Задачі синтезу обмежених управлінь для автономних систем. Управління лінійними системами при неповних вимірах

1.Задачі синтезу обмежених управлінь для автономних систем

У завданнях практики при розробці адаптивних систем оптимального управління багатовимірними нестаціонарними динамічними об'єктами (НДО), в результаті виконання задачі синтезу системи, знаходиться математична модель системи управління, яка, як і об'єкт управління, може бути представлена матричною параметричною передавальною функцією.

З огляду на те, що елементи матричної параметричної передаточної функції є функціями динамічних параметрів ОУ, виникає необхідність автоматичного обліку поточної інформації про параметричний стан нестаціонарного ОУ, тобто. урахування його динамічних властивостей в процесі нормальної експлуатації.

Облік динамічних характеристик НОУ в процесі їхньої нормальної експлуатації можливий із застосуванням систем параметричної ідентифікації.

Найбільш ефективним методом рішення задач ідентифікації, тобто. задач оцінок динамічних характеристик НОУ, заданих параметричними передаточними функціями, є компенсаційний, тобто метод самоналаштуванням моделі ОУ з паралельним включенням.

Вирішуючи задачу аналітичного конструювання адаптивної системи управління НО, заданим параметричною передаточною функцєю $W_o(p_o,r_o)$, де r_o - вектор змінних параметрів ОУ, оцінку останнього будемо находити компенсаційним методом.

Нехай нестаціонарна динамічна система автоматичного керування (Рисунок 1), що складається з об'єкту $W_0(p,r_0)$ і регулятора $W_{рег}(p,x_j)$, має головний негативний зворотний зв'язок, який забезпечує стійкість і необхідну якість регульованого процесу на інтервалі $nT_1 \le t \le (n+1)T_1$ де T_1 деякий період дискретності, протягом якого параметри об'єкту управління r_0 практично зберігають своє постійне значення. При цьому передбачається, що динамічні параметри регулятора та його параметрична передаточна функція $W_{рег}(p,x_j)$ синтезовані в припущенні квазістаціонарних будь-яким з приватних методів з умови забезпечення заданої якості регульованого процесу на вказаному інтервалі.

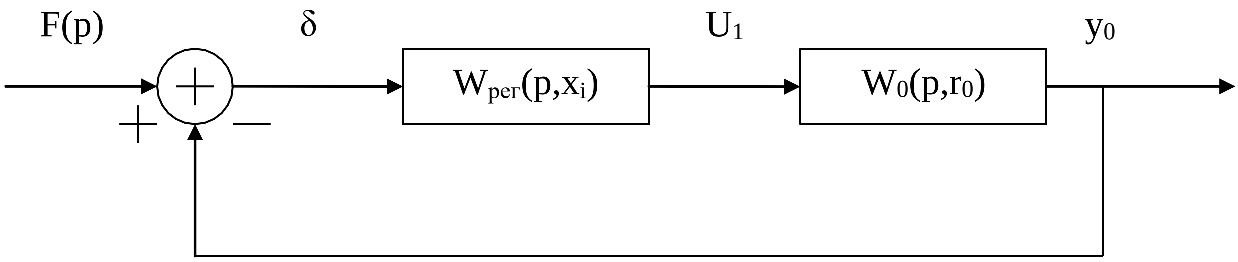

Рисунок 1 - Нестаціонарна динамічна система автоматичного управління

Тоді, вибравши як метод розв'язання задачі параметричної ідентифікації метод самоналаштуванням моделі об'єкту управління з паралельним включенням, а в якості критерію оцінки результатів роботи системи ідентифікації, інтегральний критерій мінімуму середньоквадратичної помилки між вихідними сигналами об'єкту $У_0$ і моделі $У_м$ (рис. 2), маємо

$$I_1 = \frac{1}{T_н}\int_{T_0}^{T_0+T_н} L^{-1}\left[\varepsilon_1(p,\, \Delta r_i)\right]^2 dt, \qquad (6.1)$$

де – $\varepsilon_1 = (p, \Delta r_i) = W_0(p,r_{0,i})U_1 – W_M(p,r_{Mi})U_1;$

$T_н$ - інтервал часу спостереження;

$U_г$ - сигнал управління.

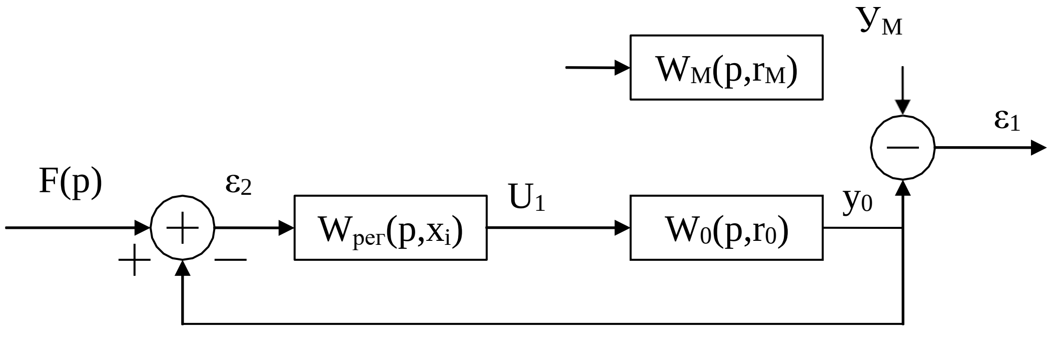

Рисунок 2 - Самоналагоджувальна модель об'єкта управління

Мінімізуючи інтегральний критерій ідентифікації (2.1) по налагоджуючим параметрам моделі r_{Mi} в припущенні квазістаціонарності об'єкта управління на інтервалі $nT_i \le t \le (m+1)T_i$ где $T_i > T_н$ отримаємо:

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial r_м}\right]_{n+1} = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T_н} L^{-1}\left[W_0(p, r_{0i})U_1 - W_м(p, r_{мi})U_1\right]_n \frac{\partial L^{-1}\left[W_м(p, r_{мi})U_1\right]_n}{\partial r_{мi}} dt =$$

$$= \frac{2}{T_н}\int_{T_0}^{T_0+T_н} L^{-1}\left[\varepsilon_1(p, \Delta r_i)\right]_n \frac{\partial L^{-1}\left[W_м(p, r_{мi})U_1\right]_n}{\partial r_{мi}} dt, \tag{6.2}$$

$$\text{де } [r_{мi}] = r_{мi}(0) + \sum_{n=1}^{N}\left[\Delta r_{мi}\right]_n, \left[r_{мi}\right] = \lambda_i\left[\frac{\partial I_1}{\partial r_{мi}}\right]_n, (n = 1, 2, ..., N)$$

Отриманий вираз (2.2) являє собою структуру і алгоритм функціонування системи ідентифікації параметричного об'єкту управління для (n +1)-го циклу.

Знімаючи накладені обмеження квазістаціонарності, оцінку якості регульованого процесу НОУ будемо проводити по мінімуму інтеграла від квадратичної помилки ε_2.

$$I_2 = \frac{1}{T_н}\int_{T_0}^{T_н} L^{-1}\left[\varepsilon_2(p, r_{0i}, x_j)\right]^2 dt, \tag{6.3}$$

де ε_2, згідно з рисунку 2, визначається виразом

$$\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j) = F(p) - Y_0(p,r_{0i},x_j). \tag{6.4}$$

Тут

$$Y_0(p,r_{0i},x_j) = W_0(p,r_{0i})U_1(p,r_{0i},x_j). \tag{6.5}$$

Підставляючи значення $Y_0(p,r_{0i},x_j)$ у вираз (2.4) отримаємо:

$$\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j) = F(p) - W_0(p,r_{0i})U_1(p,r_{0i},x_j) \tag{6.6}$$

де

$$U_1(p,r_{0i},x_j) = W_{рег}(p,x_j)\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j). \tag{6.7}$$

Вирішуючи рівняння (2.6) з урахуванням (2.7), маємо:

$$\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j) = F(p) - W_0(p,r_{0i})W_{рег}(p,x_j)\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j). \tag{6.8}$$

Вирішивши рівняння (2.8) щодо сигналу помилки ε_2 (p, r_{0i}, x_j), отримаємо:

$$\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j) = \frac{F(p)}{1+W_0(p,r_{0i})W_{рег}(p,x_j)}, \qquad (6.9)$$

де x_j - вектор параметрів, які налагоджуються регулятором;

F(p) - вхідний вплив.

Зважаючи на те, що на параметричний стан НОУ в кожному n-му циклі може вказати самоналагоджувальна модель, покладемо в рівнянні (2.9)

$$[W_0(p,r_{0i})]_{n-1} \approx [W_м(p,r_{мi})]_n. \qquad (6.10)$$

Тоді вираз для сигналу помилки в кожному (n+1)-му циклі буде мати вигляд:

$$\varepsilon_2(p,r_{0i},x_j) = \frac{F(p)}{1+W_м(p,r_{мi})W_{рег}(p,x_j)} \qquad (6.11)$$

Припускаючи квазістаціонарних об'єкта управління і регулятора на інтервалі nT1≤t≤(n+l) T1 і мінімізуючи інтегральний критерій середньоквадратичної помилки регульованого процесу (2.3) по налагоджувальним параметрам регулятора з урахуванням виразу (2.11), маємо:

$$\left[\frac{\partial I_2}{\partial x_j}\right]_{n+1} = -\frac{2}{T_{\text{í}}}\int L^{-1}\left[\frac{F(p)}{1+W_{\text{ì}}(p,r_{\text{ìi}})W_{\text{ðåã}}(p,x_j)}\right]_n \times L^{-1}\left[\frac{W_{\text{ì}}(p,r_{\text{ìi}})\partial W_{\text{ðåã}}(p,x_j)F(p)}{\left[1+W_{\text{ì}}(p,r_{\text{ìi}})W_{\text{ðåã}}(p,x_j)\right]^2 \partial x_j}\right]_n dt, \qquad (6.12)$$

де $[x_j]_n = x_j(0) + \sum_{n=1}^{N}\left[\Delta x_j\right]_n$, $[x_j]_n = -\lambda_{x_j}\left[\frac{\partial I_2}{\partial x_j}\right]_n$.

Проблемний вираз (2.12) являє собою структуру і алгоритм функціонування системи аналізу стану та прийняття рішення для (n +1)-го циклу.

Аналізуючи вирази (2.2) і (2.12), приходимо до висновку, що права частина цих інтегро-диференціальних рівнянь являє собою математичну модель контурів самобудування системи ідентифікації, системи аналізу стану та прийняття рішення відповідно, а ліва - вектори управління контурів параметрів, що настроюються для n-го і (n +1) -го циклів.

$$[Ur_{Mi}]_n = Ur_{Mi},\ (i = 0,1,2,\ldots,s),$$

$$[Ur_{xj}]_{n+1} = U_{xj},\ (j = 0,1,2,\ldots,l), \qquad (6.13а)$$

$$[Ur_{Mi}]_n = Ur_{M}(0) - \lambda_i \left[\frac{\partial I_1}{\partial r_{Mi}}\right]_n,\ (i = 0,1,2,\ldots,s),$$

$$[Ur_{xj}]_{n+1} = U_{xj}(0) - {}_i\left[\frac{\partial I_2}{\partial x_j}\right]_{n+1},\ (j = 0,1,2,\ldots,l) \qquad (6.13б)$$

Зважаючи на те, що вектори управління контурів параметрів, що настроюються U_{rMi} і U_{rxj} - постійні на інтервалах часу $(n\text{-}1)T_1 \le t \le nT_1$, $nT_1 \le t \le (n+l)T_1, \ldots, [(n+v)\text{-}l]T_1 \le t \le (n+v)T_1$, $(n+v)T_1 \le t \le (n+v) + lT_1$ і впливають на налаштування параметрів моделі системи ідентифікації та системи обробки інформації та прийняття рішення тільки в дискретні моменти часу nT_1, $(n+1)T_1$, $(n+v)T_1$, то взявши суму всіх значень Ur_{Mi}, Ur_{xj} від циклу n до v, отримаємо алгоритм управління контурів самонастроювання системи ідентифікації та системи обробки інформації та прийняття рішення в дискретної формі:

$$[Ur_{M}]_n = Ur_{Mi}(0) + \sum_{n=1}^{v}\left[\frac{\partial I_1}{\partial r_{Mi}}\right]_n,\ (i = 0,1,2,\ldots,s),$$

$$[Ur_{xj}]_{n+1} = U_{xj}(0) + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\partial I_2}{\partial x_j}\right]_{n+1},\ (j = 0,1,2,\ldots,l) \qquad (6.14)$$

Отримані аналітичні вирази (6.2.11), (6.2.12), (6.2.14) дозволяють побудувати адаптивну систему аналізу стану і управління НО (Рисунок 3), з заданими частотними характеристиками. При цьому, як випливає з рисунку 3, адаптивна система аналізу стану і управління НО складається з:

1) системи керування з жорсткою зворотним зв'язком;

2) системи управління з гнучким параметричним зворотним зв'язком.

Система управління з жорстким зворотним зв'язком забезпечує стійкість і необхідну якість регульованого процесу на інтервалах квазістаціонарності.

Система управління з гнучким параметричним зворотним зв'язком забезпечує оптимальність значень параметрів регулятора НОУ на кожному ітеративному кроці.

Структурно система аналізу стану і управління з гнучким параметричним зворотним зв'язком складається з:

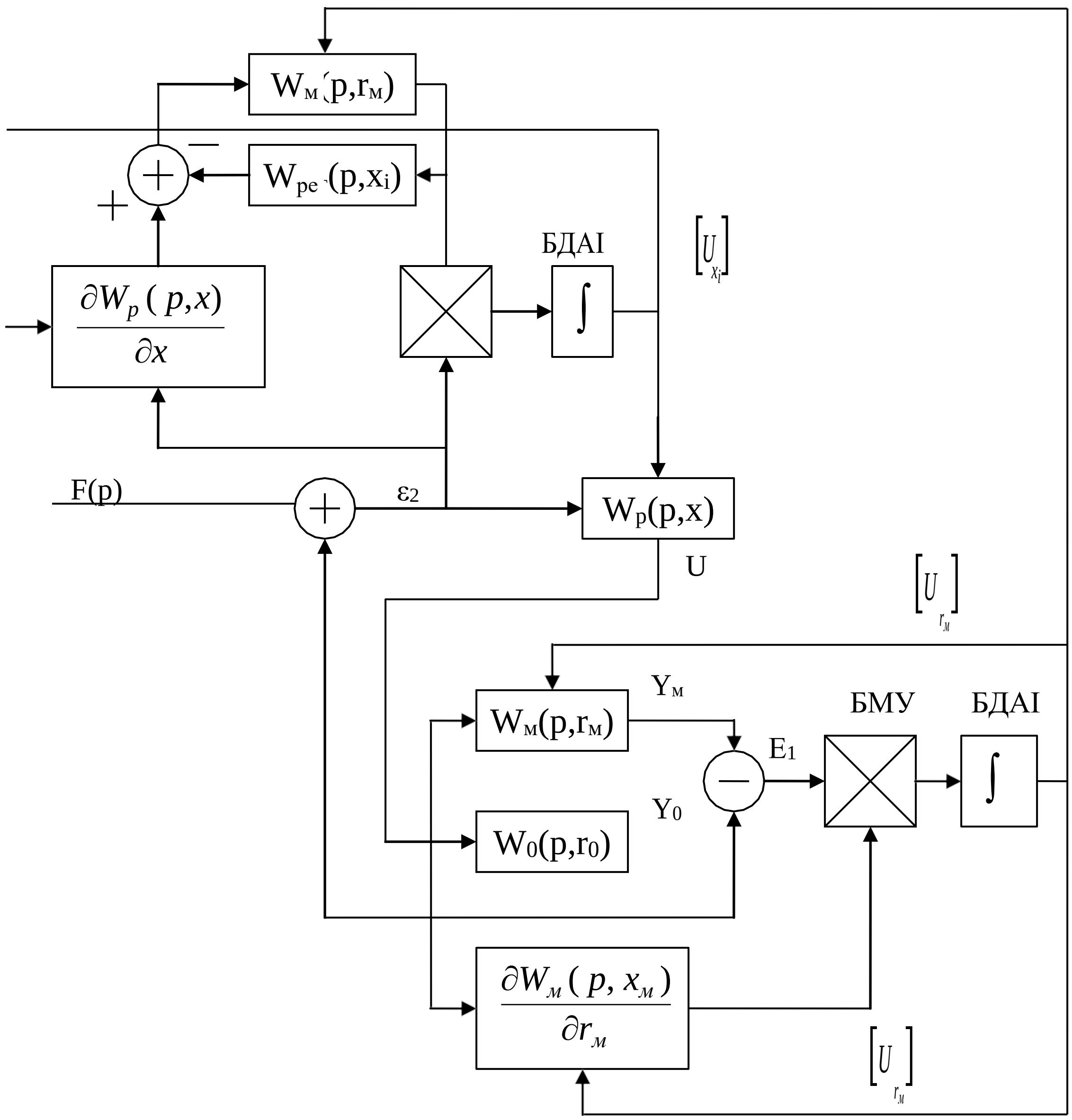

Рисунок 3 – Адаптивная система анализа состояния и управления НО

- параметричної системи ідентифікації;
- системи обробки інформації та прийняття рішення.

Параметрична система ідентифікації виробляє оцінки параметрів ОУ, інформативність якої спільно зі збурюючим впливом F(p) використовується системою обробки інформації та прийняття рішення для знаходження оптимальних значень параметрів регулятора x_j на кожному ітеративному кроці.

На рисунку 4 наведена циклограма, що пояснює ітераційний принцип функціонування адаптивної системи управління НО, з якої випливає, що процес зміни параметрів регулятора відстає від процесу зміни параметрів ОУ на один цикл.

Таким чином, для забезпечення сталого функціонування і необхідної якості регульованого процесу в подібних системах доцільно передбачити прогнозуючі пристрої.

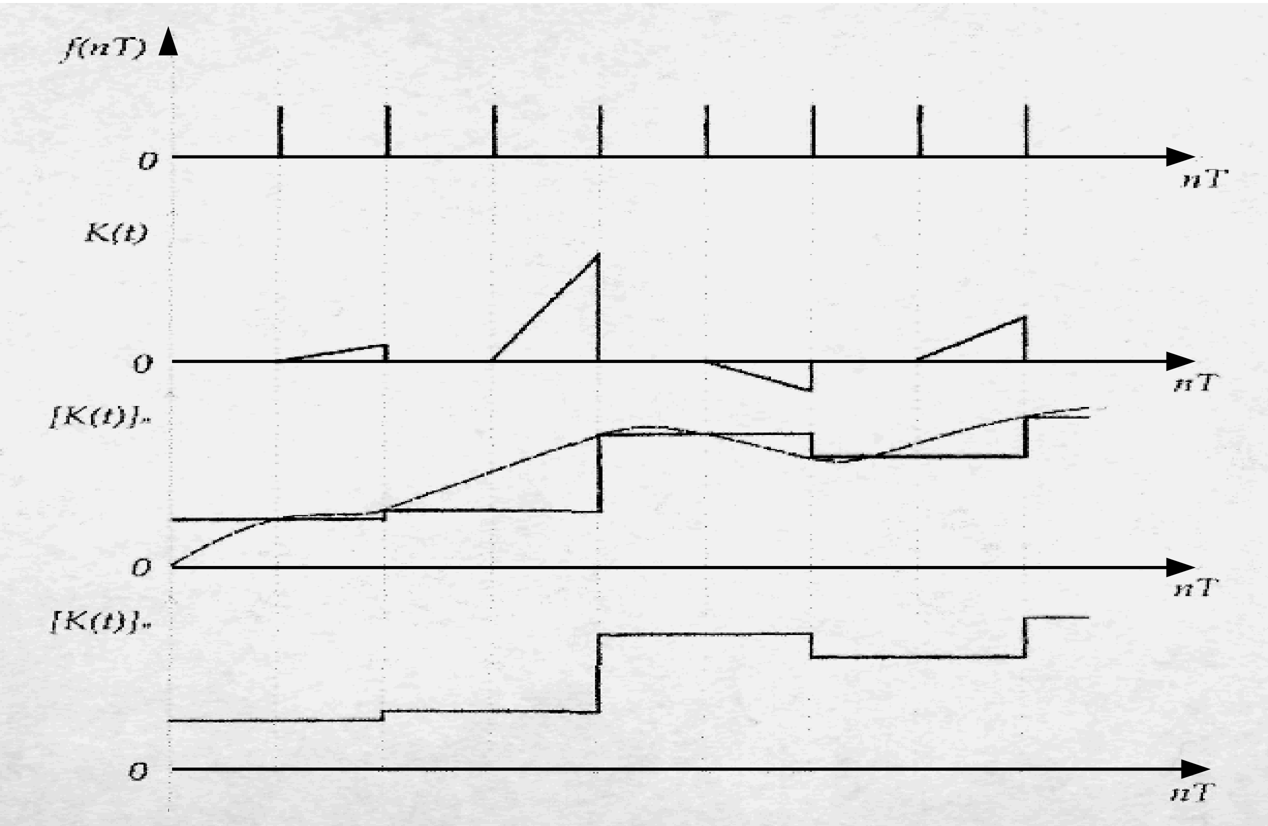

Рисунок 4 - Циклограма ітераційного принципу функціонування адаптивної системи управління НО

Управління лінійними системами при неповних вимірах

В задачах інженерної практики при побудові адаптивних систем оптимального управління зустрічається широкий клас динамічних об'єктів з неповним виміром вектора фазових координат і невідомими динамічними характеристиками. У цих випадках стратегія оптимального управління повинна бути такою, щоб враховувався і аналізувався стан ОУ в параметричному і фазовому просторі, і на основі аналізу вироблялося б таке управління, що дозволяло б керуючому пристрою переводити НО управління з початкового стану X(0) в бажане $X_{ж}$ за кінцевий інтервал часу t_K і зводився б до мінімуму деякий функціонал якості $J(X,U,r)\rightarrow min$ (де X керуючого пристрою - вектор стану ОУ; U - вектор управління; r - вектор параметрів, що настроюється), підпорядкований деяким обмеженням накладеним на управління.

Постановка задачі синтезу

Хай лінійний нестаціонарний динамічний об'єкт управління з неповним вектором виміру фазових координат і невідомими динамічними характеристиками описується системою диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\delta}\delta + m_{\psi}, \\ \ddot{z} &= a_{z\psi}\psi + a'_{z\psi}\dot{\psi} + a_{z\delta}\delta + F_z, \\ \dot{\delta} &= C \cdot signU_0(t-\tau), \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

де $\psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}$ - регульовані фазові координати;

$a_{\psi\delta}\delta, a_{z\delta}\delta$ - управляючі дії;

m_{ψ}, F_z - зовнішні впливи;

$a_{\nu\mu}$ - змінні в часі коефіцієнти, що характеризують нестаціонарність динамічного об'єкта управління.

Потрібно знайти стратегію адаптивної системи оптимального управління, що дозволяє переводити нестаціонарний динамічний об'єкт з початкового стану X(0), де $X(0)= [\psi(0), \dot{\psi}(0), z(0), \dot{z}(0)]$ в $X_{ж}= [\psi_{ж}, \dot{\psi}_{ж}, z_{ж}, \dot{z}_{ж}]$, яка зводить до мінімуму функціонали якості, що визначаються квадратичною формою:

$$I_{\psi_N} = \min_{U_{\psi_k}} \sum_{k=1}^{N} \{ \left[(\Psi_{ж} - \Psi_k)^T Q_\Psi (\Psi_{ж} - \Psi_k) \right] + \lambda_\Psi m_{\Psi_{k-1}}^T B_\Psi m_{\Psi_{k-1}} \},$$
$$I_{z_N} = \min_{U_{z_k}} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[(z_{ж} - z_k)^T Q_z (z_{ж} - z_k) \right] + \lambda_z m_{z_{k-1}}^T B_z m_{z_{k-1}} \right\} \qquad (6.2.2)$$

де $Q_{\Psi,z}, B_{\Psi,z}$ - позитивно певні симетричні матриці;

$\lambda_{\Psi,z}$ - постійний множник, що характеризує постійна коефіцієнт штрафу.

Вибір позитивно визначених матриць $Q_{\Psi,z}, B_{\Psi,z}$ гарантує єдиність і лінійність закону керування на ітеративному кроці, а також асимптотичну стійкість системи управління квазістаціонарним динамічним об'єктом.

Ваговий коефіцієнт штрафу визначається з практичних міркувань так, щоб квадрат керуючого впливу залишався менше деякого обмеження, за межами якого починається нелінійність (насичення),

Вважаючи $Q_{\Psi,z} = I, B_{\Psi,z} = I$ функціонали якості (6.2.3) які мінімізують квадрати відхилень фазових координат ОУ від бажаних, запишуться у вигляді:

$$I_{\psi_N} = \min_{U_{\psi_k}} \sum_{k=1}^{N} \left[\varepsilon_{\Psi_k}^2 + \lambda_\Psi m_{\Psi_{k-1}}^2 \right]$$
$$I_{z_N} = \min_{U_{z_k}} \sum_{k=1}^{N} \left[\varepsilon_{z_k}^2 + \lambda_z m_{z_{k-1}}^2 \right] \qquad (6.2.3)$$

де $\varepsilon_{\Psi k} = \Psi_{ж} - \Psi_k ; \varepsilon_{zk} = z_{ж} - z_k .$

Представлення об'єкта управління схемою в змінних стану

Користуючись методом математичного моделювання, представимо НОУ схемою в змінних станах (рисунок 5).

Аналіз отриманої схеми у змінних станах показує, що нестаціонарний динамічний об'єкт (НДО) управління являє собою тверде тіло, на яке діють зовнішні m_Ψ, F_z, збуджуючі впливи.

Зважаючи на те, що регульовані фазові координати $\psi, \dot{b}, z, \dot{b}$ схильні до управляючих і збуджуючих, в змінні коефіцієнти, що характеризують нестаціонарність динамічного об'єкта управління, - змінюються в силу властивостей аеродинаміки об'єкта, має місце виконання нерівності: $\Delta X >> \Delta a_{\nu\mu}$ на інтервалі $nT_1 \le t \le (n+l)T_1$, $n=l,2,...,N$, де T1 - деякий період дискретності зміни динамічних параметрів об'єкта управління.

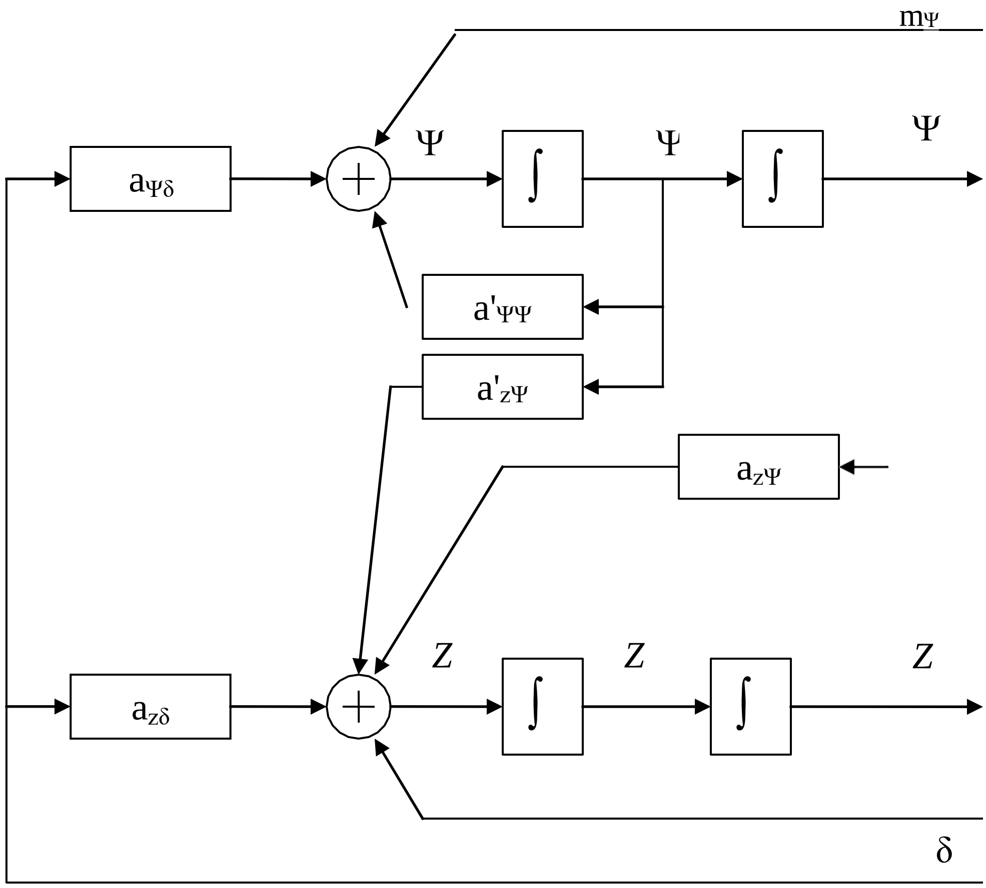

Рисунок 5- Схема нестаціонарного об'єкта управління в змінних стану

Припускаючи квазістаціонарність об'єкта управління на інтервалі, $nT_1 \le t \le (n+l)T_1$, а також користуючись схемою в змінних стану, представимо НДО управління (3.1) в дискретних станах

$$\psi_{k+1} = \psi_k + T\dot{\psi}_k, \qquad (6.2.4)$$
$$\dot{\psi}_{k+1} = \dot{\psi}_k + T\ddot{\psi}_k,$$
$$z_{k+1} = z_k + T\dot{z}_k, \qquad (6.2.5)$$
$$\dot{z}_{k+1} = \dot{z}_k + T\ddot{z}_k,$$

де T - деякий період дискретності зміни фазових координат і управління, обирається з умови;

$$T \ll T_1,\ lT = T_1,\ l = 10 \div 20, \qquad (6.2.6)$$
$$\ddot{\psi}_k = a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + a_{\psi\delta}\delta_k + m_{\psi k}, \qquad (6.2.7)$$
$$\ddot{z}_k = a_{z\psi}\psi_k + a'_{z\psi}\psi_k + a_{z\delta}\delta_k + F_{zk}, \qquad (6.2.8)$$

Тут і далі $к=кТ$, $к4\text{-}1=(к+1)Т$.

Підставляючи значення ψ і z з виразів (6.2.7) а (6.2.8), (6.2.4) та (6.2.5) отримаємо:

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + T\dot{\psi}_k, \\ \dot{\psi}_{k+1} &= \dot{\psi}_k + T_k\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + a_{\psi\delta}\delta_k + m_{\psi k}\right), \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + T\dot{z}_k, \\ \dot{z}_{k+1} &= \dot{z}_k + T_k\left(a_{z\psi}\psi_k + a'_{z\psi}\psi_k + a_{z\delta}\delta_k + F_{zk}\right). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Отримана система рівнянь описує нестаціонарний об'єкт управління в дискретних станах на інтервалі квазістаціонарності $nT_l \leq t \leq (n+l)T_l$. Вирішивши останнє рівняння системи (3.1) щодо δ, в припущенні U = ± 1, маємо:

$$\delta = \begin{cases} ct - c\tau, & t \geq \tau, \quad U = +1, \\ 0, & t \leq \tau, \quad -1 < U < +1, \\ -(ct - c\tau), & t \geq \tau, \quad U = -1, \end{cases} \quad (6.2.11)$$

де с - швидкісна характеристика сервоприводу

Тоді система рекурентних рівнянь (6.2.9), (6.2.10) урахуванням (6.2.11) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + T\dot{\psi}_k, \\ \dot{\psi}_{k+1} &= \dot{\psi}_k + T_k\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + a_{\psi\delta} + \lambda_\Psi m_{Y_{\Psi k}} + m_{\psi k}\right), \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + T\dot{z}_k \\ \dot{z}_{k+1} &= \dot{z}_k + T_k\left(a_{z\psi}\psi_k + a'_{z\psi}\psi_k + \lambda_z m_{Y_{zk}} + F_{zk}\right), \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

де $\lambda_\Psi m_{Y_{\Psi k}} = k_{\Psi\delta}(ct - c\tau)$ - складова моменту управління по каналу кутової стабілізації на k-му циклі;

$\lambda_z m_{Y_{zk}} = k_{z\delta}(ct - c\tau)$ - складова моменту управління по каналу бокової стабілізації центру мас на k-му циклі.

Рішення задачі синтезу

Користуючись теоремою роздільності, стратегію адаптивної системи оптимального управління кожного півканалу Ψ і Z будемо шукати методом динамічного програмування в класі стаціонарних систем. Користуючись дискретним представленням НО керування (6.2.12) (6.2.13) на інтервалі квазістаціонарних $nT_1 \leq t \leq (n+l)T_1$ знайдемо стратегію оптимального управління на інтервалі квазістаціонарності півканалів Ψ, що зводять до мінімуму функціонал якості I.

Тоді система рекурентних рівнянь (3.9), (3.10) з урахуванням (3.11) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + T\dot{\psi}_k, \\ \dot{\psi}_{k+1} &= \dot{\psi}_k + T_k\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + a_{\psi\delta} + \lambda_\Psi m_{Y_{\Psi k}} + m_{\psi k}\right), \end{aligned} \qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + T\dot{z}_k, \\ \dot{z}_{k+1} &= \dot{z}_k + T_k\left(a_{z\psi}\psi_k + a'_{z\psi}\psi_k + \lambda_z m_{Y_{zk}} + F_{zk}\right), \end{aligned} \qquad (3.13)$$

де $\lambda_\Psi m_{Y_{\Psi k}} = k_{\Psi\delta}(ct - c\tau)$ - складова моменту управління по каналу кутової стабілізації на k-му циклі;

$\lambda_z m_{Y_{zk}} = k_{z\delta}(ct - c\tau)$ - складова моменту управління по каналу бокової стабілізації центру мас на k-му циклі.

ня

3.3 Рішення задачі синтезу

Користуючись теоремою роздільності, стратегію адаптивної системи оптимального управління кожного півканалу Ψ і Z будемо шукати методом динамічного програмування в класі стаціонарних систем. Користуючись

$$\min_{m_{y_{\psi 1}}} \sum_{k=1} \left\{ \left[\psi_1^2 + \ {}_{\psi} m^2_{y\Psi 0}\right] + f_{N-1}\left[\psi_1 + T\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_1 + T\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_1 + \lambda_\psi m_{Y_{\psi 1}} + m_{\psi 1}\right)\right]\right\}$$

Якщо припусти

$$f_{N-1}(\psi_1, \psi_1) = \alpha_{N-1}\psi_1^2 + \beta_{N-1}\psi_1\dot{\psi}_1 + \gamma_{N-1}\dot{\psi}_1^2,$$

$$f_{N-1}(\psi_2, \psi_2) = \alpha_{N-1}\psi_2^2 + \beta_{N-1}\psi_2\psi_{2N-} + \gamma \ {}_1\psi_2^2 =$$

$$\alpha_{N-1}(\psi_1 + T\ \psi_1)^2 + \beta^\circ_{N-1}(\psi_1 + T\ \psi_1)\left|\psi_1 + T\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_1 + \lambda_\psi m_{Y_{\psi 1}} + m_{\psi 1}\right)\right] +$$

$$+\gamma_{N-1}\left[\psi_1 + T\left(a'_{\psi\psi}\psi_1 + \lambda_\psi m_{Y_{\psi 1}} + m_{\psi 1}\right)\right]^2,$$

або в загальному випадку

$$f_{N-k}(\psi_{k+1}, \psi_{k+1}) = \alpha_{N-k}\psi_k^2 + \beta_{N-k}\psi_k\psi_k + \gamma_{N-k}\psi_k^2 =$$

$$\alpha_{N-k}(\psi_k + T\dot{\psi}_k)^2 + \beta_{N-k}(\psi_k + T\dot{\psi}_k)\left[\psi_k + T\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + \lambda_\psi m_{Y_{\psi k}} + m_{\psi k}\right)\right] + \quad (6.2.14)$$
$$+\gamma_{N-k}\left[\dot{\psi}_k + T\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + \lambda_\psi m_{Y_{\psi k}} + m_{\psi k}\right)\right]^2.$$

Мінімізуючи функціонал якості з урахуванням виразу (6.2.14) маємо:

$$\frac{\partial\left\{\psi_k^2 + \lambda_\psi m_{Y_{\psi k}}^2 + f_{N-k}(\psi_{k+1}, \dot{\psi}_{k+1})\right\}}{\partial m_{Y_{\psi k}}} = \beta_{N-k}\lambda_\psi T(\psi_k + T\dot{\psi}_k) + \quad (6.2.15)$$
$$+2\gamma_{N-k}\lambda_\psi T\left[\dot{\psi}_k + T\left(a'_{\psi\psi}\dot{\psi}_k + \lambda_\psi m_{Y_{\psi k}} + m_{\psi k}\right)\right] = 0.$$

де, α_{n-k}, β_{N-k}, γ_{N-k}, знаходяться із рекурентних співвідношень:

$$\alpha_{N-k} = 1 + \alpha_{N-1} - \frac{\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-k}};$$
$$\beta_{N-k} = 2T\alpha_{N-1} - \frac{T\beta_{N-1}^2}{2\gamma_{N-k}};$$
$$\gamma_{N-k} = T^2\alpha_{N-1} - \frac{T^2\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-k}}.$$

Так як, $f_1(\psi_1, \dot{\psi}_1) = \psi_1^2$; то $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0, \gamma_1 = 0$; то тоді

$$\begin{array}{lll}
\alpha_2 = 1 & \beta_2 = 2T & \gamma_2 = T^2; \\
\alpha_3 = 1 & \beta_3 = 2T & \gamma_3 = T^2; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_k = 1 & \beta_k = 2T & \gamma_k = T^2; \\
\alpha_{N-k} = 1 & \beta_{N-k} = 2T & \gamma_{N-k} = T^2.
\end{array}$$

Прирівню ючи до нуля вираз (3.15) і виконавши його $m_{Y_{\psi k}}$,, маємо:

$$m_{Y_{\psi k}} = -\frac{\beta_{N-k}\lambda_\psi T}{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi^2 T^2}\psi_k - \frac{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi T^2}{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi^2 T^2}m_{\psi k} - \quad (6.2.16)$$
$$-\left(\frac{\beta_{N-k}\lambda_\psi T^2}{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi^2 T^2} + \frac{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi T}{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi^2 T^2} + \frac{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi T^2 a'_{\psi\psi}}{2\gamma_{N-k}\lambda_\psi^2 T^2}\right)\dot{\psi}_k.$$

Підставляючи значення β_{N-k} і γ_{N-k} у вираз (6.2.16), отримаємо:

$$m_{Y_{\Psi k}} = -\frac{1}{\lambda_\psi T^2}\psi_k - \left(\frac{a'_{\psi\psi}T+2}{\lambda_\psi T}\right)\mathring{\psi}_k - \frac{1}{\lambda_\psi}m_{\psi k}. \qquad (6.2.17)$$

Вираз описує складову моменту управління квазістаціонарного об'єкта по каналу Ψ . Коефіцієнт передачі сервоприводу

$$K_{СП} = \frac{ct - c\tau}{U_\psi - U_z}, \qquad (6.2.18)$$

де $ct - c\tau = \frac{m_{Y_\psi}}{k_{\psi\delta}} - \frac{m_{Y_z}}{k_{z\delta}}$ - кутове відхилення керуючих органів.

Стратегію оптимального управління квазістаціонарним об'єктом по каналу Ψ на інтервалі $nT_1 \le t \le (n+l)T_1$ отримаємо у вигляді:

$$U_{\psi k} = -\frac{1}{\lambda_\psi k_{\psi\delta} K_{СП} T^2}\psi_k - \left(\frac{a'_{\psi\psi}T+2}{\lambda_\psi k_{\psi\delta} K_{СП} T}\right)\psi_k - \frac{1}{\lambda_\psi k_{\psi\delta} K_{СП}}m_{\psi k} \qquad (6.2.19)$$

Аналогічно тому, як це було виконано для каналу Ψ , знайдемо стратегію оптимального управління квазістаціонарним об'єктом по бічному відхиленню, що зводять до мінімуму функціонал якості

$$I_{NZ} = \min_{m_{Y_{zk}}} \sum_{k=1} \left[\varepsilon_{z_k}^2 + m_{Yz_{k-1}}^2\right],$$

де ε_{Zk} = zж-zкт, де ε_{Zk} = zж-zкт,,

$z_ж$ - бажане значення бокового відхилення об'єкту від розрахункової траєкторії, Яке необхідно забезпечити автоматом стабілізації мас;

$z_{тк}$ - поточне значення кутового відхилення об'єкта.

Вважаючи $z_ж=0$, маємо: $\varepsilon_{Zk} = -z_{кт}$

Нехай $f_N(z_1,\dot z_1)=\min\limits_{m_{Y_{zk}}}\sum\limits_{k=1}^{N}\left[z_{k_T}^2+\lambda_z m_{Y_{zk-1}}^2\right]$, тоді $f_1(z_1,\dot z_1)=\min\limits_{m_{Y_{z1}}}\sum\limits_{k=1}^{N}\left[z_{k_T}^2+\lambda_z m_{Y_{z0}}^2\right]$

Користуючись принципом оптимальності, запишемо для N> 1 співвідношення:

$$f_N(z_1,\dot z_1)=\min_{m_{Y_{z1}}}\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[z_1^2+\lambda_z m_{y=0}^2\right]+f_{N-1}\left[z_2,\dot z_2\right]\right\}=$$

$$=\min_{m_{Y_{z1}}}\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[z_1^2+\lambda_z m_{y=0}^2\right]+f_{N-1}\left[z_1+T\dot z_1;\dot z_1+T\left(a_{z\psi}z_1+a'_{z\psi}\dot z_1+\lambda_z m_{Y_{z1}}+F_{z1}\right)\right]\right\}.$$

Якщо припустити, що

$$f_{N-1}(z_1,\dot z_1)=\alpha_{N-1}z_1^2+\beta_{N-1}z_1\dot z_1+\gamma_{N-1}\dot z_1^2,\ \text{тоді}$$

$$f_{N-1}(z_2,\dot z_2)=\alpha_{N-1}z_2^2+\beta_{N-1}z_2\dot z_2+\gamma_{N-1}\dot z_2^2=$$

$$=\alpha_{N-1}(z_1+T\dot z_1)^2+\beta_{N-1}(z_1+T\dot z_1)\left[z_1+T\left(a_{z\psi}z_1+a'_{z\psi}\dot z_1+\lambda_z m_{Y_{z1}}+F_{z1}\right)\right]+$$
$$\gamma_{N-1}\left[\dot z_1+T\left(a_{z\psi}z_1+a'_{z\psi}\dot z_1+\lambda_z m_{Y_{z1}}+F_{z1}\right)\right]^2,$$

або в загальному випадку

$$f_{N-k}(z_{k+1},\dot z_{k+1})=\alpha_{N-k}z_{k+1}^2+\beta_{N-k}z_{k+1}\dot z_{k+1}+\gamma_{N-k}\dot z_{k+1}^2=$$

$$=\alpha_{N-k}(z_k+T\dot z_k)^2+\beta_{N-k}(z_k+T\dot z_k)\left[z_k+T\left(a_{z\psi}z_k+a'_{z\psi}\dot z_k+\lambda_z m_{Y_{zk}}+F_{zk}\right)\right]+$$
$$\gamma_{N-k}\left[\dot z_k+T\left(a_{z\psi}z_k+a'_{z\psi}\dot z_k+\lambda_z m_{Y_{zk}}+F_{zk}\right)\right]^2,$$

Мінімізуючи функціонал якості з урахуванням виразу (3.21), маємо

$$\frac{\partial\left\{z_k^2+\lambda_z m_{Y_{zk}}^2+f_{N-k}(z_{k+1},\dot z_{k+\cdot})\right\}}{\partial m_{Y_{zk}}}=\beta_{n-k}\lambda_z T(z_k+T\dot z_k)+$$
$$+2\gamma_{N-k}\lambda_z T\left[\dot z_k+T\left(a_{z\psi}z_k+a'_{z\psi}\dot z_k+\lambda_z m_{Y_{zk}}+F_{zk}\right)\right]=0, \tag{6.2.22}$$

Прирівнюючи до нуля вираз (3.22) і визначивши його відносно $m_{Y_{zk}}$ з урахуванням значень β_{N-k} і γ_{N-k} маємо:

$$m_{Y_{zk}}=-\frac{a_{z\psi}T^2+1}{\lambda_z T^2}z_k-\left(\frac{a'_{z\psi}T+2}{\lambda_z T}\right)\dot z_k-\frac{1}{\lambda_z}F_{zk}. \tag{6.2.23}$$

Отриманий вираз описує складову моменту управління квазістаціонарним об'єктом по бічному відхиленню.

З огляду на співвідношення (3.18), стратегія оптимального (у сенсі вибраного критерію якості) управління квазістаціонарних об'єктом по бічному відхилення визначається у вигляді:

$$U_{zk} = -\frac{a_{z\psi}T^2+1}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}T^2} z_k - \left(\frac{a'_{z\psi}T+2}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}T}\right) - \frac{1}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}} F_{zk}. \qquad (6.2.24)$$

З урахуванням умови (3.18) стратегія оптимального управління, для даного класу об'єктів в каналі нишпорення визначається алгебраїчною сумою управлінь по кутовому та боковому відхиленню, тобто

$$U_{0k} = U_{\Psi k} + U_{Zk} = \frac{m_{Y_{\psi k}}}{k_{\psi\delta}K_{СП}} + \frac{m_{Y_{zk}}}{k_{\psi\delta}K_{СП}} \qquad (6.2.25)$$

Тоді загальна стратегія оптимального (у сенсі вибраного критерію якості) управління з урахуванням виразів (3.19) і (3.24) визначиться у вигляді:

$$U_{Ok} = -\frac{1}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta}K_{СП}T^2}\psi_k - \frac{a'_{\psi\psi}T+2}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta}K_{СП}T}\psi_k - \frac{a_{z\psi}T^2+1}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}T}Z_k -$$
$$-\frac{a_{z\psi}T+2}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}T}Z_k - \frac{1}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta}K_{СП}}m_{\psi k} - \frac{1}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}}F_{zk} \qquad (6.2.26)$$

Отриманий вираз описує алгоритм оптимального управління квазістаціонарних об'єктом на інтервалі $nT_1 \le t \le (n+l)T_1$, параметри якого

$$K_\psi = \frac{1}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta}K_{СП}T^2}$$
$$K'_\psi = \frac{a'_{\psi\psi}T+2}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta}K_{СП}T} \qquad (6.2.27)$$
$$K_z = \frac{a_{z\psi}T^2+1}{\lambda_z k_{z\delta}K_{СП}T}$$

$$K'_z = \frac{a_{z\psi}T + 2}{\lambda_z k_{z\delta} K_{СП} T}$$

$$K_m = \frac{1}{\lambda_\Psi k_{\Psi\delta} K_{СП}}$$

$$K_F = \frac{1}{\lambda_z k_{z\delta} K_{СП}}$$

підлягають налаштуванню після кожної ітерації функціонування системи.

Аналіз отриманого виразу показує, що алгоритм оптимального управління

$$U_{Ok} = -\left[K_\psi \psi_k + K'_\psi \psi_k + K_z z_k + K'_z z_k + K_m m_{\psi k} + K_F F_{Zk}\right] \qquad (6.2.28)$$

описується лінійним нестаціонарним диференціальних рівнянням в рекурентних формі щодо вимірюваних $\psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}$ фазових координат, а також збурюючих впливів m_ψ, F_z, які можуть бути оцінені за допомогою системи фазової ідентифікації.

У цифровій системі знайдений алгоритм оптимального управління реалізується за допомогою ЕОМ, яка на ітеративному кроці генерує керуючу послідовність, оптимальну в сенсі заданого критерію якості J, на вибраному інтервалі квазістаціонарності $nT_1 \le t \le (n+l)T_1$.

Для забезпечення оптимальної керуючої послідовності, за межами інтервалу квазістаціонарності, необхідно після закінчення часу ітерації перебудовувати параметри регулятора з урахуванням зміни параметрів об'єкта управління, таким чином, щоб забезпечувалися стійкість і якість регульованого процесу. Іншими словами необхідно, щоб на кожній наступній ітерації функціонали якості

$$I_{\Psi_N} = \min_{m_{Y_{\psi k}}} \sum_{k=1}^{N} \left[\psi_k^2 + \lambda_\Psi m_{Y_k}^2\right],$$

$$I_{z_N} = \min_{m_{Y_{zk}}} \sum_{k=1} \left[\, z_k^2 + \lambda_z m_{Y_k}^2\right],$$

прагнули до min, що забезпечує асимптотичну стійкість за Ляпуновим при належній зміні коефіцієнтів (параметрів) регулятора.

Користуючись отриманими алгоритмом оптимального управління квазістаціонарним об'єктом (3.26), математичною моделлю об'єкта керування

(3.1), алгоритмами оцінки параметричного і фазового стану, а також методом побудови системи аналізу станів нестаціонарного об'єкта управління, викладених у цій роботі, побудуємо адаптивну систему оптимального управління (рисунок 6), що забезпечує стійке функціонування та необхідну якість управління реальним НДО.