НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Навчально-науковий інститут економіки та менеджменту
Кафедра економічної кібернетики

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
навчальної дисципліни
«Оптимізаційні методи та моделі»
для економчних спеціальностей усіх форм навчаня

Укладачі:
к.е.н. Подскребко О. С. доц. НАУ, Крисак Я. В., к.е.н, Квашук Д. М.
Конспект лекцій розглянутий та схвалений на засіданні кафедри економічної кібернетики
Протокол № ____ від «___»_____2019_р.
Завідувач кафедри_____ Н. О. Іванченко

Зміст

МОДУЛЬ 1

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ, ОСОБЛИВОСТІ ТА СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ТА МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ.

1.1. Предмет,завдання та методологічні засади курсу. Задачі економічного вибору.

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. Ці проблеми вивчає наука, яку називають ***теорією дослідження операцій***. Вона охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних: від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану. ***Математичне програмування*** — один з головних інструментів теорії дослідження операцій — полягає в розробленні методів розв'язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв'язку.

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 1.1).

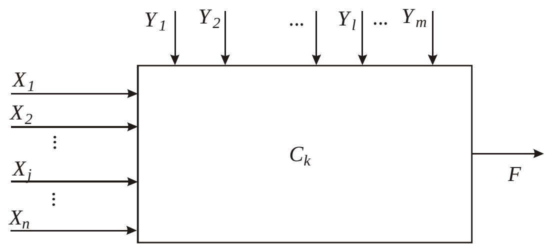


Рис. 1.1. Схема виробонично-економічної системи

Параметри C_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про сільськогосподарську економічну систему, то значення C_k характеризують наявність ресурсів (земельних угідь, живої праці, сільськогосподарської техніки, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур і продуктивності свійських тварин, норми витрат ресурсів, ціну та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Параметри C_k для певної системи можуть бути сталими, наприклад норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів і т. ін., або їх значення залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції , реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, які бувають незалежними чи залежними, дискретними або неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є обсяг чистого прибутку, незалежною — кількість кормів, які планується згодувати великій рогатій худобі, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою — кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Незалежні змінні бувають двох видів: керовані $X_j \, (j = 1, 2, \ldots, n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; некеровані змінні $Y_i \, (i = 1, 2, \ldots, m)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, площі посіву зернових культур — керовані, а погодні умови — некеровані змінні. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

1.2. Сутність звичайної оптимізації. Постановка оптимзаційних задач. Вібір критерію оптимізації.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай *F* — обрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною *F*, якою вимірюється ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами системи:

$$F = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_n; \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l). \qquad (1.1)$$

Функцію *F* називають ***цільовою функцією***, або ***функцією мети***. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення *F* відбиває ступінь досягнення певної мети.

Задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних X_j щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Отже, потрібно відшукати значення

$$F^* = \max(\min) f\,(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l). \qquad (1.2)$$

Можливості вибору *Xj* завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи і т. ін.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду

$$q_r\,(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l)\{\le, =, \ge\}\,0 \qquad (1.3)$$
$$(r = 1, 2, \ldots, S)$$

Тут набір символів $\{\le, =, \ge\}$ означає, що для деяких значень поточного індексу r виконуються нерівності типу ≤, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу ≥.

Система (1.3) називається ***системою обмежень***, або ***системою умов*** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні X_j мають бути невід'ємними:

$$X_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.4)$$

Вирази (1.2)—(1.4) є ***економіка-математичною моделлю*** цієї економічної системи. Розробляючи таку модель, слід керуватися певними правилами:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів X_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях по змозі слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3) має єдиний розв'язок, то не існує задачі вибору оптимального плану.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають ***допустимим планом,*** **або** ***планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, програмою дій***. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета «математичне програмування». Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів.*

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план ***є розв'язком задачі математичного програмування*** (1.2)—(1.4).

Зауважимо, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виробленої продукції у вартісному виразі чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Некоректним є вираз «максимум товарної продукції за і мінімальної її собівартості». Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багато критеріальної оптимізації.

Перш ніж розглядати методи оптимізації, ознайомимося з класифікацією задач математичного програмування.

1.3. Найпростіша класифікація задач математичного програмування

Будь-яка класифікація передбачає вибір критерію, згідно з яким вона здійснюється. Оскільки математичне програмування передусім є строгою математичною дисципліною, то критеріями класифікації мають бути в основному математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування. Зауважимо, що одна й та сама задача з погляду різних математичних критеріїв може належати до кількох класів. Адже кожний критерій підкреслює лише одну властивість задачі на противагу деякій іншій, тобто поділяє всі задачі на два класи (чи підкласи всередині певного класу).

Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи ***лінійні*** та ***нелінійні.*** Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними функціями, тобто вони містять змінні J^ у першому або нульовому степені. В усіх інших випадках задача буде нелінійною. Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом.*** Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких класів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язування, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, а тому доводиться будувати нелінійні та стохастичні моделі. Розв'язувати нелінійні задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу розв'язування таких задач. Для окремих типів нелінійних задач розроблено численні спеціальні ефективні методи розв'язування. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) лінійними. Такий підхід на практиці є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні виокремлюють такі класи: ***опукле програмування.*** Для задач опуклого програмування існує низка добре обґрунтованих та ефективних методів їх розв'язування. Зазначимо, що задачі лінійного програмування є частковим випадком задач опуклого програмування.

Наголосимо, що коли область допустимих планів є опуклою множиною, а цільова функція є опуклою функцією, то задача математичного програмування має глобальний, єдиний екстремум (якщо такий існує).

Множина *S* в n-мірному евклідовому просторі називається **опуклою множиною**, якщо для будь-яких точок (елементів) цієї множини $X^{(1)}, X^{(2)} \in S$ точки $X = \mu X^{(1)} + (1-\mu) X^{(2)}$ належать множині *S* за всіх значень μ, які належать відрізку $0 \le \mu \le 1.$.

Геометричне це означає, якщо $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ належать до множини 5, то відрізок прямої, що з'єднує ці дві точки, також цілком належить до множини *S*.

Функція *f{X),* визначена на опуклій множині лінійного простору (на опуклій множині S), називається опуклою, якщо виконується нерівність

$$f\left(\mu X^{(1)} + (1-\mu) X^{(2)}\right) \le \mu f\left(X^{(1)}\right) + (1-\mu) f\left(X^{(2)}\right)$$

для всіх ц, які належать відрізку $0 \le \mu \le 1$.

Квадратичне програмування — цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Далі задачі математичного програмування поділяють на ***дискретні*** і

неперервні. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

Задачі математичного програмування поділяються також на ***детерміновані*** і ***стохастичні***. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням α і дисперсією σ, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У противному разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням.***

Економічні процеси розвиваються в часі, а тому відповідні моделі мають відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального плану потрібно застосовувати класи задач математичного програмування ***статичні*** (однокрокові) і ***динамічні*** (багатокрокові). Поняття динамічності зрозуміле, воно пов'язане з часом. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку України до 2005 року, мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2005 рік, а й на всі проміжні роки, тобто враховано динаміку розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (раціональна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників реальні показники щороку можуть відхилятися від планових. Тому постає потреба коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними***. Вони визначаються в результаті реалізації статичної економіко-математичної моделі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. ***Багатокроковість*** як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, їх багатовимірністю. Сутність цього методу полягає в тому, що оптимальні значення розглядуваної множини змінних знаходять крок за кроком, послідовно застосовуючи індукцію, причому рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності щодо рішення, прийнятого на попередньому кроці. Така процедура може бути і не бути пов'язаною з часом. ***Однокрокові*** задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ***ітерації*** (кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто якимось чином задаємо допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій дістаємо оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не інтерпретується як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язувати як одно крокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, аби не застосовувати для знаходження оптимального плану складніших методів. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

Щойно було розглянуто лише найбільші класи задач математичного програмування, які визначені згідно з математичними критеріями. Можна також за різними ознаками виокремити й підкласи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий клас розглядають ***дробово-лінійне програмування***, коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий клас становлять задачі ***теорії ігор,*** які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають цілі, що не збігаються, або протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підкласи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

Наведену класифікацію використано для структурування курсу «Математичне програмування».

ТЕМА 2

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ І ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Математична постановка задач лінійного програмування. Система гіпотез.

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ — так звана загальна задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції $Z = cx_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, (2.1)

або $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \; \{\le, \ge, =\} \; b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \; \{\le, \ge, =\} \; b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \; \{\le, \ge, =\} \; b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (2.3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), тоді як цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Задачу (2.1)—(2.3) легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) всі $b_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну змінну $x_{n+1} : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну змінну x_{n+2}, тобто $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$.

Приклад 2.1. Записати в канонічній формі таку задачу ЛП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Розв'язування. Помножимо другу нерівність на (–1) і введемо відповідно допоміжні змінні x_4 і x_5 для другого та третього обмеження:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Неважко переконатися, що допоміжні змінні, у цьому разі x_4 і x_5, є невід'ємними, причому їх уведення не змінює цільової функції.

Отже, будь-яку задачу ЛП можна записати в такій канонічній формі:

знайти максимум функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ (2.4)

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (2.6)$$

Задачу (2.4)—(2.6) можна розв'язувати на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = \min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n).$$

2.2. Визначення множини допустимих планів задачі ЛП

Задачу ЛП (ЗЛП) зручно записувати за допомогою знака суми «Σ». Справді, задачу (2.4)—(2.6) можна подати так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \, (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ще компактнішим є запис ЗЛП у векторно-матричному вигляді:

$$Z = CX \to \max$$

за умов

$$AX = A_0,$$

$$X \ge 0,$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця коефіцієнтів при змінних

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто ЗЛП зручно записувати у векторній формі:

$$Z = CX \to \max$$

за умов

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$

$$X \ge 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних.

2.3. Геометрична інтерпретація ЗЛП. Кононічна форма ЗЛП і її оптимальний план.

Геометричну інтерпретацію ЗЛП розглянемо на такому прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в таблиці:

/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукровий буряк	
	Жива праця, людино-днів	5	25	270
	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
	Прибуток, тис. грн.	0,7	1	

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрового буряка, скориставшись такими позначеннями:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці;

x_2 — шукана площа посіву цукрового буряка.

ЗЛП має вигляд:

$$Z = 0,7x_1 + x_2 \to \max \qquad (2.7)$$

за умов

$$x_1 + x_2 \le 20, \qquad (2.8)$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270, \qquad (2.9)$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80, \qquad (2.10)$$

$$x_2 \ge 5, \qquad (2.11)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (2.12)$$

Геометричну інтерпретацію задачі наведено на рис. 2.1.

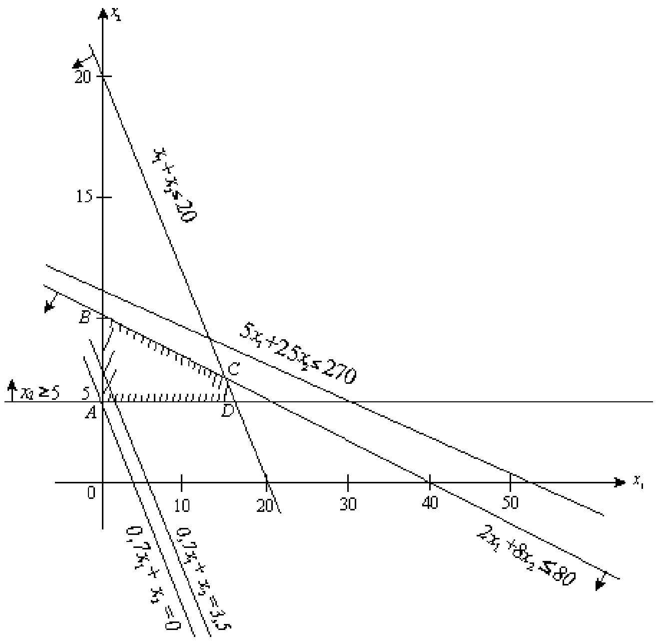


Рис. 2.1. Область допустимих розв'язків

Область допустимих розв'язків дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \le 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \le 20$ підставляємо координати якоїсь характерної точки, скажімо $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \le 20$. Цей факт на рис. 2.1 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.8)—(2.12). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис. 2.1 — многокутник *ABCD)*. Цільова функція $Z = 0,7x_1 + x_2$ описує сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо Z = 0, маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли Z = 3,5, дістаємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

Загальна задача лінійного програмування (2.1)—(2.3) геометричне інтерпретується так: кожне *і*-те обмеження, що має вигляд рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

у *n*-вимірному просторі основних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задає гіперплощину. Кожному обмеженню виду (2.2) і (2.3) відповідають гіперплощина та півпростір, який лежить по один бік цієї гіперплощини. У перетині всіх півпросторів, що визначаються обмеженнями задачі (2.2) і (2.3), утворюється опуклий многогранник допустимих її розв'язків. Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

в *n*-вимірному просторі основних змінних можна геометричне інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

2.4. Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2.2) і (2.3), називають ***допустимим розв'язком,*** або ***допустимим планом за-***

дачі. Сукупність допустимих розв'язків (планів) задачі утворює ***область допустимих розв'язків задачі***.

Опорним планом задачі лінійного програмування називається план, утворений координатами вершини многогранника планів задачі. Отже, опорний план — це план, який задовольняє не менш ніж n лінійно незалежних обмежень (2.2) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженням (2.3) щодо знака.

Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він є вершиною многогранника планів задачі, утвореного перетином точно n гіперплощин, тобто задовольняє n лінійно незалежних обмежень — строгих рівностей. У противному разі опорний план є ***виродженим***.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок і серед її планів є опорні, то хоча б один із них буде оптимальним.

Сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування є многогранною опуклою множиною, яку називають ***многогранником розв'язків***.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-який точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

2.5. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

2.5.1. Основи графічного методу

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Розглянемо таку задачу. Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min) \qquad (2.13)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases} \qquad (2.14)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (2.15)$$

Припустимо, що система (2.14) за умов (2.15) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (2.4) кожне i-те обмеження-нерівність (2.14) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$. Системою обмежень (2.14) описується спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають ***многокутником розв'язків,* або *областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***.

Умова (2.15) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометричне інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Сформулюємо деякі властивості задачі лінійного програмування, застосовувані під час її графічного розв'язування.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многокутника розв'язків. А якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині многокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставляння координат якої в (2.13) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з розглянутих далі кроків.

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.14) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині A многокутника розв'язків (рис. 2.2).

Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB (рис. 2.3). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів (рис. 2.4 — цільова функція не обмежена згори; рис. 2.5 — система обмежень задачі несумісна).

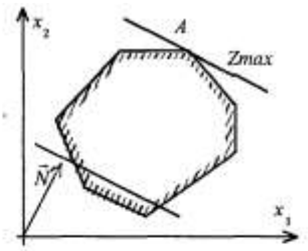


Рис. 2.2

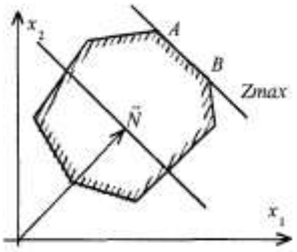


Рис 2.3

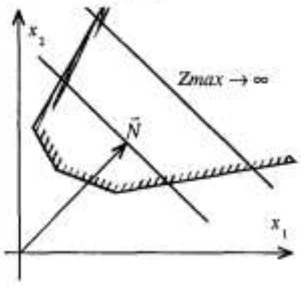


Рис. 2.4

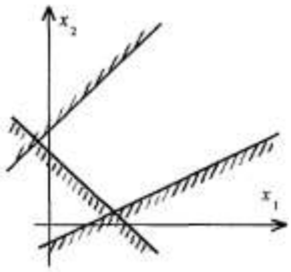


Рис 2.5

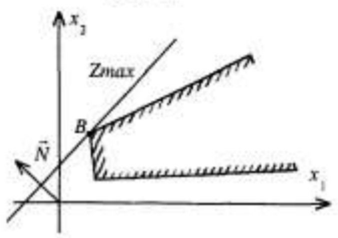


Рис. 2.6

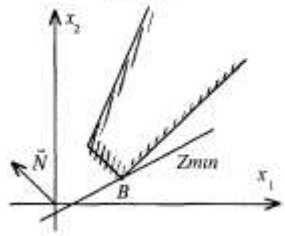
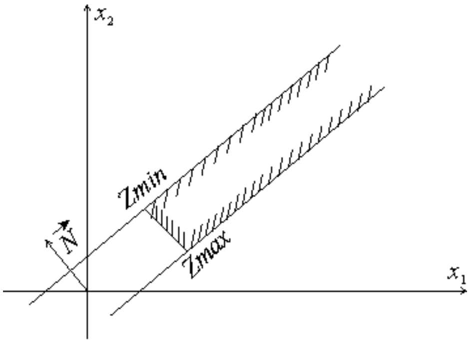


Рис. 2.7

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 2.6 і 2.7). На рис. 2.6 у точці *B* маємо максимум, на рис. 2.7 у точці *B* — мінімум, на рис. 2.8 показано, що в разі необмеженої області допустимих планів цільова функція набуває максимальне і мінімальне значення.



2.5.2. Навчальні завдання. Розв'язування задач графічним методом

Розглянемо застосування графічного методу для розв'язування деяких економічних задач.

Задача 2.1. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох моделей обробляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці кожної моделі подано таблицею.

Верстати	**Тривалість обробки полиці, хв., за моделями**	
	А	**В**
1	30	15
2	12	26

Час роботи верстатів 1 та 2 становить відповідно 40 та 36 год. на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми. Побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай x_1 — кількість полиць моделі А, виготовлюваних фірмою за тиждень, а x_2 — відповідна кількість полиць моделі В. Цільова функція моделі — максимізація прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона записується так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи верстатів 1 та 2 для обробки продукції та попит на полиці різних моделей. Обмеження на час роботи верстатів 1 та 2 набирають такого вигляду:

для верстата 1 - $30x_1 + 15x_2 \le 2400$ хв.;

для верстата 2 - $12x_1 + 26x_2 \le 2160$ хв.

Обмеження на попит набирають вигляду:

$x_1 - x_2 \le 30$ *і* $x_2 \le 80.$

Отже, економіко-математичну модель поставленої задачі можна записати так:

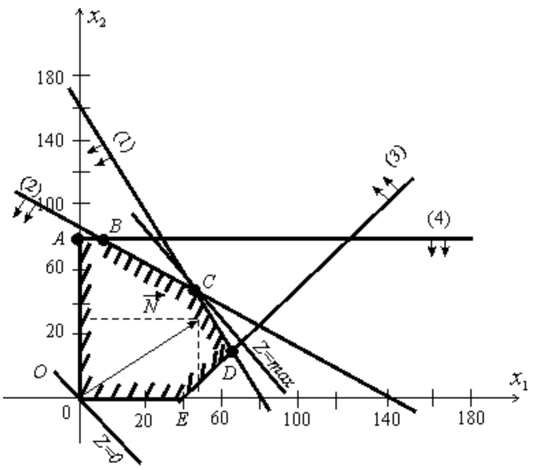
$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max, \qquad (2.16)$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400 & (2.17) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160 & (2.18) \\ x_1 - x_2 \le 30 & (2.19) \\ x_2 \le 80 & (2.20) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0. \qquad (2.21)$$

Записана економіка-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язування. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження моделі. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 2.9). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 2.9 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі, — шестикутник *OABCDE.* Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку многокутника *OABCDE,* в якій цільова функція Z набуває найбільшого значення.



Для цього побудуємо вектор $\overline{N} = (c_1; c_2)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\overline{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x_1 = c_1;\ \ x_2 = c_2)$. У нашій задачі вектор $\overline{N} = (50;30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню Z = 0. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\overline{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ в напрямі вектора $\overline{N}$ доти, доки не визначимо вершину многокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 2.9 бачимо, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника *OABCDE,* є точка С. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В, що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки *С* визначаються перетином прямих (2.17) і (2.18):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо $x_1 = 50; x_2 = 60.$. Отже, $X^* = (50; 60); \max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300.$ Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 — моделі В, то вона отримає максимальний прибуток 4300 у. о. При цьому тижневий фонд роботи верстатів 1 та 2 буде використано повністю.

Задача 2.2 Невелика птахоферма має розрахувати оптимальний кормовий раціон для 1000 курчат, яких вирощують до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що тижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що в середньому за 8 тижнів вони досягнуть маси 500 г. З цією метою кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, ураховуючи лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість задано таблицею:

Корм	**Вміст поживних речовин, %**		**Вартість 1 кг корму, у.о.**
	Білок	**Клітковина**	

Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менш як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.

Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, задовольняючи вимоги до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1 — маса, кг, зерна в кормовій суміші, *а* x_2 — вміст, кг, соєвих бобів у готовій кормовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити не менш як 1000 • 0,5 = 500 (кг), тобто

$$x_1 + x_2 \ge 500$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.

1. Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \ge 20(x_1 + x_2)$$

2. Суміш має містити не більш як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \le 5(x_1 + x_2)$$

Остаточно математична модель задачі оптимізації кормового раціону набирає такого вигляду:

$$Z = 0,40x_1 + 0,90x_2 \to \min; \qquad (2.22)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 500 & (2.23) \\ -10x_1 + 30x_2 \ge 0 & (2.24) \\ -3x_1 + 3x_2 \le 0 & (2.25) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0. \qquad (2.26)$$

Розв'язування. Графічну інтерпретацію задачі подано на рис. 2.10. Множина допустимих її розв'язків необмежена. Для вектора $\vec{N} = (0,4; 0,9)$ можна змінити масштаб, наприклад $\vec{N} = (200; 450)$. Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці *A,* що лежить на перетині прямих (2.23) та (2.24). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500, \\ -10x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375; \\ x_2 = 125 \end{cases}$$

Отже, $X^* = (375;125); \min Z = 0,4 \cdot 375 + 0,9 \cdot 125 = 262,5$.

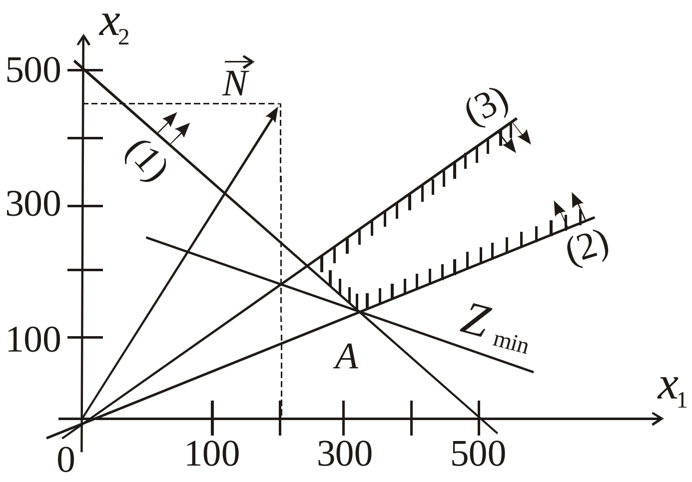


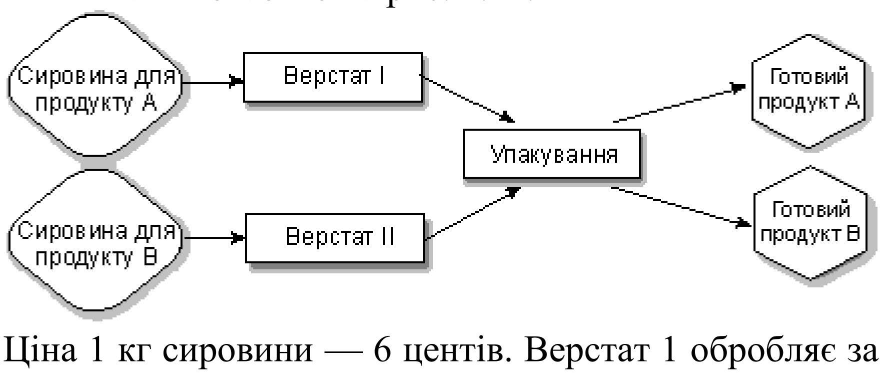
Рис. 2.10

Знайдений оптимальний план задачі показує: для того щоб отримати 500 кг кормової суміші мінімальної вартості (262,50 у. о.), потрібно взяти 375 кг зерна та 125 кг соєвих бобів. При цьому вимоги до поживності кормової суміші виконуватимуться:

0,10 • 375 + 0,50 • 125= 100кг білка, що становить рівно 20 % загальної маси суміші;

0,02 • 375 + 0,08 • 125 = 17,5 кг клітковини в кормовій суміші, що становить 3,5 % її маси і не перевищує 5 %.

Задача 2.3. Фірма виготовляє два продукти А та В, що продаються відповідно по 8 та 15 центів за упаковку. Ринок збуту для кожного з них практично необмежений. Продукт А обробляється верстатом 1, а продукт В — верстатом 2. Далі обидва продукти упаковуються на фабриці. Схему виробництва продуктів А та В показано на рис. 2.11.



Ціна 1 кг сировини — 6 центів. Верстат 1 обробляє за годину 5000 кг сировини, а верстат 2 — 4000 кг сировини із втратами, що становлять відповідно 10 і 20%. Верстат 1 може працювати 6 год. на день, причому його використання коштує 288 дол./год.; верстат 2 – 5 год на день, що коштує 336 дол./год.

Маса однієї упаковки продукту А дорівнює 1/4 кг, а продукту В 1/3 кг. Фабрика може працювати 10 год на день, виготовляючи за 1 год. продукції на 360 дол. упаковуючи 12 000 продуктів А та 8000 продуктів В.

Відшукати такі значення x_1 та x_2 споживання сировини для продуктів А та В (у тисячах кілограмів), які забезпечують найбільший щоденний прибуток фірми.

Сформулюємо математично задачу й розв'яжемо її графічно.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1 —кількість сировини, тис. кг, використовуваної для виготовлення продукту А, а x_2 —— кількість сировини, тис. кг, що йде на виготовлення продукту В.

Запишемо обмеження задачі. Згідно з умовою обмеженими ресурсами є час використання верстатів 1 і 2, а також час роботи фабрики з упакування продуктів А та В

1. Обмеження на використання верстата 1. Економічний зміст цього обмеження такий: фактичний час роботи верстата 1 з обробки сировини для продукту А не повинен перевищувати 6 год, тобто

$$\frac{\text{Кількість сировини для продукту А, тис. кг}}{\text{Продуктивність верстата, тис. кг/год}} \le 6 \text{ год.}$$

Математично це запишеться так:

$x_1/5 \le 6$, àáî $x_1 \le 30$.

2. Обмеження на використання верстата 2 знаходимо аналогічно:

$x_2/4 \le 5$, àáî $x_2 \le 20$.

3. Обмеження на час роботи фабрики з упакування продуктів А та В.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактичний час, витрачений на упакування продуктів А та В, не повинен перевищувати 10 год на день:

$$\frac{\text{Кількість сировини для продукту А – - Витрати сировини під час обробки, тис. кг}}{\text{Маса упаковки продукту А, тис. кг × ×Продуктивність під час упакування продукту А, шт./год}} +$$

$$\frac{\text{Кількість сировини для продукту В, - - Витрати сировини під час обробки, тис. кг}}{\text{Маса упаковки продукту В, тис. кг × × Продуктивність під час упакування продукту В, шт./год}} \le 10 \text{ год}$$

Математично це запишеться так:

$$\frac{x_1 - 0{,}10x_1}{1/4000 \cdot 1200} + \frac{x_2 - 0{,}20x_2}{1/3000 \cdot 8000} \le 10,$$

або

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \le 10,$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Побудуємо цільову функцію задачі. Прибуток фірми складається з різниці між доходом від реалізації виготовленої продукції та витратами на її виробництво.

1. Дохід, дол., від виробництва продуктів А та В визначається так:

Кількість сировини, що надходить на упакування, тис. кг Ціна упаковки, дол., Маса упаковки продукту, тис. кг

або

$$\frac{x_1 - 0,10x_1}{1/4000} \cdot 0,08 + \frac{x_2 - 0,20x_2}{1/3000} \cdot 0,15.$$

Загальний дохід дорівнює $288x_1 + 360x_2$.

2. Витрати, дол., на сировину визначаємо як загальну кількість сировини, тис. кг, використовуваної для виробництва продуктів А та В, помножену на вартість одиниці сировини, дол.:

$$60(x_1 + x_2) = 60x_1 + 60x_2$$

3. Витрати, дол., пов'язані з використанням верстатів 1 і 2, визначаємо як фактичний час роботи верстата з обробки сировини, помножений на вартість 1 год роботи відповідного верстата:

$$\frac{x_1}{5} \cdot 288 + \frac{x_2}{4} \cdot 366 = \frac{288}{5} x_1 + 84x_2$$

4. Витрати, дол., пов'язані з упакуванням продуктів А та В, складаються з фактичного часу роботи фабрики $(0,3x_1 + 0,3x_2)$, помноженого на вартісний еквівалент 1 год роботи фабрики, який становить 360 дол.:

$$360(0,3x_1 + 0,3x_2) = 108x_1 + 108x_2$$

Узагальнюючи всі складові частини цільової функції, можемо записати математичний вираз прибутку фірми за день:

$$Z = (288x_1 + 360x_2) - (60x_1 + 60x_2) - (288/5x_1 + 84x_2) - (108x_1 + 108x_2) =$$
$$= 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2).$$

Отже, маємо остаточний запис економіко-математичної моделі:

$$Z = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2) \to \max$$

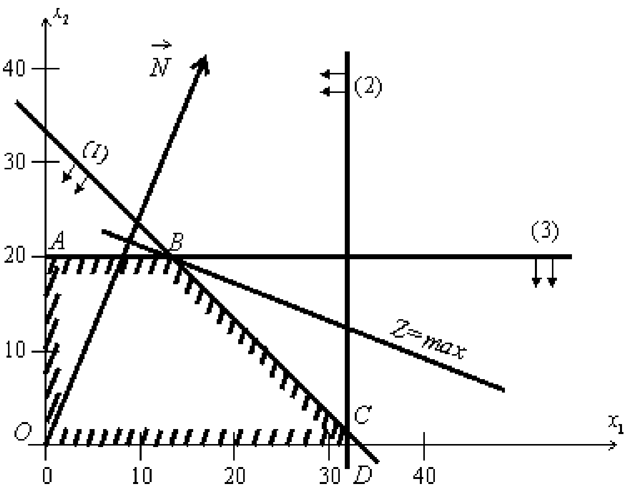
за обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 100; \\ x_1 \le 30; \\ x_2 \le 20; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Незважаючи на порівняно складний процес моделювання, математично поставлена задача дуже проста й легко розв'язується графічно.

Розв'язування. Графічне розв'язування задачі ілюструє рис. 2.12. Областю допустимих планів, що утворюється системою обмежень задачі, є многокутник *OABCD*. Найбільшого значення цільова функція досягає у вершині В. Координати цієї точки визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 100, \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 40/3; \\ x_2 = 20. \end{cases}$$



Оптимальний план задачі $X^* = (40/3; 20); \max Z = 2992$.

Отже, для того, щоб отримати найбільший денний прибуток 2992 дол., фірма має обробляти 40/3 тис. кг сировини, виробляючи продукт А, і 20 тис. кг — виробляючи продукт В. За такого оптимального плану випуску продукції верстат 2 працюватиме 20/4=5 год на день, тобто з повним навантаженням, а верстат 1 працюватиме лише 40/15 = 2 год 20 хв на день.

Задача 2.4. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери потрібно вирізати 24, 28 і 18 заготовок трьох розмірів. Лист фанери можна розрізати двома способами. Кількість отриманих заготовок та площу відходів за кожного способу розрізування одного листа фанери наведено в таблиці:

Заготовка	Кількість отриманих заготовок, шт., за способами	
	першим	другим
1	2	6
2	4	4
3	2	3
Площа відходів, см^2	12	18

Скільки листів фанери та за яким способом слід розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок з мінімальними відходами.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1, x_2 — кількість листів фанери, які необхідно розрізати відповідно першим і другим способом.

Цільова функція — мінімізація відходів під час розрізування листа фанери. Математично це записується так:

$$Z = 12x_1 + 18x_2 \to \max$$

Обмеження математичної моделі враховують кількість заготовок кожного виду, які потрібно отримати:

для заготовки 1 $2x_1 + 6x_2 \geq 24;$
для заготовки 2 $4x_1 + 4x_2 \geq 28;$
для заготовки 3 $2x_1 + 3x_2 \geq 18;$

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд

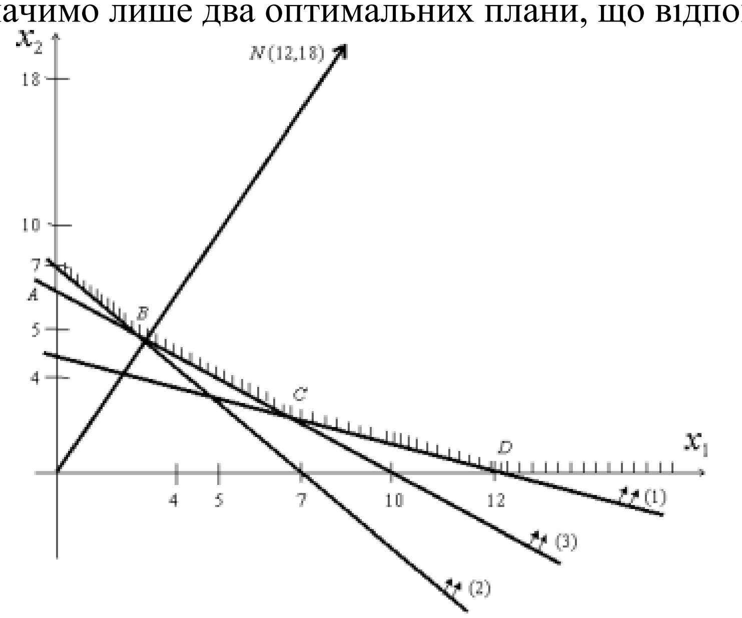
$$Z = 12x_1 + 18x_2 \to \min \qquad (2.27)$$

за обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 24; & (2.28) \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 28; & (2.29) \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18; & (2.30) \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. & (2.31) \end{cases}$$

Розв'язування. Графічне розв'язування задачі оптимального розрізування ілюструє рис. 2.13. Область допустимих розв'язків цієї задачі необмежена. Вектор $\overline{N}$ = (12; 18) можна змінити згідно з масштабом графіка, наприклад $\overline{N}$ = (6; 9).

Із рис. 2.13 бачимо, що пряма $12x_1 + 18x_2 = \min Z$ збігається зі стороною *BC* многокутника розв'язків. Це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани: координати будь-якої точки відрізка *BC* є оптимальним планом, причому для цих координат цільова функція Z досягає свого найменшого значення. Визначимо лише два оптимальних плани, що відповідають кінцям відрізка *BC*.



Точка *B* утворюється перетином прямих (2.29) і (2.30); її координати визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 28, \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 4, \end{cases}$$

звідки $X_2^* = (3; 4); \min Z = 12 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 108$.

Точка *C* лежить на перетині прямих (2.28) і (2.30); її координати визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 24, \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 6; \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

отже, $X_2^* = (6; 2); \min Z = 12 \cdot 6 + 18 \cdot 2 = 108$.

Повертаючись до економічного змісту розв'язаної задачі, маємо такі результати. Якщо розрізати 7 листів фанери, з яких 3 листи — першим способом, а 4 — другим, то матимемо найменшу площу відходів — 108 см. Але такі самі мінімальні втрати будуть і в разі розрізування шести листів першим способом і двох — другим.

Будь-який інший альтернативний оптимальний план задачі можна записати як опуклу лінійну комбінацію отриманих двох крайніх розв'язків:

$X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^*,$

де $0 \le \lambda_1 \le 1;$ $0 \le \lambda_2 \le 1;$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1.$.

Наприклад, нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5.$ Тоді ще один оптимальний план задачі визначається так:

$$X^* = 0,5(3;4) + 0,5(6;2).$$

$$X^* = (4,5;3).$$

Цільова функція Z має таке саме мінімальне значення: $\min Z = 12 \cdot 4,5 + 18 \cdot 3 = 108.$

ТЕМА 3
СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ

3.1.1 Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв'язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукання оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукання якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою *m* лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з *n* векторів $A_1, A_2, ..., A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ЕОМ. Тому необхідне використання методу, який уможливлював би скорочення кількості обчислень. 1949 року такий метод був запропонований американським вченим Дж. Данцігом — так званий симплексний метод, або ***симплекс-метод***.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв'язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

3.1.2. Початковий опорний план

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n).$$

Не порушуючи загальності, допустимо, що система рівнянь містить перші m одиничних векторів. Отримаємо:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.36)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \quad x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.37)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (2.38)$$

Система обмежень (2.37) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0, \qquad (2.39)$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ — лінійно незалежні одиничні вектори m-вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в розкладі (2.39) базисними змінними будуть $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а інші змінні — вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$, а вектори $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — одиничні, то отримаємо один із розв'язків системи обмежень (2.37):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0), \qquad (2.40)$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \qquad (2.41)$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — лінійно незалежні вектори і за властивістю 3 розв'язків задачі лінійного програмування (§ 2.5) план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

3.1.3 Перехід від одного опорного плану до іншого

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (2.40), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2, ..., A_m$ є базисом m-вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (2.39) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + \ldots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \qquad (2.42)$$

Припустимо, що у виразі (2.42) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$.

Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (2.42) і віднімемо результат з рівності (2.41). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \qquad (2.43)$$

Отже, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1}; \ldots x_m - \theta x_{m,m+1}; \theta; 0,\ldots,0)$$

є планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід'ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1, в які входять $x_{i,m+1} \le 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1} (i = 1,2,...,m)$. Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \ge 0. \qquad (2.44)$$

З (2.44) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \le \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$. Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умову:

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

де мінімум знаходимо для тих i, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більше ніж m додатних компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що $\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ для деякого значення i, тоді відповідна компонента плану X_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (2.43):

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1}\right)A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}\right)A_2 + \ldots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right)A_m +$$
$$+ \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

якщо позначити $x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x_i' \quad (i = \overline{2,m})$, $\frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x'_{m+1}$, то рівняння можна подати у вигляді:

$x'_2A_2 + x'_3A_3 + ... + x'_mA_{m+1} + x'_{m+1}A_{m+1} = A_0$,

якому відповідає такий опорний план:

$X_2 = (0; x'_2; x'_3; ...; x'_m; x'_{m+1}; 0; ...; 0)$.

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо висновувати: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана—Гаусса.

Необхідно зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (2.42) всі $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta > 0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить m+1 додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

3.1.4 Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану

Симплексний метод уможливлює направлений перебір опорних планів, тобто перехід від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням функціонала. Отже, окремим питанням стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Допустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (2.40):

$X_0 = (x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, ..., x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0)$.

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0 \qquad (2.45)$$

та значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m = F(X_0). \qquad (2.46)$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + ... + x_{mj}A_m = A_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2.47)$$

тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціонала:

$$F_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + ... + c_mx_{mj} \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2.48)$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) $(j = \overline{1,n})$. Тоді справедливим є таке твердження (***умова оптимальності плану*** задачі лінійного програмування): якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j (j = \overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову:

$$\Delta_j = F_j - c_j \ge 0, \qquad (2.49)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукання мінімального значення функціонала: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j\,(j=\overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \le 0\,, \qquad (2.50)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, для того, щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум та недодатними для задачі на мінімум.

Умови оптимальності планів задач лінійного програмування є наслідками двох теорем. Скориставшись введеними в даному параграфі допущеннями та позначеннями, сформулюємо відповідні теореми, а також наведемо їх доведення.

Теорема 2.6. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна відшукати такий план X, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (2.47) і (2.48) на $\theta > 0$ і віднімемо результати відповідно з (2.45) та (2.46). Отримаємо:

$$(x_1-\theta x_{1j})A_1+(x_2-\theta x_{2j})A_2+\ldots+(x_m-\theta x_{mj})A_m+\theta A_j = A_0; \qquad (2.51)$$

$$(x_1-\theta x_{1j})c_1+(x_2-\theta x_{2j})c_2+\ldots+(x_m-\theta x_{mj})c_m+\theta c_j =$$
$$= F(X_0)-\theta(F_j-c_j) = F(X_0)-\theta F_j+\theta c_j. \qquad (2.52)$$

У співвідношенні (2.52) до обох частин додається величина θc_j для $j=\overline{1,n}$. У (2.51) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ додатні, тому завжди можна знайти таке $\theta > 0$, що всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_j$ були б невід'ємними, інакше кажучи, отримати новий план задачі виду:

$X = (x_1-\theta x_{1j};\, x_2-\theta x_{2j};\ldots;x_m-\theta x_{mj};\theta;0;\ldots;0)$, якому згідно з (2.52) відповідає таке значення функціонала:

$$F(X) = F(X_0)-\theta(F_j-c_j)\,. \qquad (2.53)$$

Оскільки за умовою теореми $F_j - c_j < 0$ і $\theta > 0$, то $F(X) > F(X_0)$, що й потрібно було довести.

Якщо розглядається задача на відшукання мінімального значення цільової функції, то формулюється така теорема.

Теорема 2.7. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати такий план X, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) < F(X_0)$.

Доведення аналогічне попередньому.

3.1.5 Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування, за допомогою симплексного методу знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (2.36)—(2.38), опорний план якої $X_0 = (x_1=b_1,\, x_2=b_2,\ldots,x_m=b_m,\, x_{m+1}=0,\ldots,x_n=0)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори $A_j(j=\overline{1,n})$ системи обмежень (2.37) розкласти за базисними векторами $A_1, A_2, ..., A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Всі подальші обчислення зручно проводити в ***симплексній таблиці*** (табл. 2.6).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «$С_{баз}$» — коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» — початковий опорний план X_0, в цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j(j=\overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного j-го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (2.37). У $(m+1)$-му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j — значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають ***оцінковим***.

Значення $F(X_0)$ знаходять підстановкою компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ — при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного j-го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл. 2.6 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_{баз} X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{баз} X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \; j = 1,2,...,n,$$

де c_i — коефіцієнти функціонала, що відповідають векторам базису.

Таблиця 2.6

ПЕРША СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

i	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_0)$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n	

Після заповнення табл. 2.6 розраховують значення оцінок плану (останній рядок): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) - c_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$. Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \ge 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним. Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів *j*, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для *k*-го вектора $m \le k \le n$. Тоді до базису включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести з базису (згідно з процедурою переходу від одного опорного плану задачі до іншого — § 2.7.2), розраховують останній стовпчик табл. 2.6 — значення θ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, \; i = 1,2,\ldots,m, \; a_{ik} > 0.$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = \min\theta_i, \; i = 1,2,\ldots,m, \; a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають *i*-ий вектор, якому відповідає θ^*.

Допустимо, що $\theta^* = \min\theta_l = \frac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в *l*-му рядку табл. 2.6. Відповідний рядок симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці a_{lk}, який називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана—Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k}A_1 + \ldots + a_{lk}A_l + \ldots + a_{mk}A_m. \qquad (2.54)$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (2.54):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}\left(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m\right). \qquad (2.55)$$

Розклад вектора A_0 за початковим базисом має вигляд:

$$A_0 = b_1A_1 + \ldots + b_lA_l + \ldots + b_mA_m. \qquad (2.56)$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (2.55) у рівняння (2.56), маємо:

$$A_0 = b_1A_1 + \ldots + b_l\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m)\right] + \ldots + b_mA_m =$$
$$= \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \ldots + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m.$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b'_i = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \ (i \neq j); \\ b'_k = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \quad (i = j). \end{cases} \qquad (2.57)$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j}A_1 + \ldots + a_{lj}A_l + \ldots + a_{mj}A_m. \qquad (2.58)$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (2.55) у (2.58):

$$A_j = a_{1j}A_1 + \ldots + a_{lj}\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m)\right] + \ldots + a_{mj}A_m =$$
$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \ldots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m =$$
$$= a'_{1j}A_1 + \ldots + a'_{kj}A_k + \ldots + a'_{mj}A_m.$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a'_{1j}; \ldots; x_k = a'_{kj}; \ldots; x_m = a'_{mj})$, де

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i \neq j); \\ a'_{kj} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \qquad (i = j). \end{cases} \qquad (2.59)$$

Формули (2.57) та (2.59) є формулами повних виключень Жордана—Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, \ldots, A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної табл. 2.7), необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;
2) розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана—Гаусса (правило прямокутника).

Потім необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі $F_j - c_j \geq 0$, то план X_1 — оптимальний, інакше переходять до відшукання наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $F_j - c_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибираючи розв’язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок (одну ітерацію) симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціонала, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох точках багатогранника розв’язків, а отже, за властивістю 2 (§ 2.5) розв’язків задачі лінійного програмування така задача має нескінченну множину оптимальних планів.

Таблиця 2.7

ДРУГА СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ ВІДШУКАННЯ ОПОРНОГО (ОПТИМАЛЬНОГО) ПЛАНУ

i	Базис	Сбаз	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	…	0	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	a'_{1j}	…	a'_{1k}	…	a'_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	…	0	…	0	$a'_{2,m+1}$	…	a'_{2j}	…	a'_{2k}	…	a'_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	…	1	…	0	$a'_{l,m+1}$	…	a'_{lj}	…	a'_{lk}	…	a'_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	…	0	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	a'_{mj}	…	a'_{mk}	…	a'_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_1)$	0	0	…	0	…	0	Δ'_{m+1}	…	Δ'_j	…	Δ'_k	…	Δ'_n	

Розв’язання задачі лінійного програмування на відшукаваня мінімального значення функціонала відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. До базису включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходять для тих j, яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Всі інші процедури симплексного методу здійснюються аналогічно, як у задачі лінійного програмування на відшукання максимального значення функціонала.

3.1.6 Приклад розв'язування задачі симплекс-методом

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв'язання деяких задач лінійного програмування.

Приклад 2.10. Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведена в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ НА ВЕРСТАТАХ, год.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн — для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 — 380 машино-годин.

Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на тривалість використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (маш.-год.);

для верстата 2 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (маш.-год.).

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$\max Z = (73-(2\cdot10+3\cdot15))x_1 + (70-(3\cdot10+2\cdot15))x_2 + \\ +(55-(4\cdot10+1\cdot15))x_3 + (45-(2\cdot10+2\cdot15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,\ 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають недовикористаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j \left(j = \overline{1,\ 6}\right)$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	190
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$

$Z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10$;

$Z_3 - c_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$;

$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5$;

$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$;

$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$.

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10|>|-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min\theta = \{450/3; 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число a_{12} = 3 — *розв'язувальний елемент*. Дальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	225
x_6	0	80	5/3	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1. Кожний елемент розв'язувального (напрямного) рядка необхідно поділити на розв'язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент (число 1);

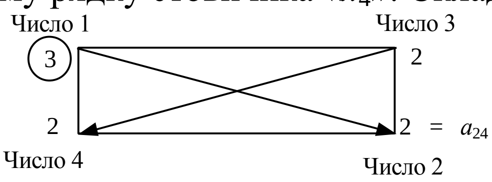
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число1}\cdot\text{Число2}-\text{Число3}\cdot\text{Число4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24}=(3\cdot 2-2\cdot 2):3=2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1=-4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - c_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564.$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 одиниць продукції В, є оптимальним. Він уможливлює отримання найбільшого прибутку за заданих умов (1564 грн). При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Наведені вище три симплексні таблиці можна об'єднати в одну та послідовно записувати в ній всі ітерації.

3.1.7 Метод штучного базису

У попередніх параграфах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (2.60)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.61)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.62)$$

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень (2.61) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$. Такі змінні називають ***штучними***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Допустимо, що система рівнянь (2.61) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (2.63)$$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n+m).$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (2.61) область допустимих розв’язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (2.63) називають ***розширеною***, або ***M-задачею***. Розв’язок розширеної задачі збігатиметься з розв’язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (2.63) набуде вигляду (2.61) (не міститиме штучних змінних), а розв’язок розширеної задачі буде розв’язком і задачі (2.60)—(2.62).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від’ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$\max F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$

(У разі розв’язання задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$).

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від’ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв’язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв’язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінкові рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в ($m+2$)-му рядку записують коефіцієнти з M, а в ($m+1$)-му — ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за ($m+2$)-м рядком. Ітераційний процес по ($m+2$)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за ($m+1$)-им рядком.

Взаємозв’язок між розв’язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 2.8. Якщо в оптимальному плані $\hat{X}_{opt} = = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Зазначимо, що коли план $\hat{X}_{opt}$ є оптимальним планом розширеної задачі, то план X_{opt} — план початкової задачі. При цьому

$$F(X_{opt}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n =$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - M \cdot 0 - \ldots - M \cdot 0 = F^*(\hat{X}_{opt}).$$

Доведемо, що план X_{opt} — оптимальний план початкової задачі. Допустимо, що X_{opt} не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, для якого $F(X^*) > F(X_{opt})$. Звідси для вектора $\widehat{X}_{opt}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$, що є планом розширеної задачі, маємо:

$$F^*(\widehat{X}_{opt}^*) = F(X_{opt}^*) > F(X_{opt}) = F^*(\widehat{X}_{opt}),$$

тобто

$$F^*(\widehat{X}_{opt}^*) > F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Отже, план $\widehat{X}_{opt}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми, а тому зроблене допущення щодо неоптимальності плану X_{opt} є неправильним.

Отже, загалом ***алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом*** складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Далі ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки Δ_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна шту-

чна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Розв’язати задачу з прикладу 2.10 із додатковою умовою: продукція С має виготовлятися обсягом не менш як 9 одиниць.

Розв’язання. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв’язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \ge \overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$

$$Z_0 = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	0	–M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
x_8	$-M$	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	9
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	0
		$-9M$	0	0	$-M$	0	0	0	M	0	$-9M$

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $Z_0 = -9M$; $Z_1 - c_1 = -8$; $Z_2 - c_2 = -10$, $Z_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий — числа з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі. Після першої ітерації з базису виведена штучна змінна x_8. Дальше розв'язування продовжуємо за алгоритмом симплексного методу.

Наступні кроки розв'язування задачі наведені у загальній таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	– 1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		1380	–4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	–40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	

$Z_j - c_j \geq 0$	14 56	0	0	0	61 /5	14/ 5	4/5	12	–12	
	0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Оптимальним планом задачі є вектор:

X^{*} = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0),

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для вкладення у два проекти. За інвестування в проект А гарантується отримання через рік прибутку в розмірі 60 коп. на кожну вкладену гривню, а вкладення в проект В дає змогу отримати дохід у розмірі 2 грн на кожну інвестовану гривню, але через два роки. За фінансування проекту В період інвестування має бути кратним двом. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 грн, щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестування.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j ($i = \overline{1,3}$; j = 1, 2). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А	**Проект В**
-й рік	Наявна сума на початок року	100 000	
	Альтернативні вкладення	x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{11}$	—
-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$	
	Альтернативні вкладення	x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{21}$	$3x_{12}$
-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$	
	Альтернативні вкладення	x_{31}	—
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{31}$	$3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: грошовий дохід фірми після трьох років інвестицій

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}.$$

Обмеження моделі сформулюємо згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \le 100000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 100000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \le 100000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, економіко-математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3};\ j = 1, 2.$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування і її можна розв'язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2, та x_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв'язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		0	–4,8	–4,8	0,44	0	0	0	3	1,6
x_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0

x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Оптимальним є такий план:

$X_1^* = (x_{11} = 100000;\ x_{22} = 160000).$

За такого плану інвестувань $Z_{\max} = 480000$ грн

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв’язувальний елемент у стовпчику «x_{12}» останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Візьмемо як розв’язувальний елемент 1. Виконавши один крок перетворень симплекс-методом, дістанемо таку другу кінцеву симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Звідси:

$X_2^* = (x_{12} = 100000;\ x_{31} = 300000), Z_{\max} = 480000$ грн.

Зобразимо використання грошових коштів фірми за першим оптимальним планом задачі у вигляді схеми:

		Проект А	Проект В
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000 грн	
	Вкладення	x_{11} = 100 000	$x_{12} = 0$
	Дохід на кінець року		160 000 грн

2-й рік	Наявна сума на початок року	160 000 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 160\,000$
	Дохід на кінець року		0 грн
3-й рік	Наявна сума на початок року	0 грн	
	Вкладення		
	Дохід на кінець року	x_{31}	**480 000 грн.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестування передбачає на перший рік усі кошти обсягом 100 000 грн вкласти в проект А, що дасть змогу одержати прибуток обсягом 60 000 грн, а загальна сума в кінці року становитиме 160 000 грн. На другий рік усі кошти в розмірі 160 000 грн передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма прибутку не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року прибуток фірми від минулорічних інвестицій проекту В становитиме 320 000 грн, а загальний грошовий дохід — 480 000 грн.

Такий же максимальний дохід можна мати, провівши інвестиції за схемою:

		Проект А	**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000 грн	
	Вкладення	$x_{11} = 0$	$x_{12} = 100\,000$
	Дохід на кінець року	0 грн	
2-й рік	Наявна сума на початок року	0 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$
	Дохід на кінець року	300 000 грн	
3-й рік	Наявна сума на початок року	300 000 грн	
	Вкладення	$x_{31} = 300\,000$	
	Дохід на кінець року		**480 000 грн.**

Згідно з другим оптимальним планом у першому році фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100 000 грн на фінансування проекту B. Це уможливить одержання грошового доходу лише наприкінці другого року обсягом 300 000 грн, які на третій рік повністю інвестуються в проект А. Загальний грошовий дохід фірми за три роки діяльності за цим варіантом також становитиме 480 000 грн.

Якщо як розв'язувальний елемент в останній симплексній таблиці взяти число 1,6, то матимемо третій оптимальний план:

$x_{11} = 50000; x_{12} = 50000;$

$x_{22} = 80000;$

$x_{31} = 150000.$

$Z_{\max} = 480000.$

Приклад 2.13. Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини — 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

ЗАМОВЛЕННЯ НА РУЛОНИ ПАПЕРУ

Замовлення	Потрібна ширина рулона, м	Кількість замовлених рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Необхідно визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язання. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо п'ять можливих варіантів розрізування стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРІЗУВАННЯ СТАНДАРТНИХ РУЛОНІВ ПАПЕРУ

Потрібна ширина рулона, м	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0
1,2	0	1	0	0	1

Обсяг відходів, м	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j — кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано j-способом, $j = \overline{1,5}$.

Обмеження задачі пов'язані з обов'язковою вимогою повного забезпечення необхідної кількості нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо брати до уваги всі подані в таблиці способи розкрою, то дістанемо такі умови (обмеження) даної задачі:

1. Щодо кількості рулонів шириною 0,8 м:

$2x_1 + x_2 + x_3 = 150$.

2. Щодо кількості рулонів шириною 1 м:

$x_3 + 2x_4 = 200$.

3. Стосовно кількості рулонів шириною 1,2 м:

$x_2 + x_5 = 300$.

Цільова функція задачі — це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 + 0x_4 + 0{,}8x_5.$$

Математична модель задачі загалом записується так:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150; \\ x_3 + 2x_4 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо алгоритм симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 та x_7. Розширена задача матиме вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 150; \\ x_3 + 2x_4 + x_7 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0,4	0	0,2	0	0,8	M	M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0

x_7	M	200	0	0	1	2	0	0	1
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0
$Z_j - c_j \ge 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	
$Z_j - c_j \ge 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	
		150 M	2 M	M	M	0	0	0	
x_1	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1		
$Z_j - c_j \ge 0$		270	0	1	0	0	0		
x_2	0	150	2	1	1	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1		
$Z_j - c_j \ge 0$		120	–2	0	–1	0	0		

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі:

$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150)$,

$\min Z = 120$.

Визначений оптимальний план передбачає: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів — четвертим і 150 — п’ятим. За такого оптимального варіанта розкрою обсяг відходів паперу буде найменшим і становитиме 120 м.

*3.1.8 Зациклення в задачах лінійного програмування**

Як доведено вище, оптимальний план задачі лінійного програмування може знаходитись в одній з кутових точок багатогранника розв’язків, кількість яких є скінченною, тому, використовуючи для розв’язування задачі симплексний метод, за скінченну кількість кроків можна знайти оптимальний план або з’ясувати, що задача не має розв’язку. Однак строга монотонність симплексного алгоритму має місце лише у разі невиродженості всіх опорних планів, які отримані в ході ітераційної процедури алгоритму.

Якщо при дослідженні значень $\theta_i (i = \overline{1,m})$ у симплексній таблиці існує кілька однакових значень з-поміж $\theta_i (i = \overline{1,m})$, то це означає, що можна вибрати для виключення з базису більш ніж один вектор. Наступна ітерація симплексного методу призведе до виродженого опорного плану, в якому хоча б одна з базисних змінних дорівнюватиме нулю.

Якщо деякий опорний план буде виродженим, тобто один або більше вільних членів основної системи обмежень дорівнюватимуть нулю, то при визначенні вектора, який необхідно на наступному кроці виводити з базису, найменше значення θ буде дорівнювати нулю і відповідати тому рівнянню, вільний член якого нульовий. Отже, в наступній ітерації буде виведена з базису відповідна змінна, причому всі значення базисних змінних в наступному опорному плані залишаться без змін, тобто значення цільової функції після проведення ітерації не зміниться.

Це означає, що наступні ітерації можуть не привести до покращення значення цільової функції. В такому разі після певного числа ітерацій дістають план, який вже було отримано раніше в процесі розв'язування задачі. Подальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторного перебору тих самих опорних планів. Вироджений план є причиною того, що теоретично виникає можливість нескінченного числа повторень однакових послідовностей ітерацій, які не покращують розв'язку, тобто обчислювальна процедура не буде мати кінця. Таку ситуацію називають ***зацикленням***. Циклу можна було б уникнути, запам'ятовуючи опорні плани, що утворили цикл, і не повертаючись до них. Проте, щоб забезпечити однозначність вибору вектора, який виводиться з базису, розроблено ряд спеціальних прийомів. Найцікавішим з них є так званий ***ε-метод***.

Виродженому плану відповідає вершина множини планів, що утворена більш ніж *n* гіперплощинами. Інакше кажучи, одна вершина відповідає кільком виродженим планам, що означає злиття кількох вершин багатогранника в одну. Ідея *ε*-методу усунення зациклення полягає в роз'єднуванні злитих вершин. Для цього досить, очевидно, ввести замість нулів у відповідні рівняння якісь інші значення, однак зробити це так, щоб не було знову кількох мінімальних співвідношень у наступному кроці. У такий спосіб замість початкової матимемо змінену задачу. Проте можна легко довести, що, діставши оптимальний план зміненої задачі, й допустивши, що введені величини дорівнюють нулю, матимемо оптимальний розв'язок початкової задачі.

На практиці вводять величини, які є дуже малими – це поліноми довільно взятої малої (близької до нуля) додатної величини *ε*. Коефіцієнтами поліномів беруть коефіцієнти при невідомих (базисних і небазисних) відповідного рівняння, а степенями *ε*-номери цих невідомих, тобто для деякого *i*-го рівняння маємо поліном виду:

$$P_i(\varepsilon) = \varepsilon^i + a_{i1}\varepsilon^{m+1} + a_{i2}\varepsilon^{m+2} + \ldots + a_{in}\varepsilon^n \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

Цілком зрозуміло, що для будь-яких a_{ij} можна вибрати *ε* настільки малим, що завжди $P_i(\varepsilon) > 0$, бо доданки зі степенями *ε*, вищими від *i*-го, будуть вищого порядку малості у порівнянні з першим ε^i. Внаслідок цього всі утворені поліноми різнитимуться за величиною. В оптимальному плані необхідно буде допустити, що $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що в разі підозри на можливість зациклення (випадок, коли початковий опорний план вироджений) поліноми $P_i(\varepsilon)$ можна одразу додати до вільних членів системи обмежень, внаслідок чого матимемо: $b_i(\varepsilon) = b_i + P_i(\varepsilon),\ (i = \overline{1,m})$.

3.1.9 Геометрична інтерпретація симплексного методу

Геометричну інтерпретацію симплексного методу можна подати двома різними способами. В одному разі ілюструється зміна базису, яка здійснюється вибором векторів, які включаються до базису та виключаються з нього. В другому, простішому та наочному випадку, процес симплексного методу інтерпретується як послідовний рух через сусідні кутові точки багатогранника розв'язків, що пов'язано зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Дві кутові точки назвемо сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі багатогранника.

Допустимо, що розглядається задача на відшукання максимального значення лінійної функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і маємо певний багатокутник її розв'язків (рис. 2.18).

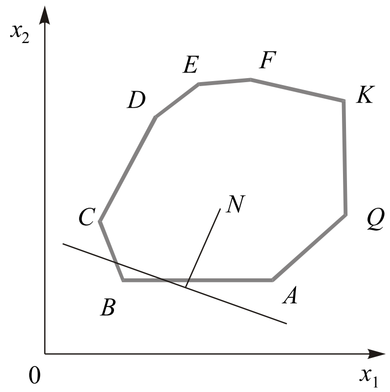


Рис. 2.18

Допустимо, що початковий опорний план відповідає кутовій точці *A*. Тоді наступний крок симплексного методу приведе до точки *Q*, ($Z(Q) > Z(A)$), а в результаті ще однієї ітерації — до точки *K*, де лінійна функція набуває максимального значення. Проте, якщо початковим опорним планом буде точка *B*, то включення вектора до базису за критерієм $\min\theta_j(Z_j - C_j)$ приводить до того, що пряма $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ проходитиме через точку *C* і алгоритм симплексного методу приведе до точок *C, D, E, F, K*, тобто для отримання оптимального плану необхідно буде виконати ще чотири ітерації.

Отже, очевидно, що застосування симплексного методу не дає змоги одразу перейти від опорного плану (точки В) до оптимального (точки К). Фактично розв'язок отримують, рухаючись вздовж межі (ребер) простору розв'язків, причому не завжди такий шлях буде найкоротшим. Кількість ітерацій за реалізації симплексного алгоритму визначається вибором початкового опорного плану та кількістю кутових точок, що траплятимуться на шляху прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = const$.

3.1.10 Модифікації симплексного методу*

Симплексний метод є ефективною, досить простою процедурою, проте не позбавленою деяких недоліків. Цей факт пояснює численні спроби модифікування симплексного методу, які можна зустріти в літературі, наприклад [31].

Хоча теоретична основа симплексного методу гарантує збіжність до оптимального розв'язку за скінченну кількість кроків, але труднощі обчислювального характеру, що виникають внаслідок помилок округлення в процесі машинних розрахунків, у цьому методі не враховані. Такі проблеми зустрічаються передусім тоді, коли штучні змінні є частиною початкового базисного розв'язку. Використання як ± *M* у цільовій функції дуже великих чисел може призвести до помилки округлення, що зумовлена операціями над групою чисел, яка містить як дуже великі, так і відносно малі числа. Розглянемо задачу (2.60)—(2.61).

Зазначена загроза зменшується розбиттям процесу розв'язування задачі на два етапи. На першому етапі розв'язується задача виду:

$$\max F_0 = -Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} \quad = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n+m)$,

де $x_j (j = n+1, \ldots, n+m)$ – штучні змінні.

Очевидно значення цільової функції для оптимального плану буде $F_0(X_0) = 0$. Отже, при $F_0(X_0) = 0$ початкова задача має допустимий базисний розв'язок, причому такий, що не містить штучних змінних. На другому етапі розв'язування задачі як початковий опорний план береться X_0, і процес продовжується за звичайним алгоритмом симплексного методу. Завдяки поділу розв'язування задачі на два етапи на кожному з них у процесі обчислень використовуються майже однакові за значеннями числа. Перший етап характеризується використанням лише великих чисел як коефіцієнтів цільової функції, проте на другому етапі задача не містить штучних змінних, отже, значення, що відповідають $\pm M$, не розглядаються.

Крім того, якщо на першому етапі розв'язання задачі $F_0(X_0) < 0$, то це означає, що деякі зі штучних змінних додатні, тобто допустимих планів для початкової задачі не існує, її система обмежень несумісна, задача розв'язків не має. Отже, немає потреби переходити до другого етапу.

Двохетапний метод застосовують до задач, що вимагають операцій над дуже великими числами, які входять у цільову функцію. Однак навіть за умови, що така ситуація не склалася, тобто задача не містить штучних змінних, проблеми обчислювального характеру залишаються. Застосування методу виключення змінних Жордана—Гаусса для отримання послідовного ряду симплексних таблиць призводить до накопичення і поширення помилок округлення в такій мірі, що вони спотворюють початкові дані задачі. Розглянемо приклад, в якому помилки округлення пов'язані з визначенням умов допустимості розв'язку. Допустимо, що точне значення деякої базисної змінної $x_i = 0$, вибрано деякий напрямний вектор A_j і в цьому векторі єдина невід'ємна компонента, що відповідає *i*-ій (нульовій) базисній змінній, також дорівнює нулю. Тоді вектор A_j вводити до базису не можна. Однак, унаслідок помилки округлення можлива ситуація, коли розраховане значення базисного вектора $x_i = 10^{-15}$, а значення коефіцієнта, що відповідає *i*-ій базисній змінній та *j*-му вектору в симплексній таблиці — $a_{ij} = 10^{-12}$. Тоді вектор A_j буде вибрано для введення до базису.

З метою зменшення впливу помилок округлення був розроблений ***модифікований симплексний метод***. Основні етапи його алгоритму по суті такі ж, як і для симплексного методу. Головна відмінність полягає в тому, що для отримання послідовності симплексних таблиць у модифікованому симплексному методі не застосовується метод виключення змінних Жордана—Гаусса. Допустимо, що розглядається задача лінійного програмування, де базис утворюють останні $n + m$ векторів, які позначимо через X_2, а відповідні їм коефіцієнти цільової функції — через C_2. Аналогічно перші n змінних позначимо через X_1, а відповідні коефіцієнти цільової функції — через C_1. Коефіцієнти векторів X_1 у системі обмежень утворюють матрицю A. Тоді схематично першу та останню симплексні таблиці можна подати у вигляді (табл. 2.11):

Таблиця 2.11

Базис	План	C_1	C_2
		X_1	X_2
X_2	b	A	E
Δ_j	C_2X_2	$C_2A - C_1$	0
....			
X_B	b	$B^{-1}A$	B^{-1}
Δ_j	$C_B\ B^{-1}b$	$C_B\,B^{-1}A - C_1$	$C_B\,B^{-1}A - C_2$

де B^{-1} — матриця, обернена до одиничної, з першої симплексної таблиці. Як видно з наведеної табл. 2.11, вся симплексна таблиця сформована шляхом використання початкових даних (матриця А) та обернення поточного базису B^{-1}. Отже, в обчислювальних процедурах модифікованого симплексного методу головна увага зосереджена на мінімізації помилок округлення при обчисленні матриці B^{-1}.

Крім зменшення помилок округлення, модифікований симплексний метод уможливлює також зменшення тривалості розрахунків. Зокрема, якщо в матриці обмежень А відносна кількість нульових елементів велика, то модифікованим симплексним методом можна скористатись для зменшення кількості операцій множення (порівняно зі звичайним симплексним методом, у якому елементи таблиці, особливо нульові, в процесі послідовних операцій постійно змінюються). Взагалі відомо, що потрібний для реалізації модифікованого симплексного методу обсяг обчислень тим менший, чим менша щільність матриці А (щільність — це відношення кількості ненульових елементів до загальної кількості елементів матриці) та відношення кількості обмежень до кількості змінних.

Заключні зауваження

У цьому розділі розглянуто два методи (графічний і симплекс-метод) розв’язання задач лінійного програмування. Графічний метод для розв’язування реальних задач не придатний, оскільки економіко-математична модель для його застосування мусить мати тільки дві змінні (види діяльності). На практиці такі задачі не виникають. Якщо економіко-математична модель адекватно описує реальні технологічні та економічні процеси, то вона, як правило, має сотні чи навіть тисячі змінних і обмежень. Для розв’язування таких задач використовується симплексний метод, із застосуванням якого теоретично можна дістати оптимальний розв’язок довільної лінійної економіко-математичної задачі.

Графічний метод є важливим для осмислення сутності оптимізації, геометричної інтерпретації постановки та розв’язку задач лінійного програмування.

Слід підкреслити, що економічні процеси є нелінійними, стохастичними, динамічними тощо. Далі будуть описані відповідні методи розв’язання таких задач. Проте звертаємо увагу читача на те, що є багато технологічних та економічних процесів, які з достатньою для практики точністю можна описати лінійними залежностями, тобто такі моделі є лінійними, а отже, для знаходження їх оптимального розв'язку застосовується симплексний метод.

Контрольні запитання

1. *Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.*
2. *Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?*
3. *Які є форми запису задач лінійного програмування?*
4. *Поясніть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.*
5. *Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?*
6. *Поясніть, що називається областю допустимих планів.*
7. *Який план називається опорним?*
8. *Який опорний план називається невиродженим?*
9. *Сформулюйте основні аналітичні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.*
10. *Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічним методом?*
11. *За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?*
12. ***Суть алгоритму графічного методу розв'язання задач лінійного програмування.***
13. *Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?*
14. *Суть алгоритму симплексного методу.*
15. *Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.*
16. *Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?*
17. *Як вибрати розв'язувальний елемент?*
18. ***Суть методу Жордана—Гаусса.***
19. *Суть методу штучного базису.*

ТЕМА 4
ПОНЯТТЯ ДВОЇСТОСТІ В ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ. ПОСТАНОВКА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ПРАВИЛО ПОБУДОВИ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ. ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ ТА ЇХ ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ

4.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач ЛП.

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста,*** що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \le b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m \le c_1, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \le c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

4.2. Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено далі.

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$ $y_j \ge 0.$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$ $y_j \ge 0.$
Несиметричні	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \min;$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$ $y_j \in [-\infty;\infty].$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \max;$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$ $y_j \in [-\infty;\infty].$

4.3. Основні теореми двоїстості задач та їх економічний зміст.

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

! ***Перша теорема двоїстості.*** Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план *X**, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; $\boldsymbol{D}^{-1}$ — матриця, обернена до матриці ***D***, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця $\boldsymbol{D}^{-1}$ завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

! ***Друга теорема двоїстості.*** Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *і*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний *і*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо *і*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне *і*-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

! ***Третя теорема двоїстості.*** Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

4.4. Після оптимізацій ний аналіз задач ЛП.

Розглянемо застосування теорії та співвідношень двоїстості на конкретних прикладах.

Задача 3.1. До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція Z максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак « ≤ ». Тому перше обмеження моделі по множимо на

(–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 5y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5, \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

äå $\quad \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній вектор $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому використаємо штучну змін ну в першому обмеженні.

3. Розширена задача лінійного програмування буде така:

$$\max(-5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5;\ \ x_5 = 1.$ Перший опорний план задачі:

$$x_0 = (0;0;0;5;1), Z_0 = -M.$$

4. Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплекс-таблиці:

Базис	$C_{áàç}$	План	–5	2	0	0	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	–1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - C_j \ge 0$		0 $-M$	5 $-M$	–2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	– 2/3
$Z_j - C_j \ge 0$		2	7	0	–2	0	2 + M	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$Z_j - C_j \ge 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 + M	

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$$X^* = (0;5/3;2/3;0), \qquad Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = 10/3,$$

$$Y^* = \vec{c}_{\text{áàç}} D^{-1},$$

де $\vec{ñ}_{\text{áàç}}$ = (2; 0) та міститься в стовпчику «$C_{\text{баз}}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

він також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис. Отже,

$$Y^* = (2;0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв'язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Задача 3.2. До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Розв'язування. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$F = y_1 + 4y \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис. 3.1).

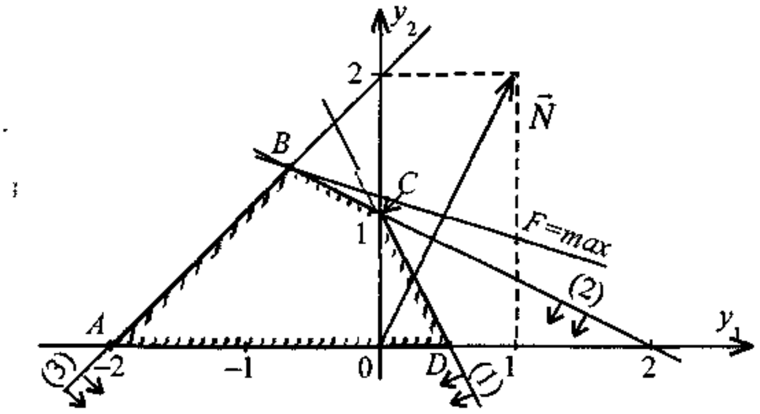


Рис. 3.1

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B многокутника $ABCD$. Її координати:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

тобто $Y^* = (-2/3;4/3); \max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3.$

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0;5/3;2/3), \min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0;5/3;2/3); Y^* = (-2/3;4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Задача 3.3. Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

а) $x = (8/7;3/7;0)$; á)$x = (0;1/5;8/5)$; â)$x = (1/3;0;1/3)$.

Розв'язування. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та припускаючи, що відповідний план *X* є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої за дачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій збігатимуться, то припущення правильне. Протилежного висновку можна дійти в таких випадках.

1.Якщо запропонований план *X* недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2.Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3.Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції *F* не дорівнює значенню функції *Z*, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$F = y_1 + 2y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4, \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in]-\infty;\infty[\,, y_2 \ge 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{8}{7} - 3\cdot\frac{3}{7} + 0 = 1; \\ \frac{8}{7} + 2\cdot\frac{3}{7} + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2, \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються і тому *X* = (8/7; 3/7; 0) є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього

$Z = 12\cdot 8/7 + 4\cdot 3/7 + 2\cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0;\quad x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 і y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2;$$

$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $Y = (4;4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Унаслідок цього наше припущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом вихідної задачі, виявилося помилковим.

2. *X* = (0; 1/5; 8/5)Підставимо цей план в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot 0 - 3\cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2\cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий і для нього Z=12·0–4· 1/5 + 2·8/5 = 12/5.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 та

x_2 додатні, то друге та третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, що виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: 2 • 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12. Отже, перше обмеження виконується, і тому Y = (8/5; 2/5) є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього F = 8/5 + 2 • 2/5 = 12/5 = Z. З огляду на викладене можна зробити висновок, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ – оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. X= (1/3; 0; 1/3). Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \neq 2. \end{cases}$$

Оскільки *X*= (1/3; 0; 1/3) є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так, $Y^* = (0; 1/5; 8/5), \min Z = 12/5;$ в) ні.

ТЕМА 5 ВИКОРИСТАННЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ В АНАЛІЗІ РЕНТАБЕЛЬНОСТІ ВИГОТОВЛЕНОЇ ПРОДУКЦІЇ, ВЗАЄМОЗАМІНУ РЕСУРСІВ, ДОЦІЛЬНІСТЬ РОЗШИРЕННЯ АСОРТИМЕНТУ ПРОДУКЦІЇ

5.1. Аналіз розв'язків ЛЕММ, рентабельності і дефіциту.

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів. Для виробництва *n* видів продукції використовується *m* видів

ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $\alpha_{ij}\left(j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}\right)$. Ціна одиниці продукції *j*-го виду дорівнює

$c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max Z=\max\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\left(i=\overline{1,m}\right);$$

$$x_j\ge 0\left(j=\overline{1,n}\right).$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)$, який дає найбільший дохід.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min;$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j\quad\left(j=\overline{1,n}\right);$$

$$y_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m}\right).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає ось у чому. Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці 7-го ресурсу, їх інколи ще називають ***тіньовою ціною відповідного ресурсу.***

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i, в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний *i*-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним.*** Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то *i*-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним.*** У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції *Z*, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої за дачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці *j*-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

–склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

–склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

–змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв'язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

5.2. Навчальні завдання

Розглянемо конкретний приклад, що підтверджує зроблені висновки.

Задача 4.1. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції А, В, С і Д, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, ум. од., за видами продукції				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: для продукції А – 2 ум. од., для Ві Д – по 4 од., для С – 3 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільший дохід. На ведемо симплекс-таблицю, що відповідає оптимальному плану поставленої задачі.

Базис	$C_{\acute{a}\grave{a}\c{c}}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - C_j \ge 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Виконаємо зазначені далі дії.

1.Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2.Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зроби ти їх економічний аналіз.

3.Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

4.Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого – зменшити на 10 од., а третього – збільшити на 20 ум. од.

5.Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

6.Розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Розв'язування. 1. Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$Z = 2x_2 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4};$$

де x_j – обсяг виробництва продукції *j*–го виду ($j = \overline{1,4};$)

$$F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases}$$
$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

де y_j – оцінка одиниці *i*–го виду ресурсу ($j = \overline{1,3}$).

2. З наведеної симплекс-таблиці маємо:

$$X^* = (0;0;35;45;0;30;0), \max Z = 285;$$
$$Y^* = (4;0;3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;0;2);$$
$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів продукції С і Д у кількості відповідно 35 та 45 од. Випуск продукції А та В не передбачається $(x_1 = x_2 = 0)$. Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший та третій ресурси — повністю $(x_5 = x_7 = 0)$. За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільший дохід у розмірі 285 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та

2 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F = 285$ ум. од.

3. Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний.

$$\begin{cases} 2\cdot 0+5\cdot 0+2\cdot 35+4\cdot 45=250 & \text{(ресурс 1 дефіцитний);} \\ 1\cdot 0+6\cdot 0+2\cdot 35+4\cdot 45=250<280 & \text{(ресурс 2 недефіцитний);} \\ 3\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 35+1\cdot 45=80 & \text{(ресурс 3 дефіцитний).} \end{cases}$$

Другий спосіб – за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля – ресурс недефіцитний.

Третій спосіб – за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i–го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то $i-$й ресурс недефіцитний. Так,

y_1 = 1/2 (ресурс 1 дефіцитний);
y_2 = 0 (ресурс 2 недефіцитний);
y_3 = 2 (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю $(b_1 = 250+1 = 251)$, то цільова функція $\max Z$ збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285{,}5$ ум. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці $y_1 = 1/2$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, змінної x_6^* — зменшиться на одиницю, а x_3^* — на 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

X^*=(0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0).

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції Д та падіння виробництва продукції С, а обсяг використання ресурсу 2 збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде $\max Z = 2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 34{,}5+4\cdot 45{,}5 = 285{,}5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю $(b_3 = 80+1 = 81)$. Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0).$$

$$\max Z = 2\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 37+4\cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції Д на одну одиницю. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимо Δb_1. Тоді, якщо $b_1' = b_1 + \Delta b_1$, то новий оптимальний план

$$X^* = (0; 0; 35 - 1/2\Delta b_1; 45 + 1/2\Delta b_1; 0; 30 - \Delta b_1; 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq 90; \\ \Delta b_1 \leq 30; \end{cases}$$

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30.$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$250 - 90 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 250 + 30,$$

$$160 \leq b_1 \leq 280.$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$250 - 90 \cdot 1/2 \leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot 1/2,$$

$$240 \leq Z_{\max} \leq 300,$$

а оптимальний план виробництва продукції

(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) $\leq X^* \leq$ (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0; \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17{,}5; \\ \Delta b_3 \leq 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \leq \Delta b_3 \leq 45,$$

$$62{,}5 \leq b_3 \leq 125.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$250 \leq \max Z \leq 375$$

(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) $\leq X^* \leq$ (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4. За умовою задачі обсяги всіх трьох ресурсів змінюються відповідно $\Delta b_1 = +10, \Delta b_2 = -10, \Delta b_3 = +20$. Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B}.$$

З останньої симплекс-таблиці можна записати обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250+10 \\ 280-10 \\ 80+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто $X^*(0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)$.

Усі $x_j \geq 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається Y^*=(1/2; 0; 2). Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на $\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = +45$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285 + 45 = 330$ ум. од.

5. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 & \text{(ï ðî äóêö³ÿ À í åðåí òàáåëüí à);} \\ 5 \cdot 1/2 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13/2 > 4 & \text{(ï ðî äóêö³ÿ Â í åðåí òàáåëüí à);} \\ 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 = 3 & \text{(ï ðî äóêö³ÿ Ñ ðåí òàáåëüí à);} \\ 4 \cdot 1/2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 = 4 & \text{(ï ðî äóêö³ÿ Ä ðåí òàáåëüí à).} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» – «x_4». їх оптимальні значення $y_4 = 5; y_5 = 5/2; y_6 = 0; y_7 = 0$. Тому продукція А і В нерентабельна, а продукція С і Д — рентабельна.

6. Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається таким: X^* = (0;0;35;45).

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось тим, що при цьому симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів оцінкового рядка. Нові оцінки $(Z_j - C_j)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта C_1 позначимо ΔC_1. Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка $Z_1 - C_1$.

$$(Z_1 - C_1) = 4\cdot(-2) + 0\cdot 1 + 3\cdot 3/2 - (2 + \Delta C_1) = 5 - \Delta C_1.$$

За умови $Z_1 - C_1 \ge 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta C_1 \ge 0$, тобто $\Delta C_1 \le 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції А за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться X^* = (0; 0; 35; 45). Лише максимальний дохід зміниться на max $\Delta Z = \Delta C_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта ΔC_2:

$$(Z_2 - C_2) = 5/2 - \Delta C_2 \ge 0; \Delta C_2 \le 5/2$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції В на 5/2 ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta Z = \Delta C_2 X_2$.

Дещо складніше розраховується інтервал зміни коефіцієнтів для базисних змінних. У цьому разі зміни відбуваються також у стовпчику «$C_{баз}$» симплекс-таблиці, а це, у свою чергу, стосується всіх ненульових оцінок $(Z_j - C_j)$. Так, для базисної змінної x_3 зміна коефіцієнта на ΔC_3 приведе до таких оцінок:

$$(Z_1 - C_1) = 4\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + (3 + \Delta C_3)\cdot 5 - 2 = 5 + 5\Delta C_3;$$
$$(Z_2 - C_2) = 4\cdot 1/2 + 0\cdot 1 + (3 + \Delta C_3)\cdot 3/2 - 4 = 5/2 + 3/2\Delta C_3;$$
$$(Z_5 - C_5) = 4\cdot 1/2 + 0\cdot(-1) - 1/2\cdot(3 + \Delta C_3) - 0 = 1/2 - 1/2\Delta C_3;$$
$$(Z_7 - C_7) = 4\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 2\cdot(3 + \Delta C_3) - 0 = 2 + 2\Delta C_3.$$

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - C_j \ge 0$. Тому інтервал для ΔC_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5 + 5\Delta C_3 \ge 0, \\ 5/2 + 3/2\Delta C_3 \ge 0, \\ 1/2 - 1/2\Delta C_3 \ge 0, \\ 2 + 2\Delta C_3 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta C_3 \ge -1, \\ \Delta C_3 \ge -5/3, \\ \Delta C_3 \le 1, \\ \Delta C_3 \ge -1; \end{cases}$$

$$-1 \le \Delta C_3 \le 1,$$
$$2 \le C_3 \le 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції С може збільшуватися та зменшуватися на 1 ум. од. і перебувати в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається X^* = (0;0;35;45).

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта C_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5 - 2\Delta C_4 \ge 0, \\ 5/2 + 1/2\Delta C_4 \ge 0, \\ 1/2 + 1/2\Delta C_4 \ge 0, \\ 2 - \Delta C_4 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta C_4 \le 5/2, \\ \Delta C_4 \ge -5, \\ \Delta C_4 \ge 1, \\ \Delta C_4 \le 2; \end{cases}$$

$$-1 \le \Delta C_4 \le 2,$$
$$3 \le C_4 \le 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції Д зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то оптимальний план виробництва продукції на підприємстві не зміниться (X^*= (0; 0; 35; 45)).

Якщо коливання ціни продукції виходять за визначені межі, то план X^*= (0; 0; 35; 45) вже не буде оптимальним і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язування задачі.

Виконаний у цій задачі аналіз лінійної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і дає змогу дослідити можливі зміни цього оптимального плану в результаті коректування умов прямої задачі.

5.3. Аналіз цільової функції і коефіцієнтів технологічної матриці. Приклади:

Фірма виготовляє продукцію трьох видів А, В і С. Для цього потрібний певний час обробки кожної продукції на різних групах обладнання (1, 2, 3) (див. таблицю).

Ресурс	Час обробки продукції, год, за видами		
	A	B	C
1	1	2	4
2	2	4	2
3	1	1	2

Можливий час роботи обладнання кожного типу становить відповідно 360, 520 та 220 год на місяць. Ціна одиниці продукції А дорівнює 90 дол., продукції В — 110дол., а продукції С — 150 дол. Визначити, яку продукцію і в якій кількості слід виготовляти, щоб фірма отримувала найбільший дохід.

Розв'язування задачі симплекс-методом дає таку останню симплексну таблицю:

Базис	$C_{ááç}$	План	90	110	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$Z_j - C_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70

Керівництво фірми цікавить, чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким буде новий оптимальний план у кожній з наведених далі ситуацій.

1. Фірма може збільшити час роботи обладнання груп 2 та 3 відповідно на 100 та 80 год за місяць, орендуючи для цього додаткове обладнання, яке коштуватиме 5000 дол. Чи вигідно це? Якщо вигідно, то яким має бути новий план виробництва продукції?

2. Фінансовий відділ фірми вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може призвести до зниження ціни на продукцію В на 25 дол. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції фірми?

3. Відділ досліджень і розробок фірми пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції С. Для виробництва одиниці цієї нової продукції потрібний час роботи обладнання груп 1, 2 та 3 становить відповідно 4, 3 та 1

год. Орієнтовна ціна одиниці нової продукції дорівнює 120 дол. Керівництво фірми цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4. Споживач продукції А за певних обставин порушує попере дню домовленість і відмовляється прийняти більш як 100 од. продукції А. Визначити, як фірма має змінити план виробництва своєї продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Розв'язування. Із наведеної в умові задачі симплекс-таблиці маємо: $X^* =$ (180; 40; 0; 100; 0; 0), $\max Z = 20\ 600, Y^* =$ (0; 10; 70). Оптимальним планом виробництва продукції на фірмі є випуск 180 од. продукції А та 40 од. продукції В. Виготовлення продукції виду С не передбачається. При цьому фірма отримає максимальний дохід у розмірі 20 600 дол. на місяць.

1. Збільшення часу роботи обладнання дасть змогу збільшити випуск продукції, тобто змінить оптимальний план і дохід фірми. Оскільки $\Delta b_1 = 0,\ \Delta b_2 = 100,\ \Delta b_3 = 80,$ новий оптимальний план визначається так:

$$X^* = D^{-1} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 360+0 \\ 520+100 \\ 220+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 290 \end{pmatrix}.$$

Новий план допустимий (всі $x_j \geq 0$), і тому оптимальні двоїсті оцінки зберігають свої значення: $Y^* =$ (0; 10; 70). Приріст доходу фірми в результаті зміни оптимального плану виробництва продукції розраховується так:

$$\max \Delta Z = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 100 \cdot 10 + 80 \cdot 70 = 6600 \text{ дол.}$$

Оскільки дохід фірми від додаткового використання обладнання груп 2 і 3 перевищує витрати на оренду цього обладнання (6600 > 5000), то природно, що така тактика фірми буде вигідною. При цьому оптимальним планом виробництва стане випуск 290 од. продукції А і 10 од. продукції В. Невикористаний час роботи обладнання групи 1 зменшиться до 50 год на місяць, а дохід фірми за відрахуванням витрат на оренду обладнання дорівнюватиме 20 600 + (6600 - 5000) = 22 200 дол. на місяць.

2. Зміна ціни одиниці продукції В на ΔC_2 (25 дол.) стосується всього оцінкового рядка симплекс-таблиці, оскільки x_2 є базисною змінною. Нові $Z_5 - C_5$ матимуть такі значення:

$$Z_3 - C_3 = 10 - \Delta C_2 = 10 + 25 = 35;$$

$$Z_5 - C_5 = 10 + 1/2\Delta C_2 = 10 - 12,5 = -2,5;$$

$$Z_6 - C_6 = 70 - \Delta C_2 = 70 + 25 = 95.$$

Коли б усі здобуті оцінки задовольняли умову $Z_5 - C_5 \geq 0$, то це означало б, що попри зниження ціни план виробництва продукції на фірмі не зміниться. Але оцінка $Z_5 - C_5$ не задовольняє умову оптимальності задачі на максимум, і тому можна зробити такий висновок. Істотне зниження ціни одиниці продукції В порушує визначений раніше оптимальний план виробництва продукції, оскільки випуск продукції виду В стає для фірми невигідним, нерентабельним.

Новий оптимальний план визначається у процесі подальшого розв'язування задачі симплекс-методом:

Базис	$C_{баз}$	План	90	85	150	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	–
$\leftarrow x_2$	85	40	0	1	–1	0	1/2	–1	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	–
$Z_j - C_j \geq 0$		19 600	0	0	35	0	–2,5	95	
x_4	0	140	0	1	2	1	0	–1	
x_5	0	80	0	2	–2	0	1	–2	
x_1	90	220	1	1	2	0	0	1	
$Z_j - C_j \geq 0$		19 800	0	5	30	0	0	90	

Отже, у розглянутій ситуації зниження ціни одиниці продукції виду В на 25 дол. різко змінить структуру та обсяги виробництва продукції на фірмі. Вигідним стане випуск лише продукції А у кількості 220 од.: при цьому час роботи обладнання груп 1 і 2 використовуватиметься повністю. Усе це призведе до зменшення доходу фірми до 19 800 дол. на місяць.

3. Обсяг виробництва нової продукції в оптимальному плані позначимо x_7. Тоді математична модель прямої задачі матиме такий вигляд:

$$Z = 90x_1 + 10x_2 + 150x_3 + 120x_7 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_7 \leq 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_7 \leq 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 \leq 220, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

У математичній моделі двоїстої задачі змінній x_7 відповідатиме таке обмеження: $4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 120$. Оцінимо рентабельність нової продукції за допомогою двоїстих оцінок: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 70 = 100$, що є меншим за 120 дол. Загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці нової продукції, не перевищує орієнтовної ціни цієї продукції, і тому її виробництво для фірми є вигідним, рентабельним. Завдяки цьому визначений раніше оптимальний план виробництва продукції можна поліпшити за рахунок уведення в нього x_7.

Для цього за допомогою оберненої матриці необхідно визначити елементи стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці:

$$D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{17} \\ \alpha_{27} \\ \alpha_{37} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Результати однієї ітерації симплекс-методу, що приводить до нового оптимального плану задачі, наведено далі.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	120	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$\leftarrow x_4$	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	5/2	40
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	1/2	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	1/2	360
$Z_j - C_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	–20	
x_7	120	40	0	0	6/5	2/5	–1/5	0	1	
x_2	110	20	0	1	–8/5	–1/5	3/5	–1	0	
x_1	90	160	1	0	12/5	–1/5	–2/5	2	0	

$Z_j - C_j \geq 0$	21 400	0	0	34	8	6	70	0

Як бачимо з таблиці, X^* = (160; 20; 0; 0; 0; 0; 40), $\max Z = 21\,400$. Керівництво фірми має підтримати пропозицію відділу досліджень та розробок і налагодити виробництво нової продукції, яка є рентабельною, виготовляючи її в кількості 40 од.; відповідно продукції А — 160 од. і продукції В — 20 од. Такий новий оптимальний план виробництва продукції збільшить дохід фірми до 21 400 дол. на місяць.

4. Четверта запропонована ситуація математично пов'язана з уведенням в умову задачі додаткового обмеження, що може при вести до таких наслідків:

а) нове обмеження для визначеного оптимального плану виконується і тоді воно є надлишковим, зайвим і його включення до моделі не змінює визначеного плану;

б) нове обмеження для визначеного оптимального плану не виконується, і тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу не обхідно знайти новий оптимальний план.

За умовою задач додатковим є обмеження $x_1 \leq 100$. Але воно суперечить оптимальній кількості продукції А, яка дорівнює 180 од. Тому необхідно приєднати це додаткове обмеження до симплекс-таблиці та продовжити розв'язування задачі, але вже за допомогою двоїстого симплекс-методу. Для цього спочатку зведемо додаткове обмеження до канонічного вигляду:

$$x_1 + x_7 = 100.$$

Оскільки в оптимальному плані змінна x_1 є базисною, її необхідно записати через небазисні невідомі. Це робиться так. У симплекс-таблиці, яку наведено в умові задачі, рядок змінної “x_1” подається рівнянням

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1/2 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 = 180.$$

З цього рівняння визначимо x_1:

$$x_1 = 180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6.$$

Підставивши цей вираз в додаткове обмеження, отримаємо

$$180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = 100$$

або

$$-3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = -80.$$

У такому вигляді додаткове обмеження дописується в симплекс-таблицю. Застосування двоїстого симплекс-методу приведе до нового оптимального плану задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	0
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	0
$\leftarrow x_7$	0	–80	0	0	–3	0	1/2	–2	1
$Z_j - C_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	0
x_4	0	20	0	0	0	1	0	–2	1
x_2	110	200/3	0	1	0	0	1/3	–1/3	–1/3
x_1	90	100	1	0	0	0	0	0	1
x_3	150	80/3	0	0	1	0	–1/6	2/3	–1/3

$Z_j - C_j \geq 0$	$\frac{61\ 000}{3}$	0	0	0	0	35/3	190/3	10/3

З останньої таблиці маємо $X^* =$ (100; 200/3; 80/3; 20; 0;0), $\max Z = 61\ 000/3 \approx 20\ 000$.

Проаналізуємо цей план. Реалізація запропонованої в умові задачі ситуації змінює структуру та кількісний вираз оптимального плану. Тепер з урахуванням вимог споживача фірма виготовлятиме 100 од. продукції А, 200/3 од. продукції В і 80/3 од. продукції С. У результаті такого плану випуску продукції дохід фірми зменшиться до 20 333 дол. на місяць.

МОДУЛЬ 2

ТЕМА 6 Постановка транспортної задачі. Побудова початкового опорного плану. Знаходження оптимального плану перевезень методом потенціалів

6.1. Економічна і математична постановка ТЗ. Умови існування розв'язку ТЗ.

Транспортна задача — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \qquad (5.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right), \qquad (5.4)$$

де x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; a_i — запаси продукції *i*-го постачальника; b_j — попит на продукцію *j*-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5.5)$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.2)—(5.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = \left(x_{ij}\right) \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}^*_{ij}\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (5.1) набуває найменшого значення.

! Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ **.**

6.2. Методи побудови опорного плану. Впровадження. Двоїстість.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є ***метод потенціалів***.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} . вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

Побудову першого плану за **методом північно-західного кута** починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови першого опорного плану одним із розгляну тих методів у таблиці має бути заповнено *(m + n* - 1) клітинок, де *m* — кількість постачальників; *n* — кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***не виродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує (*m* + *n* – 1), то початковий план побудовано неправильно і він є неопорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як *(m + n* - 1), то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

! Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ ***існують числа*** u_i ***та*** v_j***, для яких виконується умова*** $\begin{matrix} u_i + v_j = c_{ij}, & x_{ij} > 0, \\ u_i + v_j \le c_{ij}, & x_{ij} = 0 \end{matrix}$

для всіх $i = \overline{1,m}$***, та*** $j = \overline{1,n}$***, то він є оптимальним планом транспортної задачі.***

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова нєвиконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$. Для вибраної порожньої клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+».

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв'язування транспортних задач, наведених далі.

6.3. ТЗ за критерієм часу. Двостапна ТЗ. Розв’язання по сітці.

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i–ї фабрики до j-го замовника $\left(i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,4}\right)$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} + 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + \\ + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \to \min$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + \\ + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Розв'язування. Розв'язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 2 +	5 40–	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 –60	2 0+	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є не виродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 2, \quad v_1 = -1, \; v_2 = -1, \; v_3 = -1.$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$$
$$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$$
$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$$
$$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «-» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60; 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 — 40 од. продукції, $A_2B_3 - (60 - 40) = 20$ од., $A_2B_4 - (0 + 40) = 40$ од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 –110	4	2 40+	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 –20	2 40+	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 40–	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4\cdot 90 + 2\cdot 60 + 2\cdot 60 + 2\cdot 20 + 1\cdot 40 + 2\cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

ТЕМА 7 УГОРСЬКИЙ МЕТОД РОЗВ' ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Нагадаємо, що ця задача є окремим випадкам класичної транспортної задачі і, як наслідок, є задачею транспортного типу. Стосовно задачі про призначення симплексний метод не ефективний, оскільки будь-яке її припустиме базисне рішення є виродженим. Специфічні особливості задачі про призначення дозволили розробити ефективний метод її рішення, відомий як «угорський метод».

Основна ідея угорського методу полягає в переході від початкової матри-ці вартості С до еквівалентної їй матриці вартості С* з невід'ємними елемента-ми і системою n незалежних нулів, тобто з сукупністю нульових елементів мат-риці, з яких ніякі два не належать тому самому рядку або тому самому стовпцю. Зрозуміло, що квадратна матриця порядку n не може мати систему більш ніж з n незалежних нулів. Згідно (3.6), можна стверджувати, що для будь-якого при-пустимого рішення задачі про призначення матриця змінних X = (xij) містить n(n - 1) нулів та n одиниць, з яких ніякі дві не належать тому самому рядку або тому самому стовпцю. Отже, якщо ці n одиниць в матриці X розставити відпо-відно до розташування елементів системи n незалежних нулів еквівалентної ма-триці вартості С*, то одержимо припустиме рішення даної задачі про призна-чення. Більш того, знайдене припустиме рішення є оптимальним рішенням, оскільки йому відповідає нульове значення цільової функції, визначуваною матрицею С*, яке не може бути зменшене через позитивність елементів еквівале-нтної матриці вартості С*.

Алгоритм угорського методу розв'язання задачі про призначення складається з підготовчого етапу та не більше за n-2 ітерацій, що послідовно повторюються. На підготовчому етапі одержують матрицю вартості C_0, еквівалентну матриці вартості цієї задачі про призначення і таку, що містить первинну систему незалежних нулів. На кожній ітерації кількість незалежних нулів в перетвореній еквівалентній матриці вартості збільшується не менше ніж на одиницю. Через кінцеву кількість ітерацій система незалежних нулів в перетвореній еквівалентній матриці вартості С* складатиметься з n елементів, що означає завершення процесу рішення даної задачі.

Підготовчий етап полягає в послідовному виконанні наступних трьох кроків. Крок 1. Для кожного стовпця матриці вартості С задачі про призначення

знаходять мінімальний елемент

Звернемося до прикладу. Проілюструємо підготовчий етап алгоритму угорського методу для наступної матриці вартості:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 10 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. У першому стовпці мінімальним є елемент l_1=c_{11} = 5, в другому l_2=c_{22} = 4, в третьому l_3=c_{33} = 3, і четвертому l_4=c_{14} = 1. Віднімаємо ці значення з відповідних стовпців і приходимо до матриці

$$C'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Знаходимо мінімальні елементи в рядках матриці C'. У першому рядку d_1 = c'_{11}=0, у другому d_2 = c'_{22}=0, 0, у третьому d_3 = c'_{33}=0, у четвертому d_4 = c'_{42}=0. Віднімаючи ці значення з відповідних рядків, одержуємо матрицю

$$C'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Відзначаємо систему незалежних нулів:

$$C_0=\begin{pmatrix} 0* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ або } C_0=\begin{pmatrix} 0* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0* & 4 \\ 6 & 0* & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тепер перейдемо до опису ітерації алгоритму угорського методу рішення задачі про призначення. Нехай проведено m ітерацій (m³0) в результаті яких одержана еквівалентна матриця вартості Cm. Крок 1. У матриці Cm підраховуємо кількість елементів в системі незале-жних нулів, яку позначимо k. Якщо k = n, то переходимо до кроку 2. Якщо k < n, то переходимо до кроку 3.

Крок 2. Відповідно до системи n незалежних нулів еквівалентної матриці вартості C*=Cm у матриці змінних моделі X розставляємо n одиниць, а решту її елементів замінюємо нулями. Рішення завершене.

Крок 3 . Стовпці матриці Cm, що містять 0*, виділяємо знаком «+», їх елементи називають виділеними (решта елементів матриці називається невиділеними). Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Якщо серед невиділених елементів матриці C_m є хоч би один нуль, то переходимо до кроку 5. Інакше переходимо до кроку 9.

Крок 5. Якщо рядок, що містить невиділений нуль, містить так само і 0*, то переходимо до кроку 6. Інакше переходимо до кроку 7.

Крок 6. Знайдений невиділений нуль позначаємо через 0', рядок, що містить його, відзначаємо знаком «+» і всі її елементи називаємо виділеними. Знімаємо знак «+» із стовпця, в якому розташований 0* з виділеного рядка, і переходимо до кроку 4.

Крок 7. Знайдений невиділений нуль позначаємо 0' і, починаючи з нього, будуємо так званий L-ланцюжок за наступним правилом: початковий 0', далі 0*, розташований з ним у одному стовпці (якщо такий є); потім 0', розташований в одному рядку з передуючим 0*; далі 0*, розташований в одному стовпці з передуючим 0' (якщо такий є) і т.д. Переходимо до кроку 8.

Побудова L-ланцюжка здійснюється однозначно. Дійсно, в кожному стовпці не може бути більш одного 0*, а в кожному рядку не може бути більш одного 0' (після того, як в рядку один нуль виділений штрихом, цей рядок виділяють і ніякі інші його нулі не можуть бути виділені). L-ланцюжок завжди починається з 0' і закінчується 0'. Принципову схему побудови L-ланцюжка подано на рис. 3.1.

Дійсно, нехай $C_m = (c_{ij}^m)$ та існує L-ланцюжок вигляду

$$L = (c^m_{i_1 j_1}, c^m_{i_2 j_1}, c^m_{i_2 j_2}, \dots, c^m_{i_k j_k}, c^m_{i_{k+1} j_k}),$$

За стовпцем 0' $\longrightarrow$ ' За рядком 0' $\longrightarrow$

Рис**. 3.1 - **Схема побудови L-ланцюжка

який не можна продовжити, причому $c^m_{i_k j_k}$ відзначений як 0', $c^m_{i_{k+1} j_k}$ відзначений як 0*. В цьому випадку в матриці C_m стовпець з номером j_k не виділений знаком «+», оскільки в цьому стовпці є елемент $c^m_{i_k j_k}$ типу 0'. В той же час цей стовпець містить 0* (так відзначений елемент $c^m_{i_{k+1} j_k}$). Отже, знак виділення

стовпця з номером j_k був знятий і рядок з номером j_{k+1} містить 0', оскільки на кроці 6 його було виділено. Таким чином, L-ланцюжок можна продовжити, що суперечить зробленому припущенню. Зауважимо, що кількість елементів в L-ланцюжку є непарною. При цьому L-ланцюжок може складатися з одного елементу, якщо в одному стовпці з тим, що розглядається 0' немає 0*.

Крок 8. У L-ланцюжку усі 0* замінюємо нулями, а усі 0' - символами 0*, внаслідок чого в еквівалентній матриці вартості C_m одержуємо нову систему незалежних нулів, кількість елементів якої на одиницю більша за кількість елементів в попередній системі незалежних нулів (в L-ланцюжку кількість елементів 0' завжди на одиницю перевищує кількість елементів 0*). Поза L-ланцюжком усі 0' замінюємо нулями та знімаємо всі виділення рядків і стовпців матриці C_m. Переходимо до кроку 1.

Крок 9. Серед невиділених елементів матриці C_m знаходимо мінімальний елемент h (h>0 через позитивність елементів еквівалентної матриці вартості C_m та відсутність невиділених нулів). Значення h віднімаємо з елементів невиділених рядків та додаємо до елементів виділених стовпців. Знов одержану еквівале-нтну матрицю вартості з невід'ємними елементами, в якій щонайменше один з невиділених елементів є нулем, позначаємо через C_m та переходимо до кроку 5.

Приклад 3.2. Повернемося до задачі про призначення, для якої в прикладі 3.1 виконаний підготовчий етап угорського методу та одержана еквівалентна матриця вартості C_0. Розглянемо ітераційний процес угорського методу рішення цієї задачі.

***Перша ітерація*.**

Крок 1. Кількість k елементів в системі незалежних нулів матриці C_0 дорівнює трьом. А оскільки n =4 та k < n, переходимо до кроку 3.

Крок 3. Виділяємо стовпці матриці C_0, що містять 0*:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} + & + & + & \end{array} \\ C_0 = & \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Один з елементів невиділеного четвертого стовпця матриці C_0 є нульовим (у першому рядку). Переходимо до кроку 5.

Крок 5. У першому рядку матриці C_0 разом з невиділеним нулем ($c_{14}^{0} = 0$) є елемент c_{11}^{0} , виділений як 0*. Переходимо до кроку 6.

Крок 6. Знайдений невиділений нуль позначаємо через 0' і виділяємо перший рядок, що містить його. Знімаємо знак виділення з першого стовпця, в якому розташований 0* з першого рядка:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} & + & + & \end{array} \\ & + & \\ C_0 = & & \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Серед невиділених елементів матриці C_0 немає нулів. Переходимо до кроку 9.

Крок 9. Серед невиділених елементів матриці C_0 знаходимо мінімальний елемент h = min (5, 3, 6, 6, 4, 6) = 3. Значення h = 3 віднімаємо з елементів невиділених рядків з номерами 2, 3, 4 та додаємо до елементів виділених стовпців з номерами 2, 3. Знов одержану еквівалентну матрицю вартості. позначаємо C_0:

$$C_0 = \begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ & + & + & \ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходимо до кроку 5

Крок 5. У третьому рядку, що містить невиділений нуль ($c_{31}' = 0$), є й виділений нуль ($c_{33}' = 0*$). Переходимо до кроку 6.

Крок 6. Знайдений невиділений нуль позначаємо 0', третій рядок, що містить його, виділяємо. Знімаємо знак виділення з третього стовпця, в якому розташований 0* з третього рядка:

$$C_0 = \begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ & + & + & \ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Серед невиділених елементів матриці C_0 немає нулів. Переходимо до кроку 9.

Крок 9. Серед невиділених елементів матриці C_0 знаходимо мінімальний елемент h = min{2, 3, 3, 3, 5, 3}= 2. Значення h = 2 віднімаємо з елементів невиділених рядків з номерами 2 і 4 та додаємо до елементів виділеного другого стовпця. Знов одержану еквівалентну матрицю вартості позначаємо C_0.

$$C_0 = \begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ & + & + & \ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0 & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходимо до кроку 5.

Крок 5. У другому рядку, що містить невиділений нуль ($c_{21}^0 = 0$), є виділений нуль ($c_{22}^0 = 0*$). Переходимо до кроку 6.

Крок 6. Знайдений невиділений нуль позначаємо 0’, другий рядок, що містить його, виділяємо. Знімаємо знак виділення з другого стовпця, в якому розташований 0* з другого рядка:

$$
\begin{array}{llllllll}
 & & + & 0^* & 7 & 7 & 0' & \\
C_0 & & & + & 0^* & 7 & 7 & 0' \\
 & C_0 = & & + & 0' & 0^* & 1 & 1 \\
 & & & + & 0' & 3 & 0^* & 1 \\
 & & & & 1 & 0 & 3 & 1
\end{array}
$$

Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Серед невиділених елементів матриці C_0 є нуль ($c^0_{42} = 0$). Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Оскільки четвертий рядок, що містить невиділений нуль, не містить 0*, то переходимо до кроку 7.

Крок 7. Знайдений невиділений нуль позначаємо символом 0’ і будуємо

L- ланцюжок ($c^0_{42}, c^0_{22}, c^0_{21}, c^0_{11}, c^0_{14}$:

Переходимо до кроку 8.

Крок 8. У L-ланцюжку всі символи 0* замінюємо нулями, а символи 0' замінюємо на 0*. Поза L-ланцюжком всі 0' замінюємо нулями та знімаємо всі виділення рядків і стовпців. Одержану матрицю вартості позначаємо C_1:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 0^* \\ 0^* & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходимо до кроку 1 наступної ітерації (m = 2).

***Друга ітерація*.**

Крок 1. Кількість елементів k в системі незалежних нулів матриці C_1 до-рівнює чотирьом. А оскільки k =4= n, то переходимо до кроку 2.

Крок 2. У відповідності з еквівалентною матрицею вартості $C^*=C_1$ випису-ємо оптимальне рішення даної задачі, представлене у вигляді матриці її змінних

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На практиці зустрічаються задачі, для яких параметр c_{ij} має смисл ефек-тивності виконання і-ї роботи j-м виконавцем. У таких завданнях сумарна ефе-ктивність виконання всіх робіт має бути максимальною, що призводить до за-дачі (3.7). Для перетворення задачі (3.7) на стандартну задачу (3.6) можна ско-ристатися формулою

(3.8), або змінити перший крок підготовчого етапу угор-ського методу, який в цьому випадку приймає наступний вигляд.

Крок 1. Для кожного стовпця матриці С задачі про призначення (3.7) зна-ходимо максимальний елемент

$$= \max_{i=\overline{1,n}} c_{ij}\ , \quad j=\overline{}$$

і формуємо еквівалентну матрицю вартості С’, в якій

$c'_{ij} = l_j - c_{ij}, i, j = \overline{1, n}$.

Приклад 3.3. Розглянемо задачу про призначення вигляду (3.7) з матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \\ 7 & 8 & 10 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку

$= \max\{10,5,7,3\}$ $_1 = 10$, $\quad l_{12} = \max\{6,7,10,4\} = 10$,

$= \max\{7,9,8,8\}$ $_3 = 9$, $\quad l_{14} = \max\{9,3,5,2\} = 9$.

і еквівалентна матриця вартості має вигляд

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця співпадає з матрицею, одержаною на першому кроці підгото-вчого етапу угорського методу в прикладі 3.1 (завдання мінімізації витрат). А оскільки по-дальші кроки підготовчого етапу не зміняться, то зрозуміло, що рі-шення X, одержане в прикладі 3.2 буде оптимальним рішенням і для даної за-дачі про призначення (задачі максимізації сумарної ефективності).

Контрольні запитання

1. Які специфічні властивості дозволяють виділити транспортні задачі в окремий клас з множини задач лінійного програмування?

2. Опишіть методи побудови припустимого плану транспортної задачі.

3. Скільки ненульових елементів має містити невироджений базисний план транспо-ртної задачі?

4. Сформулюйте критерій оптимальності для припустимого плану транспортної задачі.
5. Поясніть, на чому заснований метод потенціалів?
6. З чого випливає критерій оптимальності припустимого плану транспортної задачі?
7. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.
8. Які умови повинні бути дотримані під час побудови ланцюжка перетворення плану

в методі потенціалів?

9. Що треба робити під час виникнення ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?

10. Як формулюють задачу про призначення?
11. Які значення мають приймати змінні задачі про призначення?
12. У чому полягає зміст угорського методу розв’ язання задачі про призначення?

13. Охарактеризуйте особливості алгоритму угорського методу розв’ язання задачі про призначення.

ТЕМА 8 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇХ ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

8.1. Економічно сутність і постановка задач НЛП.

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками. У загальному вигляді нелінійна економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = f(x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n) \to \max(\min)$$

за умов

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n)\{\le, =, \ge\} b_i$$

$$\left(i = \overline{1, m}\right),$$

де $f(x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n)$ – нелінійні функції.

Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду. Проте в такому разі можливі значні похибки. Нехай, наприклад, собівартість продукції у визначено як функцію $y = a + \frac{b}{x}$, де x — обсяги виробництва. Ввівши заміну $z = \frac{1}{x}$, дістанемо лінійну залежність $y = a + bz$. За такої заміни похибки немає. А коли $y = -ax^2 + bx + c$, то заміна цієї залежності деякою лінійною функцією $y = d + fx$ призводить до значних похибок, що ілюструє рис. 6.3.

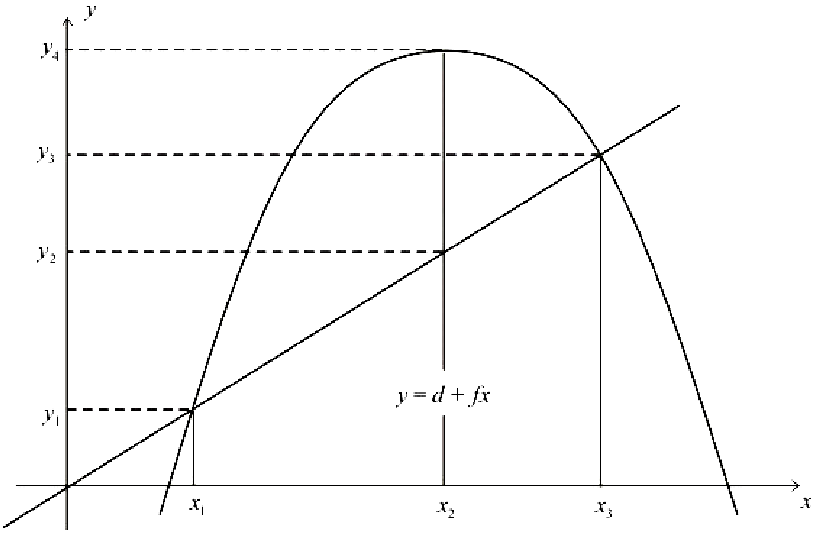


Рис. 6.3

У точках x_1 і x_3 значення собівартості для обох розглядуваних функцій однакові, але в усіх інших точках ці значення відрізняються, причому в точці x_2 значною мірою:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - fx_2 = ax_2^2 + (b - f)x_2 + (c - d).$$

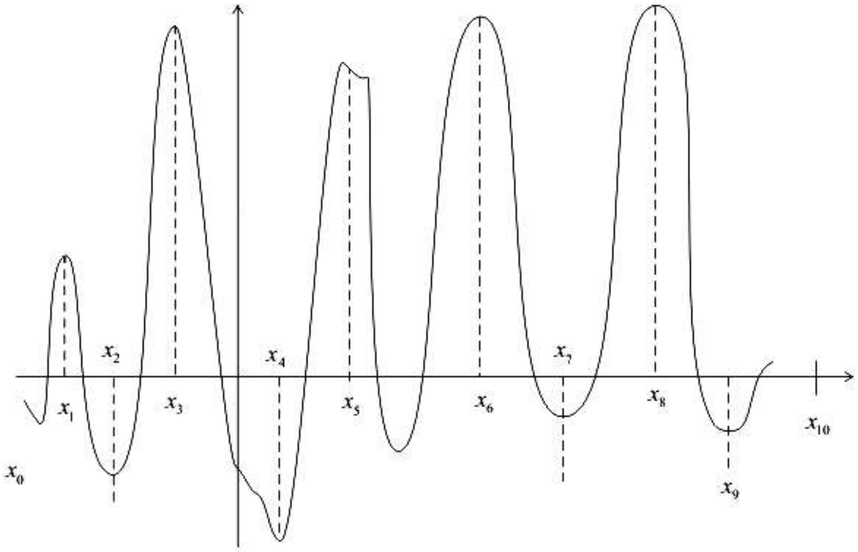
Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'я зок універсальним методом — симплексним. При цьому немає проблеми з доведенням існування такого розв'язку. Адже в ре зультаті розв'язування задачі симплексним методом завжди діс таємо один із варіантів відповіді: 1) знайдено розв'язок; 2) задача суперечлива, тобто її розв'язку не існує; 3) цільова функція не обмежена, отже, розв'язку також немає.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних ПЕОМ відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

Для розв'язування нелінійних задач застосовують наближені методи, стикаючись із проблемою локальних і глобальних оптимумів. Наприклад, на рис. 6.4. маємо на відрізку локальні оптимуми в точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$, а глобальний — у точці x_4 і x_6.



Більшість наближених методів дають змогу знаходити локальний оптимум. Визначивши всі локальні оптимуми, методом порівняння можна знайти глобальний. Проте для практичних розрахунків такий метод не є ефективним. Часто наближені методи не «вловлюють» глобального оптимуму, зокрема тоді, коли глобальний оптимум лежить досить близько до локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ розіб'ємо на десять підвідрізків і глобальний оптимум потрапить у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (див. рис. 6.4), а ліворуч від x_i та праворуч від x_{i+1} крива $y = f(x)$ підніматиметься, то глобальний оптимум буде пропущеним. Звернемо увагу ще на один дуже важливий момент. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною. Для нелінійних задач точка, яка є оптимальним планом, може бути граничною або такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків (планів).

***8.2. Класичний метод оптимізації задач МЛП та базі використання множників Лагранжа та їх економічна інтепритація*.**

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які грунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають ***прямі*** та ***непрямі***. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є ***градієнтні***. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи ***квадратичного*** та ***сепарабельного*** програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами ***зведеного градієнта***, скажімо ***методом Якобі***, та ***множників Лагранжа***. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму ***Куна—Танкера***.

Розглянемо метод множників Лагранжа на прикладі такої за дачі нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, \quad x_2 \quad \dots, \quad x_n) \to \max(\min) \qquad (6.15)$$

за умов

$$q_i(x_1, \quad x_2 \quad \dots, \quad x_n) = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (6.16)$$

де функції $f(x_1, \quad x_2 \quad \dots, \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2 \quad \dots, \quad x_n)$ диференційовані.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і подається у вигляді:

$$L(x_1, x_2 \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2 \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2 \dots, x_n)), \qquad (6.17)$$

де λ_i — не визначені поки що величини, так звані множники Лагранжа.

Знайшовши частинні похідні функції ***L*** за всіма змінними і прирівнявши їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases}$$

запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \\ b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases} \qquad (6.18)$$

що є, як правило, нелінійною.

Розв'язавши цю систему, знайдемо $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — стаціонарні точки. Оскільки їх визначено з необхідної умовиекстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є точкою перегину (сідлова точка). Отже, для визначення достатніх умов екстремуму та діагностування його типу існує спеціальний алгоритм [15].

Розв'яжемо методом множників Лагранжа наведену далі задачу.

Задача 1. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури — озиму пшеницю та цукрові буряки.

Техніко-економічні показники вирішування цих культур від биває таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, x_1	під цукровий буряк, x_2
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_1 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай x_1 — площа ріллі, відведена під сотні га озимої пшениці; x_2 — площа ріллі, відведена під цукрові буряки, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$f = 4\left(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 + 35\left(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650\right)x_2 =$$
$$= 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) +$$
$$+\lambda_1(12 - x_1 - x_2) = 0.$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 35(-37{,}5x_2 + 300x_2 - 350) - \lambda_1 = 0 \\ \qquad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 35(-37{,}5x_2 + 300x_2 - 350),$$

або

$$-150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250. \qquad (6.19)$$

Із останнього рівняння цієї системи маємо:

$$x_1 = 12 - x_2$$

Підставивши значення x_1 у (6.19), дістанемо:

$$-150(12-x_2)^2+1600(12-x_2)^2-1600=-1312,5_2^2+10500x_2-12250,$$

або $1162_2^2-8500x_2+11450=0.$

Розв'язавши це квадратне рівняння, дістанемо $x_2^{(1)}\approx 1,78$ (178 ãà); $x_2\approx 5,53$ (553 ãà).

Відповідно дістанемо: $x_1^{(1)}\approx 10,22$ (1022 ãà); $x_1^2\approx 6,47$ (647 ãà)

Тобто сідловими точками є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=10,22 \\ x_2^{(1)}=1,78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)}=6,47 \\ x_2^{(2)}=5,53 \end{cases}$$

Обчислимо значення цільової функції у цих точках:

$$f(x_1=10,22; x_2=1,78)=4(800-1305,61+2044-1200)1022+$$
$$+35(300-39,615+267-650)178=-236247;$$
$$f(x_1=6,47; x_2=5,53)=4(800-523,26+1294-1200)647+$$
$$+35(300-382,26+829,5-650)553=4\ 625\ 863.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк — на площі 553 га.

8.3. Опукле програмування. Необхідні та достатні умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Такера.

Попит на продукцію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість, тис. грн., виробництва одиниці продукції на обладнанні кожної групи залежить від обсягу такого виробництва — відповідно x_1 і x_2 — та подається у вигляді для першої групи: $3x_1+4x_1^2$; для другої групи: $5x_2^2$.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов'язаних із собівартістю продукції.

Розв'язування. Математична модель задачі:

$$Z=3x_1+4x_1^2+5x_2^2\to\min$$

за умов

$$\begin{cases} x_1+x_2=120, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}. \end{cases}$$

Згідно з методом множників Лагранжа складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=3x_1+4x_1^2+5x_2^2+\lambda(120-x_1-x_2).$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні цієї функції за невідомими параметрами X_1, X_2 і λ, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=3+8x_1-\lambda=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=10x_2-\lambda=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial}=120-x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$x_1=66,5;$ $x_2=53,5;$ $\lambda=535.$

Отже, на першій групі обладнання необхідно випускати 66,5, а на другій

53,5 одиниць продукції. При цьому мінімальні витрати, тис. грн., становитимуть:

$$Z = 3 \cdot 66,5 + 4(66,5)^2 + 5(53,5)^2 = 32199,75 \to \min.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник. / М.К. Бугір – К.: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.
2. Глушик М.М. Математичне програмування: навч. посіб. / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак – Львів: «Новий світ-2000», 2006. – 216 с.
3. Дацко М.В. Дослідження операцій: навч. посіб. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів, 2009. – 288 с.
4. Катренко А.В. Дослідження операцій: підручник. / А.В. Катренко – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.
5. Тарасюк Г. М. Шваб Л. І. Планування діяльності підприємства. навч. посіб. /Г. М. Тарасюк, Л. І. Шваб – «Каравела», 2003 – 432с.
6. Тарасюк Г.М. Планова діяльність як системний процес управління підприємством: монографія / Г. М. Тарасюк. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 469 с.
7. Швайка Л. А. Планування діяльності підприємства: навч. посіб. / Л. А. Швайка – Львів : «Новий Світ - 2000», 2004. – 268 с.
8. Мазник Л.В. Оптимізаційні методи та моделі: навчально-методичний посібник до вивчення дисципліни, виконання лабораторних та контрольних робіт для студентів напряму підготовки 6.030505 «Управління персоналом та економіка праці», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит», 6.030507 «Маркетинг» всіх форм навчання / Укл.: Л.В. Мазник, Ю.М. Гринюк – К.: НУХТ, 2013. – 100 с.
9. Лавренчук В.П., Готинчак Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика Частина 3.-Чернівці , в-во Рута, 2007.
10. Збірник задач з курсу “Математичне програмування” /Укл. С.І. Наконечний, В.В. Вітлінський та ін. – К.:КНЕУ, 1998. – Ч.2.
11. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001.
12. Цегелик. Г.Г. Математичне програмування. Львів, 1995.