ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ КОШІ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Лепська Я. Я.
Національний авіаційний університет, Київ
Науковий керівник – Репета В.К., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ключові слова: функція, нерівність Коші, екстремум, похідна.

Задачі на екстремум відносять до найважливіших задач математики. Для функцій певного вигляду існують ефективні способи відшукання екстремальних значень без використання похідних. Одним із найпотужніших засобів такого підходу є використання нерівності Коші.

Нерівність Коші. Для будь-якого набору невід'ємних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ справджується нерівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} .$$

Рівність досягається у випадку, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Наслідок. Якщо сума додатних чисел є сталою, то їх добуток набуває найбільшого значення, коли ці числа рівні.

1.Розглянемо задачу відшукання найбільшого значення функції

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_n^{k_n} , \qquad (1)$$

якщо додатні числа $x_1, x_2, ..., x_n$ задовольняють рівність $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, де a – додатна стала; $k_1, k_2, ..., k_n$ – натуральні числа [1]. Маємо задачу умовного екстремуму функції n змінних. Її можна розв'язати, використовуючи, приміром, метод множників Лагранжа чи метод виключення. Покажемо як можна отримати шуканий результат, використовуючи наведений наслідок з нерівності Коші. Оскільки

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underbrace{x_1 \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_1}_{k_1} \cdot \underbrace{x_2 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_2}_{k_2} \cdot ... \cdot \underbrace{x_n \cdot x_n \cdot ... \cdot x_n}_{k_n}$$

є добутком $k_1 + k_2 + ... + k_n$ множників, то умову $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ подамо у вигляді суми $k_1 + k_2 + ... + k_n$ доданків, а саме:

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1} + \frac{x_1}{k_1} + ... + \frac{x_1}{k_1}}_{k_1} + \underbrace{\frac{x_2}{k_2} + \frac{x_2}{k_2} + ... + \frac{x_2}{k_2}}_{k_2} + ... + \underbrace{\frac{x_n}{k_n} + \frac{x_n}{k_n} + ... + \frac{x_n}{k_n}}_{k_n} = a .$$

За наслідком з нерівності Коші добуток $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}$ набуває найбільшого значення, якщо $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=...=\frac{x_n}{k_n}$. Отримаємо $x_i=\frac{k_i a}{k_1+k_2+...+k_n}$, $i=1,2,...,n$. Тоді $f_{\max}(x_1,x_2,...,x_n)=k_1^{k_1}\cdot k_2^{k_2}\cdot...\cdot k_n^{k_n}\left(\frac{a}{k_1+k_2+...+k_n}\right)^{k_1+k_2+...+k_n}$.

2. Нехай потрібно визначити найбільше значення функції

$$g(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{\frac{l_1}{m_1}}\cdot x_2^{\frac{l_2}{m_2}}\cdot...\cdot x_n^{\frac{l_n}{m_n}}, \quad (2)$$

де додатні числа $x_1,x_2,...,x_n$ задовольняють рівність $x_1+x_2+...+x_n=a$, a – додатна стала; $\frac{l_1}{m_1},\frac{l_2}{m_2},...,\frac{l_n}{m_n}$ – звичайні нескоротні дроби.

Позначимо $m=НСК\left(m_1,m_2,...,m_n\right)$, $ml_1/m_1=k_1$, ..., $ml_n/m_n=k_n$. Тоді функція

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=g^m(x_1,x_2,...,x_n)$$

набуває вигляду (1).

Отже, задачу відшукання найбільшого значення функції g за умови $x_1+x_2+...+x_n=a$ зведено до задачі, розглянутої вище. Тоді $g_{\max}=\sqrt[m]{f_{\max}}$.

У результаті отримаємо

$$g_{\max}(x_1,x_2,...,x_n)=\left(\frac{l_1}{m_1}\right)^{\frac{l_1}{m_1}}\cdot...\cdot\left(\frac{l_n}{m_n}\right)^{\frac{l_n}{m_n}}\cdot\left(\frac{a}{\frac{l_1}{m_1}+...+\frac{l_n}{m_n}}\right)^{\frac{l_1}{m_1}+...+\frac{l_n}{m_n}}.$$

До розглянутої вище задачі зводиться також задача визначення найбільшого значення функції $g(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{\frac{l_1}{m_1}}\cdot x_2^{\frac{l_2}{m_2}}\cdot...\cdot x_n^{\frac{l_n}{m_n}}$,

де додатні числа $x_1,x_2,...,x_n$ задовольняють рівність $x_1^{\frac{p_1}{s_1}}+x_2^{\frac{p_2}{s_2}}+...+x_n^{\frac{p_n}{s_n}}=a$, a – додатна стала; l_1/m_1, ..., l_n/m_n, p_1/s_1, ..., p_n/s_n – звичайні нескоротні дроби.

Викладений підхід можна ефективно використовувати для визначення екстремальних значень багатьох функцій певного вигляду однієї і більше змінних.

Список використаних джерел:

1. Репета В.К., Лепська Я.Я. Застосування нерівності Коші до дослідження функцій багатьох змінних на екстремум. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/31825/1/Actual%20Scientific%20and%20Methodological%20Problems%20of%20Physics%20and%20Mathematics%20in%20Higher%20Education.pdf