ЛЕКЦІЯ 9 МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ОБЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Варіаційне обчислення - це розділ математики, у якому вирішуються задачі визначення найбільших і найменших значень функціоналів, а також знаходження функцій, на яких досягається екстремальне значення функціонала.

1. 1.1. Основні поняття варіаційного обчислення

При виведенні умов існування екстремума функціонала розглядають прирости функціонала при малих відхиленнях його аргументу.

Приростом або варіацією аргументу $x(t)$ функціонала $I[x(t)]$ називають *різниця між двома функціями* $x(t)$ й $x_1(t)$, що проходять через дві задані точки $t_н$ й $t_к$ (рис. 1.1).

$$\delta x = x(t) - x_1(t),\ \delta x(t_н) = \delta x(t_к) = 0 \tag{9.1}$$

Операція переходу від будь-якої кривої до сусідньої близької, називається *варійованою*.

Нехай варіація δx має вигляд

$$\delta x = h \cdot \eta(t),$$

де $\eta(t)$ - довільна функція, що задовольняє умові

$$\eta(t_н) = \eta(t_к) = 0;$$

h - деяка дійсна змінна.

Залежно від виду функції $\eta(t)$ близькі криві $x(t)$ й $x_1(t)$ можуть бути близькими по ординаті, але сильно відрізнятися по похідній.

Дві криві $x(t)$ і $x_1(t)$ вважаються близькими у сенсі близькості нульового порядку, якщо $|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$ (рис. 9.1,а).

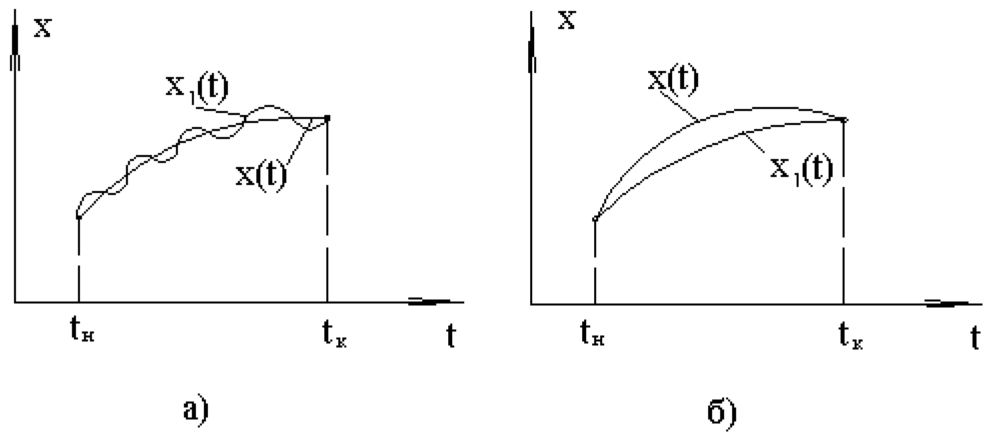

Рис 9.1.

Якщо $|x_1(t)-x(t)|<\varepsilon_0,\ \varepsilon_0>0$, а $|\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)|<\varepsilon_1,\ \varepsilon_1>0$, то $x_1(t)$ й $x(t)$ близькі у сенсі близькості першого порядку (рис. 3.2,б).

Варіація, що призводить до переходу на близьку криву першого або більш високого порядку близькості, зветься *слабкою*.

Варіація, що призводить до переходу на близьку криву нульового порядку близькості, називається *сильною*.

1. 1.1.1. Диференціал функціонала

Розглянемо функціонал $I[x(t),\ \dot{x}(t)]=\int\limits_{t_н}^{t_к} f_0(x,\dot{x})\,dt$

Проваріюємо функції $x(t)$ й $\dot{x}(t)$, тобто перейдемо до близьких кривих $x(t)+\delta x(t),\ \dot{x}(t)+\delta\,\dot{x}(t)$. Визначимо приріст функціонала, розклавши його в ряд Тейлора

$$\Delta I=\int\limits_{t_н}^{t_к}\frac{\partial f_0}{\partial x}\delta x\,dt+\int\limits_{t_н}^{t_к}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\delta\,\dot{x}\,dt+\int\limits_{t_н}^{t_к}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}\cdot\frac{(\delta x)^2}{2}dt+\int\limits_{t_н}^{t_к}\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2}\cdot\frac{(\delta\,\dot{x})^2}{2}dt+...=\delta I+\delta^2 I+...\quad(9.2)$$

Головна лінійна частина приросту називається першою варіацією або диференціалом функціонала. У функціональному аналізі δI зветься *диференціалом Фреше* або *сильним диференціалом.*

Слабкий диференціал або *диференціал Гато* визначається як ліміт

$$DI=\lim_{n\to 0}\frac{I(x_0+h\eta(t)_0\ \dot{x}_0+h\dot{\eta}(t))-I(x_0,\ \dot{x}_0)}{h}$$

Якщо функціонал у розглянутій точці має сильний диференціал, то він має й слабкий, причому, ці диференціали збігаються.

Квадратичний щодо аргументу функціонал $\delta^2 I$ у виразі (9.2) називається другим диференціалом або другою варіацією.

2. 1.1.2. Види екстремумів функціоналів

Функціонал $I[x(t)]$ досягає локального або відносного екстремума на кривій $x_0(t)$, якщо $I[x(t)]-I[x_0(t)]$ зберігає знак в околиці $x_{опт}(t)$.

Якщо нерівність $I[x_0(t)]\geq I[x(t)]$ або $I[x_0(t)]\leq I[x(t)]$ має місце для всіх кривих $x(t)$, що належать області визначення функціонала, то на кривій $x_0(t)$ досягається абсолютний максимум або мінімум (при наявності декількох екстремумів найбільший (найменший) буде абсолютним).

Відносний екстремум при допущенні слабкої варіації функції називають *слабким*, а при допущенні сильної варіації називається *сильним екстремумом*.

1.1.3. Необхідні й достатні умови екстремума функціонала

Необхідна умова екстремума визначається наступною теоремою.

Нехай функціонал $I(x)$ диференціюємий в області G та на кривій $x_0(t)$ досягає локального екстремума. Тоді перша варіація функціонала дорівнює нулю, тобто $\delta I(x_0,\, h) \equiv 0$.

Будемо вважати, що на кривій $x_0(t)$ досягається мінімум функціонала $I(x)$. Проваріюємо криву $x_0(t)$,тоді функціонал одержить приріст, який можна визначити в такий спосіб

$$\Delta I(h) = I[x_0(t) + h\eta(t), \dot{x}_0(t) + h\dot{\eta}(t)] - I[x_0(t),\, \dot{x}_0(t)].$$

Розкладемо $\Delta I(h)$ в степеневий ряд по h поблизу точки $h = 0$.

$$\Delta I(h) = \frac{\partial I}{\partial h}\Big|_{n=0} \cdot h + \frac{\partial^2 I}{\partial h^2}\Big|_{n=0} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots$$

Відповідно до визначення

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial h}\Big|_{n=0} \cdot h \qquad (9.3)$$

Нехай функція $x_0(t)$ доставляє екстремум функціоналу. Знайдемо необхідну умову екстремума.

При заданих $x_0(t)$ і $\eta(t)$ функціонал $I(h)$ залежить тільки від параметра h. Необхідна умова існування екстремума - рівність нулю першої похідної по h. Тоді

$$\dot{I}(h) = \frac{\partial I(h)}{\partial h}\Big|_{n=0} = 0$$

Разом з похідною по h обертається в нуль і перша варіація (1.3), тому що в (1.3) $h \neq 0$.

Друга необхідна умова екстремума зв'язана із другою варіацією функціонала.

Для того, щоб двічі диференціюємий в області G функціонал $I(x)$ досягав на кривій локального мінімуму необхідно, щоб для будь-якого припустимого приросту виконувалася умова

$$\delta^2 I(x_0(t),\, h) \geq 0 \qquad (9.4)$$

Через те, що на кривій $x_0(t)$ перша варіація $\delta I(x_0,\, h)$ дорівнює нулю, можна записати

$$\Delta I(x_0,\, h) = \frac{1}{2}\delta^2 I(x_0,\, h) + \ldots \qquad (9.5)$$

Знак $\Delta I(x_0,\, h)$ при досить малому h збігається зі знаком $\delta^2 I(x_0(t),\, h)$.

Припустимо, що твердження (1.4) не вірно й при деякому h справедливо $\delta^2 I(x_0,\, h_0) < 0$. Але тоді $\Delta I(x_0,\, h_0) < 0$ та не виконується умова існування мінімуму. Отже, наше припущення не вірно, а умова (9.4) справедливо.

Сформулюємо тепер достатні умови існування локального екстремума.

Нехай $I(x)$ двічі диференціюєма в області G й виконуються умови

$$\begin{aligned}&\delta I(x_0,\ h)\equiv 0,\\ &\delta^2 I(x_0(t),\ h)\geq k\left\|h^2\right\|,\end{aligned} \qquad (9.6)$$

де $k>0$, тобто друга варіація сильно додатна, тоді функціонал $I(x)$ досягає на кривій $x_0(t)$ мінімуму.

2. *1.2. Найпростіша задача варіаційного обчислення*

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного обчислення й визначимо для неї необхідні умови оптимальності. Нехай заданий функціонал

$$I=\int_{t_н}^{t_к} f_0(x,\ \dot{x},\ t)dt,\ \ x(t)\in V_x \qquad (9.7)$$

де V_x - відкрита область;

$f_0(x,\ \dot{x},\ t)$ - відома однозначна функція аргументів $x,\ t$.

і $\dot{x}$, безперервна та має безперервні часткові похідні до другого порядку включно;

$x(t)$ - безперервна, двічі диференціюєма функція, що задовольняє умовам $x(t_н)=x_н;\ x(t_к)=x_к$.

Визначити $I\rightarrow \min\limits_{x(t)\in V_x}$.

3. *1.3. Рівняння Ейлера*

Розглянемо функціонал

$$I=\int_{t_н}^{t_к} f_0(x,\ \dot{x})dt \qquad (9.8)$$

Умовою існування екстремума функціонала є

$$\delta I=0.$$

Тоді можна записати

$$\delta I=\int_{t_н}^{t_к}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta\dot{x}\right)dt=0 \qquad (9.9)$$

Проінтегруємо за частинами другий член підінтегрального виразу

$$\int_{t_н}^{t_к}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta\dot{x}\,dt=\delta x\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_н}^{t_к}-\int_{t_н}^{t_к}\delta x\cdot\frac{d\partial f_0}{dt\partial \dot{x}}dt \qquad (9.10)$$

Беручи до уваги співвідношення (1.1) і (1.10) одержимо

$$\delta I = \int_{t_н}^{t_к} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} \cdot \delta x - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \delta x\right) dt = 0 \qquad (9.11)$$

Тому що δx є довільною варіацією, тому $\delta x \neq 0$, тоді

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} \cdot \delta x - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \qquad (9.12)$$

Вираз (9.12) називають *рівнянням Ейлера*.

Його рішення визначає функцію, що доставляє мінімум розглянутому інтегралу за умови, що мінімум існує.

Рішення цього рівняння називаються *екстремалями* й містять дві постійні інтегрування c_1 й c_2. Із цих екстремалей треба вибрати одну, що задовольняє граничним умовам проходження кривої через дві задані точки. Цей вибір і визначає c_1 й c_2.

Рівняння Ейлера - перша необхідна умова екстремума функціонала.

Друга необхідна умова екстремума в найпростішій задачі варіаційного обчислення визначається за допомогою другої варіації функціонала, вона сформульована у вигляді *теореми Лежандра*.

Для того, щоб функціонал (1.8) у задачі із закріпленими границями досягав на кривій $x(t)$ мінімуму, необхідно, щоб уздовж цієї кривої виконувалася умова

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial \dot{x}} \geq 0 \qquad (9.13)$$

Ця умова називається *умовою Лежандра*.

Однак виконання умов (9.12) і (9.13) не дає впевненості, що екстремум існує, і варто знаходити достатні умови. Дослідження цих умов є складним, тому на практиці найчастіше обмежуються чисельною перевіркою значення функціонала біля знайденої екстремалі.

4. 1.4. Рівняння Ейлера-Пуассона

На практиці зустрічаються функціонали, у які можуть входити похідні вищих порядків

$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}, t) dt,$$

де $f_0(...)$ - безперервна функція, диференціюєма $n+2$ рази по всіх аргументах.

Необхідну умову існування екстремума такого функціонала у варіаційній задачі із закріпленими границями визначає рівняння Ейлера-Пуассона

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}}\right) + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x^{(n)}}\right) = 0 \qquad (9.14)$$

Це диференціальне рівняння порядку $2n$, інтегрування якого дає рівняння екстремалі.

Як припустимі траєкторії $x(t)$ повинні виступати функції, диференціюємі $2n$ рази.

5. 1.5. Умови трансверсальності

Загальний інтеграл рівняння Ейлера може бути записаний у вигляді

$$f(x,\, t,\, c_1,\, c_2) = 0 \tag{9.15}$$

де c_1, c_2 - постійні інтегрування.

Якщо граничні умови відомі, то постійні величини c_1, c_2 можуть бути визначені із системи рівнянь

$$\begin{gathered} f(x_н,\, t_н,\, c_1,\, c_2) = 0, \\ f(x_к,\, t_к,\, c_1,\, c_2) = 0. \end{gathered} \tag{9.16}$$

Існують задачі, у яких граничні точки невідомі, а граничні умови задані у вигляді рівнянь

$$\begin{gathered} G^{(н)}(x,\, t) = 0, \\ G^{(к)}(x,\, t) = 0, \end{gathered} \tag{9.17}$$

тобто, граничні точки повинні належати якійсь кривій або поверхні.

Такі задачі належать до класу варіаційних задач *із рухливими границями*.

Крім постійних інтегрування в цих задачах необхідно також визначати $x_н,\, x_к,\, t_н,\, t_к$.

З урахуванням (9.16) і (9.17) можна записати чотири співвідношення

$$\begin{gathered} f(x_н,\, t_н,\, c_1,\, c_2) = 0,\ G^{(н)}(x_н,\, t_н) = 0, \\ f(x_к,\, t_к,\, c_1,\, c_2) = 0,\ G^{(к)}(x_к,\, t_к) = 0. \end{gathered} \tag{9.18}$$

Визначенню же підлягають шість значень. Тому треба мати ще два співвідношення.

Для виводу цих співвідношень розглянемо формулу повної варіації функціонала, що викликана варіацією функції $x(t)$ й кінців траєкторії.

Нехай $\tilde{x} = x + \delta x;\ \dot{\tilde{x}} = \dot{x} + \delta\dot{x};\ \tilde{t}_н = t_н + \delta t_н,\ \tilde{t}_к = t_к + \delta t_к.$

Приріст функціонала представимо в наступному виді:

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_н+\delta t_н}^{t_к+\delta t_к} f_0(x+\delta x,\, \dot{x}+\delta\dot{x},\, t)dt - \int_{t_н}^{t_к} f_0(x,\, \dot{x},\, t)dt = \\ &= \int_{t_н}^{t_к} [f_0(x+\delta x,\, \dot{x}+\delta\dot{x},\, t) - f_0(x,\, \dot{x},\, t)]dt + \int_{t_н+\delta t_н}^{t_к+\delta t_к} f_0(x+\delta x,\, \dot{x}+\delta\dot{x},\, t)dt - \int_{t_н}^{t_н+\delta t_н} \tilde{f}_0\, dt = \\ &= \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Застосувавши формулу Тейлора до підінтегральної функції в ΔI_1, виділимо головну лінійну частину функціонала й про інтегруємо за частинами.

Тоді одержимо:

$$\Delta I_1 = \int_{t_н}^{t_к} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot\delta x - \frac{d\partial f_0}{dt\partial \dot{x}}\cdot\delta x\right)dt + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta x\,\Big|_{t_н}^{t_к} \qquad (9.20)$$

На малому інтервалі інтегрування $\delta t_н$, $\delta t_к$ справедлива теорема про середнє. Тоді

$$\Delta I_3 = \int_{t_н}^{t_н+\delta t_н} \tilde{f}_0\,dt = \int_{t_н}^{t_н+\delta t_н} \left(f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta \dot{x}\right)dt = f_0\delta t_н \qquad (9.21)$$

Перша варіація функціонала прийме вид

$$\delta I = \int_{t_н}^{t_к} \delta x\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d\partial f_0}{dt\partial \dot{x}}\right)dt + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta x\,\Big|_{t_н}^{t_к} + f_0\delta t_к\Big|_{t=t_к} - f_0\delta t_н\Big|_{t=t_н} \qquad (9.22)$$

З точністю до малих більш високого порядку малості можна записати

$$\delta x(t_н) = \delta x_н - \dot{x}(t_н)\delta t_н;$$

$$\delta x(t_к) = \delta x_к - \dot{x}(t_к)\delta t_к.$$

Тоді перша варіація функціонала при довільному переміщенні кінців кривої $x(t)$ буде мати вигляд

$$\delta I = \int_{t_н}^{t_к} \delta x\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d\partial f_0}{dt\partial \dot{x}}\right)dt + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\cdot\delta x_к + \left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\delta t_к\Big|_{t=t_к} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\delta x_н\Big|_{t=t_н} - \left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\delta t_н\Big|_{t=t_н}. \qquad (9.23)$$

З виразу (9.23) як окремий випадок можна одержати вираз (9.12) для першої варіації функціонала в задачі із закріпленими границями.

Для цього треба взяти в (9.23)

$$\delta t_н = \delta t_к = \delta x_н = \delta x_к = 0.$$

Розглянемо варіацію траєкторії $x(t)$, що представлена на рис. 1.2.

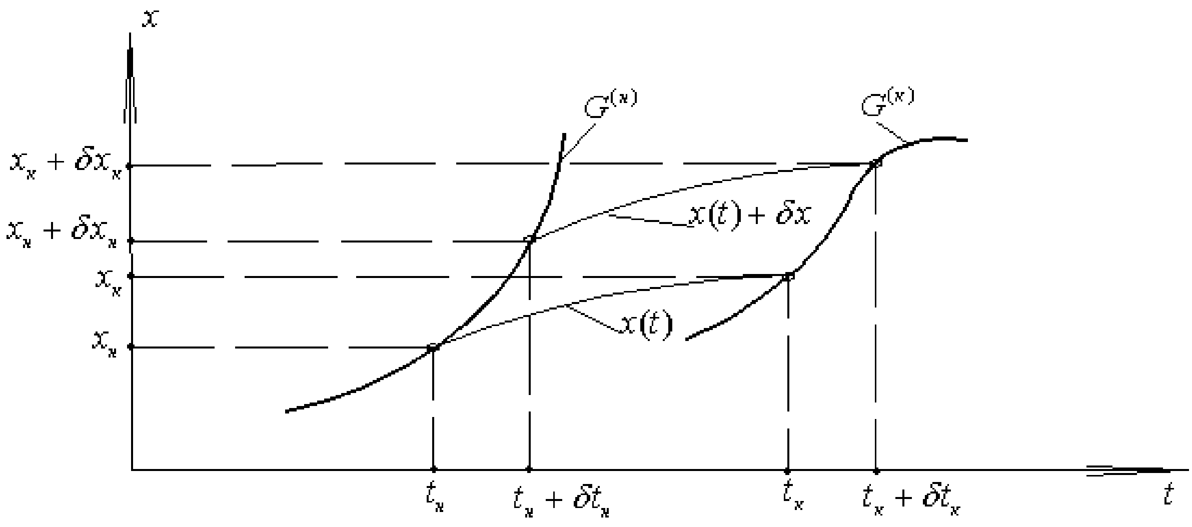

Рис. 1.2.

Тому що $x(t)$ доставляє екстремум функціоналу, справедливе рівняння Ейлера. Згідно рис. 1.2. запишемо

$$\delta x_н = (G^{(н)})'\delta t_н,\quad \delta x_к = (G^{(к)})'\delta t_к. \qquad (9.24)$$

Тоді δI приймає вид

$$\delta I = (\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot (G^{(\kappa)})' + f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x})\delta t_\kappa \Big|_{t=t_\kappa} - (\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot (G^{(н)})' + f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x})\delta t_н \Big|_{t=t_н}.$$

Через те, що $\delta I = 0$, а $\delta t_н$ й δt_κ - довільні з рівності (1.24) запишемо

$$f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot ((G^{(\kappa)})' - \dot{x})_{t=t_\kappa} = 0,$$
$$f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} \cdot ((G^{(н)})' - \dot{x})_{t=t_н} = 0. \tag{9.25}$$

Ця рівність зветься *умовою трансверсальності*.

Воно встановлює зв'язок між кутовими коефіцієнтами дотичних до екстремалі $x(t)$ й кривих $G^н$ і G^κ.

Умови трансверсальності, записані для обох кінців екстремалі, дають відсутні два співвідношення, які разом з (9.18) дозволяють визначити невідомі $c_1,\ c_2,\ t^н,\ t^\kappa,\ x^н,\ x^\kappa$.

6. 1.6. Функціонали, що залежать від декількох функцій

Зустрічаються функціонали, що залежать від декількох функцій і їхніх перших похідних

$$I = \int_{t_н}^{t_\kappa} f_0(x_1,\ x_2, \ldots\ x_н,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2, \ldots\ \dot{x}_н,\ t)\,dt. \tag{9.26}$$

Варіюючи по черзі кожну функцію при фіксованих інших, одержуємо систему рівнянь Ейлера

$$f_{0x_i} - f_{0\dot{x}_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \tag{9.27}$$

де f_{0x_i}, $f_{0\dot{x}_i}$ - частинні похідні функції f_0 по x_i й $\dot{x}_i$.

Вирішуючи цю систему, визначаємо функції $x_i(t)$, що доставляють екстремум функціоналу (9.26).

Вид екстремума визначається необхідними умовами Лежандра, які при $n = 2$ мають вигляд

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1} \ge 0; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_2^{\,2}} \end{vmatrix} \ge 0 \tag{9.28}$$

У тому випадку, коли оптимізуємий функціонал залежить також від похідних вищих порядків при $n > 1$, необхідні умови існування екстремума функціонала визначає система рівнянь Ейлера-Пуассона.

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \ddot{x}_i}) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\frac{\partial^n f_0}{\partial x_i^{(n)}}) = 0\,.$$