МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОТІКАННЯ ЕПІДЕМІЇ

Ліщеновський В. О., Матвеєв Б. М.
Національний авіаційний університет, Київ

Науковий керівник – Репета В.К., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Ключові слова: математична модель, диференціальне рівняння.

Задача побудови математичної моделі для прогнозування кількості інфікованих людей під час епідемії є надзвичайно актуальною.

. Нехай в момент часу $t = 0$ в групу, яка складається з N здорових людей, потрапляє одна інфікована людина, яка є джерелом інфікування. Вважатимемо, що:

1) всі інфіковані люди залишаються в цій групі;

2) кожна інфікована людина є джерелом інфікування для інших людей.

Припустимо, що до певного моменту часу t інфікувалося $x(t)$ осіб, кількість людей, які можуть інфікуватися дорівнює $y(t)$.

Справджується рівність

$$x(t) + y(t) = N + 1, \quad x(0) = 1.$$

Кількість dx нових хворих (інфікованих), які з'являться протягом часу dt, вважатимемо пропорційною добутку $x(t)y(t)$.

Складаємо рівняння

$dx = \lambda xydt$,

де λ – коефіцієнт пропорційності.

Ураховуючи зв'язок $y(t) = N + 1 - x(t)$, отримуємо диференціальне рівняння

$$dx = \lambda x(N + 1 - x)dt. \tag{1}$$

Його загальний розв'язок: $x(t) = (N+1)/(e^{-\lambda t(N+1)}/C + 1)$, $C \neq 0$ – довільна стала.

Визначимо значення сталої C: $x(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1/N$.

Отже,

$$x(t) = (N+1)/(Ne^{-\lambda t(N+1)} + 1).$$

Із цієї формули випливає, що із збільшенням t кількість інфікованих $x(t)$ збільшується, причому $x(t) \to N + 1$, коли $t \to \infty$.

Для визначення значення коефіцієнта λ потрібно задати ще одну умову. Нехай в момент часу $t = m$ (діб) інфікованих було k людей, причому $1 < k \ll N$. Тоді виконується рівність

$$k = \frac{N+1}{Ne^{-\lambda m(N+1)}+1}$$, звідки отримаємо $\lambda = \frac{1}{m(N+1)}\ln\frac{kN}{N+1-k} \approx \frac{\ln k}{m(N+1)}$.

Отже, наближений розв'язок диференціального рівняння (1) має вигляд

$$x(t) \approx \frac{N+1}{Ne^{-\frac{\ln k}{m}t}+1}.$$

Використовуючи цю формулу можна спрогнозувати через скільки діб від моменту часу $t=0$ слід очікувати, що кількість інфікованих становитиме певний відсоток від загальної кількості людей. Добуток $p(N+1)$, де $p \in (0;1)$, становить $100p$ % від загальної кількості $N+1$ осіб. Записуємо рівність

$$p(N+1) \approx \frac{N+1}{Ne^{-\frac{\ln k}{m}t}+1}$$, звідки отримуємо $Ne^{-\frac{\ln k}{m}t}+1 \approx \frac{1}{p}$, $t \approx \frac{m}{\ln k}\ln\frac{pN}{1-p}$.

Приклад. Візьмемо $N=1000, m=5, k=2$, тобто серед 1000 людей протягом 5 діб виявлено одного нового інфікованого. Спрогнозуємо через скільки діб кількість інфікованих становитиме: 1) 10 % ($p=0{,}1$), 2) 50 % ($p=0{,}5$), 3) 80 % ($p=0{,}8$). Отримаємо:

1) $t \approx 34$; 2) $t \approx 50$; 3) $t \approx 60$.

Поставимо запитання: як змінюється швидкість $x'(t)$ збільшення кількості інфікованих?

Для цього визначимо проміжки знакосталості похідної $x''(t)$. Маємо

$$x'(t) \approx \frac{(\ln k)N(N+1)e^{-\frac{\ln k}{m}t}}{m\left(Ne^{-\frac{\ln k}{m}t}+1\right)^2};\quad x''(t) \approx \frac{\ln^2 k}{m^2}N(N+1)\frac{Ne^{-2\frac{\ln k}{m}t}-e^{-\frac{\ln k}{m}t}}{\left(Ne^{-\frac{\ln k}{m}t}+1\right)^3}.$$

У критичній точці $t=\frac{m\ln N}{\ln k}$ швидкість $x'(t)$ збільшення кількості інфікованих набуває максимального значення, причому $x'_{\max} \approx \frac{\ln k}{4m}(N+1)$.

У випадку $N=1000, m=5, k=2$ отримаємо: $x'_{\max} \approx 35$, $t_{\max} \approx 50$.

Отже, використовуючи математичну модель, а також диференціальне рівняння, ми навчилися прогнозувати приблизну кількість інфікованих за певний проміжок часу.