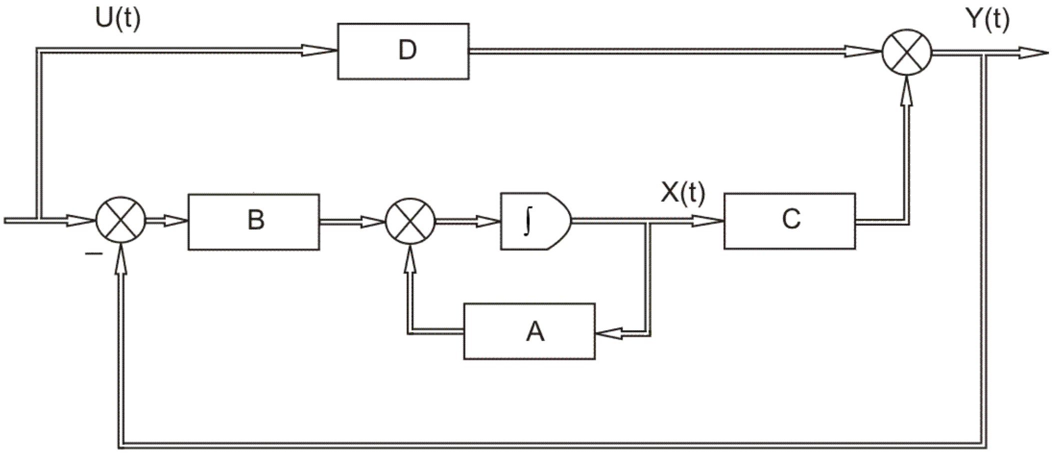

Рис. 4. Структурна схема стаціонарної системи, замкнутої по вектору спостережуваних координат

Для «жорсткого» зворотного зв’язку, що включає матрицю параметрів **R,** будемо мати

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC})\mathbf{X}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{BRD})\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t) ,$$

$$\text{де } \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}); \tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \mathbf{BRD}).$$

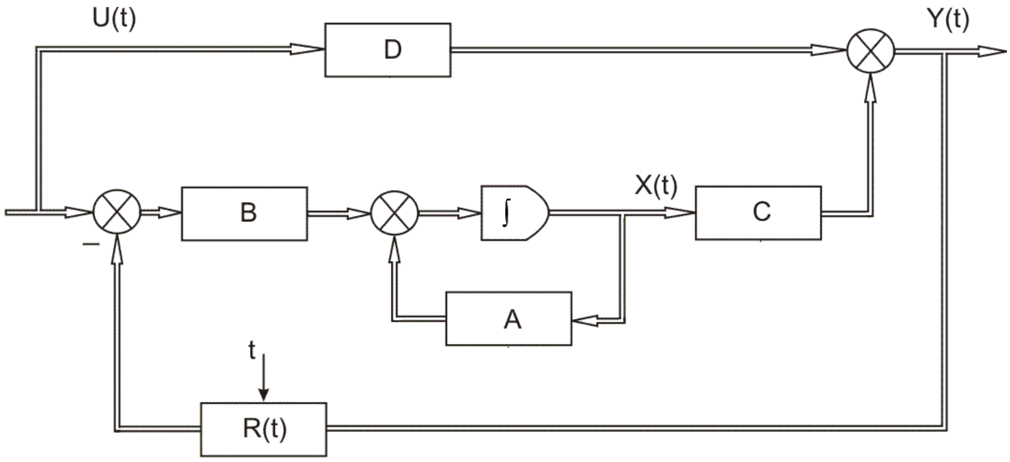

Рис. 5. Структурна схема системи, замкнутої «гнучким» зворотним зв'язком по вектору спостережуваних координат

При «гнучкому» зворотному зв'язку (рис. 5) запишемо

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)\mathbf{C}]\mathbf{X}(t) + [\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{R}(t)\mathbf{D}]\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t)\ .$$

Критерії керованості для таких систем визначаться з уже відомих співвідношень.

КЕРОВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

При використанні різницевої схеми система рівнянь стаціонарної системи керування, що описується векторно-матричним рівнянням (4.1), запишеться наступним чином

$\mathbf{X}[k+1] - \mathbf{X}[k\ ]$=AX[k]+BU[k]=AX[k]+BU[k]

де k = 0,1,2,… m– порядок інтервалу дискретності;
Δt – інтервал часу дискретності.
Приймемо Δt= 1 та отримаємо
де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

$$\mathbf{X}[k+1] = (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X}[k] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k]\,, \qquad (4.2)$$

Для другої похідної маємо після підстановки та векторно-матричних перетворень

$$\mathbf{X}[k+2] - 2\mathbf{X}[k+1] + \mathbf{X}[k\ ] = \mathbf{A}(\mathbf{X}[k+1] - \mathbf{X}[k\ ]) + \mathbf{B}(\mathbf{U}[k+1] - \mathbf{U}[k\ ]);$$

та запишемо для координати стану в $k+2$ інтервал дискретності

$$\mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A}^{\,2} + 2\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X}[k\ ] + (\mathbf{B} + \mathbf{AB})\mathbf{U}[k\ ] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k+1] =$$

$$= \mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^2\,\mathbf{X}[k\ ] + (\mathbf{B} + \mathbf{AB})\mathbf{U}[k\ ] + \mathbf{B}\mathbf{U}[k+1].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності аналогічним чином отримаємо

$$\mathbf{X}[k+3] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^3\mathbf{X}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\mathbf{A}^2\mathbf{B})\mathbf{U}[k] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[k+1] + \mathbf{BU}[k+2].$$

Для вектору координат стану об'єкта керування в n – й інтервал дискретності будемо мати

$$\mathbf{X}[n] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^n\,\mathbf{X}[0] + (\mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})\mathbf{U}[0] + \ldots + (\mathbf{B}+\mathbf{AB})\mathbf{U}[n-2] + \mathbf{BU}[n-1].$$

Створимо блочну матрицю із n матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[i]$, де $i = 0,\ldots, n-1$;

$$\mathbf{K} = \left|\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB} \quad \ldots \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+\mathbf{AB}+\ldots+\mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{B},\right|$$

сформуємо складний вектор $\mathbf{U}^*[i]$

$$\mathbf{U}^*[i] = \left|\mathbf{U}[n-1] \quad \mathbf{U}[n-2] \quad \ldots \quad \mathbf{U}[1] \quad \mathbf{U}[0]\right|^{\mathbf{T}},$$

Та запишемо

$$\mathbf{X}[n] = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{\mathbf{n}}\,\mathbf{X}[0] + \mathbf{KU}^*[i]$$

та сформулюємо критерій керованості для стаціонарних дискретних систем.

Стаціонарна система n – го порядку виду (3) із будь-якого початкового стану досягне за допомогою керуючої сили будь-якого заданого стану за кінцеву кількість інтервалів дискретності, т.ч. буде повністю керованою при виконані умови

$$rank\mathbf{K} = n\,.$$

Для нестаціонарної дискретної системи отримання критерію значно ускладнюється громіздкістю обчислювання, тому обмежимось системою третього порядку та приймемо компоненти матриці **B** постійними.

Запишемо для нестаціонарної дискретної лінійної системи

$$\mathbf{X}[k+1] = (\mathbf{A}[k]+\mathbf{E})\mathbf{X}[k] + \mathbf{BU}[k] \tag{4.3}$$

при тих самих позначеннях, що для стаціонарної системи. Для другої похідної будемо мати

$$\mathrm{X}[k+2] - 2\mathrm{X}[k+1] + \mathrm{X}[k] = \mathrm{A}[k](\mathrm{X}[k+1] - \mathrm{X}[k]) +$$
$$+ (\mathrm{A}[k+1] - \mathrm{A}[k])\mathrm{X}[k] + \mathrm{B}(\mathrm{U}[k+1] - \mathrm{U}[k]);$$

та для $k+2$ інтервалу дискретності

$$\mathbf{X}[k+2] = (\mathbf{A}[k+1] + \mathbf{A}^2[k] + \mathbf{A}[k] + \mathbf{E}])\mathbf{X}[k] + \mathbf{BU}[k+1] + (\mathbf{B} + \mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Для координати стану в $k+3$ інтервал дискретності запишемо

$$\mathbf{X}[k+3] = (\mathbf{A}[k+2] + \mathbf{A}^3[k] + 3\mathbf{A}[k+1]\mathbf{A}[k] + +\mathbf{A}[k+1] + \mathbf{A}[k] + \mathbf{E})\mathbf{X}[k] +$$
$$\mathbf{BU}[k+2] + (\mathbf{B} + \mathbf{A}[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k+1] + (\mathbf{B} + 2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B} + \mathbf{A}^2[k]\mathbf{B})\mathbf{U}[k].$$

Створимо блочну матрицю із трьох матриць при керуваннях для відповідних дискретних значень $\mathbf{U}[k]$; $\mathbf{U}[k+1]$; $\mathbf{U}[k+2]$

$$\mathbf{K}[k+3] = \left|\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+\mathbf{A}[k]\mathbf{B} \quad \mathbf{B}+2\mathbf{A}[k+1]\mathbf{B}+\mathbf{A}^2[k]\mathbf{B}\right|$$

та запишемо критерій керованості для дослідженої нестаціонарної дискретної системи (4) в $k+3$ інтервал дискретності

$$rank\mathbf{K}[k+3] = 3\,. \tag{4.5}$$

Процедура визначення критерію показує, що для висновку о повній керованості дискретної нестаціонарної системи необхідно провести аналіз керованості кожної з n координат стану. В той же час для переводу системи (4) з нульового стану ($k = 0$) в заданий стан по довільній траєкторії за три інтервали дискретності необхідно виконання умови (5).

2.Приведення не цілком керованої системи до канонічного вигляду

Щоб одержати канонічну форму керованості, необхідно побудувати невироджену дійсну $n\times n$ – матрицю **S** таку, що

$$x = Sw \tag{4.6}$$

і

$$w = A_* w + B_* u, \quad y = C_* w\,,$$

де

$$A_* = S^{-1}AS, \quad B_* = S^{-1}B, \quad C_* = CS \tag{4.7}$$

є відповідні канонічні матриці.

Побудуємо невироджену $n\times n$-матрицю $\mathbf{P}_c$ із n стовпців $n\times(mn)$ – матриці керованості:

$$G = [b_1\,, Ab_1\,,.., A^{n-1}b_1\,,\ldots, b_m\,\,, Ab_m\,\,,.., A^{n-1}b_m\,\,] \tag{4.8}$$

де b_k – k-й стовпець B. Така невироджена матриця $\mathbf{P}_c$ існує, оскільки G має ранг n.

Матрицю **S** в рівнянні (2) можна подати як $\mathbf{S} = \mathbf{P}_c$. Незважаючи на те, що G має повний ранг, неправильний вибір стовпців для отримання матриці $\mathbf{P}_c$ може привести до того, що $\mathbf{P}_c$ стане виродженою. Так, якщо перші n стовбців G є лінійно незалежними, але $\|b_1\| > \|Ab_1\| >, \ldots, \|A^{n-1}b_1\|$ i $\|A^{n-1}b_1\|(\|b_1\|)^{-1} \ll 1$, то матриця n×n $[b_1\,, Ab_1\,,.., A^{n-1}b_1]$ стає виродженою. В зв'язку з цим необхідно одержати метод вибору стовбців із G для того, щоб отримати таку $\mathbf{P}_c$, яка була б настільки невиродженою, наскільки це можливо. Тобто потрібно вибрати множину Ф із n векторів у R^n із набору l векторів рангу n таку, щоб невироджена $n\times n$-матриця **M**, стовпцями якої є вектори із Ф, мала б настільки малу кількість умов, наскільки це можливо. Кількість умов невиродженої матриці визначають як

$$\mathrm{cond}[M\,] = \quad \|M\|\|M\quad\|$$

Якщо M – ортогональна матриця, то $[M]$ =1. Ортогональна матриця **S** є найкращою матрицею перетворення. Однак малоймовірно що стовпці G утворюють n ортогональних одиничних векторів.

Одержимо такий алгоритм для вибору множини Ф із n векторів у R^n з набору ψ (рангу n) векторів ($l \geq n$), щоб невироджена $n\times n$-матриця **M**, стовпці якої є векторами із Ф, мала б настільки мало умов, настільки це можливо. Вектори в ψ є стовпцями G у рівнянні (4).

Нехай r – додатне ціле, $f_1, f_2, \ldots, f_r \in R^n$ – ненульові вектори і L – дійсна $n\times n$-матриця, причому $r = m$, $f_j = b_j$, $L = A$. Будемо вважати, що $|f_1, f_2, \ldots f_r|$ є лінійно незалежна множина. Якщо це не так, то можна отримати ермітову нормальну форму матриці $Q = [\,f_1, f_2, \ldots, f_r]$, визначити залежні стовпці Q і виключити їх із множини векторів. Матриця Q_j визначається як

$$Q_j = [f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \ldots, f_j^{(n-1)}], \quad 1 \leq j \leq r, \tag{4.9}$$

де $f_j^{(k)} = L^k f_j$; $0 \leq k \leq n-1$. Ранг Q_j є ν_j, $0 < \nu_j \leq n$. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_r$ є цілі числа такі, що $0 \leq i_j \leq \nu_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots, r$. Необхідно вибрати індексну множину $k = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ і одержати $n\times n$-матрицю

$$\mathbf{M}_k = [f_1^{(0)}, \ldots, f_1^{(i_1-1)}, \ldots, f_r^{(0)}, \ldots, f_r^{(i_r-1)}]$$

за таких обмежень:

а) якщо f_s^{κ} – стовпець M_r, то стовпцями цієї ж матриці є $f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \ldots, f_j^{(n-1)}$

б) $\sum_{j=1}^{r} i_j = n$;

в) $\mathbf{M}_k$ є невироджено ю.

Умова в) виключає випадок, коли вектори $f_s^k, \quad 0 \le k \le i_s - 1$ являють собою лінійні комбінації заздалегідь вибраних блоків векторів. Очевидно, що можна замінювати один або більше блоків векторів блоком $\{ f_s^{(0)}, \dots, f_s^{(i_s-1)} \}$ доти, доки не отримаємо лінійно незалежну множину. В цьому разі можна мати різні матриці $\mathbf{M}_k$, які відповідають різним індексним множинам k. Зокрема, необхідно знайти індексну множину $k = \{i_1, i_2, .., i_r\}$ таку, щоб матриця $\mathbf{M}_k$ мала найменше умов (5). Кількість умов можна визначити за виродженими значеннями $\mathbf{M}_k$:

$$\mathrm{cond}[\mathbf{M}_k] = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \tag{4.10}$$

де σ_1, σ_n – максимальне і мінімальне вироджені значення $\mathbf{M}_k$. Для того щоб отримати співвідношення (7), скористаємося спектральною нормою у виразі (4.4). Рівняння (4.7) дає змогу визначити, чи є $\mathbf{M}_k$ виродженою.

Із виразу (5) випливає, що норми векторів $f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(n-1)}$ або зростають, або спадають. Це зумовлює процедуру визначення індексної множини $k = \{i_1, i_2, .., i_r\}$.

Виберемо додатне число ε, $0 < \varepsilon < 1$.Тоді i_j буде найбільшим індексом s $(1 \le s \le \nu_j)$, який можна визначити так, що

$$\frac{\min\limits_{1 \le k \le s} \left| f_j^{(k-1)} \right|}{\max\limits_{1 \le k \le s} \left| f_j^{(k-1)} \right|} \ge \varepsilon. \tag{4.11}$$

Вираз (8) обумовлений обмеженням а) для матриці M_k. Як тільки знайдено i_j, множина векторів $\{f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(i_j-1)}\}$ зберігається для можливості її в M_k. Виключимо ті вектори, норми яких менші, ніж $\varepsilon \times \max\limits_{1 \le k \le s} \left\| f_j^{(i_j-1)} \right\|$. За допомогою цієї процедури можна запобігти вир одженості $\mathbf{M}_k$. Відзначимо, що зростання ε викликає зменшення i_j, а зменшення ε – зростання i_j; ε не слід вибирати настільки великим, щоб $\sum_{j=1}^{r} i_j < n$. Як тільки буде знайдено індексну множину k, як $\mathbf{M}_k$, можна взяти матрицю $\mathbf{P}_c$. Значення $\mathbf{S}$ можна обчислити за допомогою канонічних матриць (4). За цією процедурою можна знайти декілька можливих індексних множин. Необхідно розглянути умови матриці перетворення, які пов’язані з кожною індексною множиною, щоб визначити, яке із розглянутих чисел є найменшим.