

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

КЛОБУКОВ ВІТАЛІЙ ВІТАЛІЙОВИЧ

УДК 517.518.34

**МЕТОД ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОБОТИ
ДОПЛЕРІВСЬКОГО ВИМІРЮВАЧА ШВИДКОСТІ НА ЕТАПІ
ОБРОБКИ ВХІДНОГО СИГНАЛУ**

05.12.13 – «Радіотехнічні пристрої та засоби телекомунікацій»

Технічні науки
(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ В.В. Клобуков

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий консультант

Білецький Анатолій Якович
доктор технічних наук, професор,
заслужений діяч науки та техніки
України, лауреат державної премії

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Клобуков В.В. «Метод підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу» – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.12.13 – «Радіотехнічні пристрої та засоби телекомунікацій». – Національний авіаційний університет, Київ, 2021.

У дисертаційній роботі вирішується актуальне науково-технічне завдання щодо розробка алгоритму оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона, та також оцінки ефективності цього методу і порівняння його з ефективністю методу, заснованого на швидкому перетворенні Фурє в базисі дискретно-експоненційних функцій.

Доведено, що оцінка частоти зашумленого сигналу здійснюється на підставі перевищення порогового значення амплітудою одного або декількох спектральних коефіцієнтів.

Проведений аналіз існуючих методів обробки інформації, що передається доплерівсько - імпульсним сигналом показав, що існуючі методи оцінки частоти вхідного сигналу доплерівським вимірювачем швидкості мають ряд недоліків та невідповідностей.

До таких недоліків в роботі віднесено: наявність перешкод, що впливають на кількість переходу частоти гармонійного сигналу через «0»; вузька смуга прийому вхідного сигналу при використанні частотних та амплітудних детекторів; при спектральному аналізі широкосмугового сигналу перешкоди приводять до перерозподілу енергії між спектральними коефіцієнтам та до зміщення центру ваги енергетичного спектру.

Відмічено, що загальним завданням оцінки параметрів сигналу є оцінка амплітуди, фази та частоти сигналу на фоні дії перешкод та завад

Метою дисертаційної роботи є підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу.

Для досягнення поставленої мети і вирішення зазначеної проблеми в роботі вирішені наступні наукові задачі:

- проведено аналіз існуючих методів обробки інформації, заснованих на ШПФ в базисі ВКФ;

- розроблено метод синтезу базисів ВКФ із заданими параметрами;

- розроблено алгоритми ШПФ в будь-яких базисах ВКФ із заданими параметрами;

- розроблено математичну модель сигналу, що приймається на тлі шуму (в загальному випадку небілого), як складову методу оцінки частоти доплерівського сигналу методом спектрального аналізу в базисах ВКФ;

- розроблено методи оцінки частоти зашумленого сигналу, що забезпечують необхідну ймовірність правильної оцінки при заданій максимальній ймовірності помилкової тривоги;

- здійснено перевірку ефективності отриманих методів.

Об'єктом дослідження є процес оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на тлі адитивної корелятивної перешкод доплерівським вимірювачем швидкості.

Предметом дослідження є методи оцінки частоти сигналу, засновані на спектральному аналізі в базисі ВКФ.

У дисертаційній роботі нові наукові результати й висновки отримані на єдиній методологічній основі математичного аналізу й синтезу складних технічних систем. Використовувалися сучасні і класичні методи теорії сигналів і систем, методи спектральної теорії, методи теорії інваріантності, методи математичного й системного аналізу, методи теорії зв'язку, теорії ймовірності і математичної статистики.

Вірогідність наукових результатів, висновків та рекомендацій, викладених у дисертаційній роботі, обґрунтовано коректним використанням математичного апарату та моделюванням на ЕОМ.

У процесі теоретичних досліджень і моделювання у дисертаційній роботі одержані наступні нові наукові результати, а саме:

- вперше розроблено метод формування дочірніх симетричних базисних систем, в якому на відміну від існуючих, синтезовано зв'язок дискретно - експоненційних функцій, функцій Уолша і функцій Віленкіна-Крестенсона, що надає змогу забезпечити більш високу швидкодію при виконанні ШПФ, в

порівнянні з базисом ДЕФ.

- удосконалено метод обчислення значень порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, що надає змогу забезпечити імовірнісні характеристики оцінки частоти доплерівсько-імпульсного сигналу.

- вперше розроблено метод ізоморфного представлення дискретних базисів ВКФ, який дозволив перейти від комплексно-значних компонентів базису до їх модулярних цілочисельних еквівалентів, що істотно спростило як аналіз, так і синтез алгоритмів обробки сигналів в цих базисах;

- удосконалено метод індикаторних матриць який за рахунок виключення процедур факторизації матриць ВКФ і Уолша при синтезі алгоритмів ШПФ, дозволяє синтезувати повну безліч базисів ВКФ (в тому числі і базисів Уолша) із заданими параметрами.

Практичне значення одержаних результатів у галузі розробки та створення радіолокаційних систем супутникових телекомунікацій полягає у тому, що запропоновані в дисертаційній роботі методи у поєднанні з алгоритмами їх застосування забезпечують підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу.

В роботі розроблено методику оцінки дисперсії квадратур гармонік при спектральному аналізі корельованого шуму в різних базисах. Дана методика може знайти практичне застосування в пристроях вимірювання параметрів радіолокаційних сигналів для визначення порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, при умові забезпечення необхідні імовірнісні правильної оцінки частоти сигналу.

Розроблено метод оцінки частоти доплерівського сигналу методом спектрального аналізу в базисах ВКФ. Метод може бути використаний в пристроях радіолокації для оцінки швидкості руху цілі.

Встановлено, що базиси ВКФ для досягнення тієї ж ймовірності вірної оцінки частоти, що і базиси ДЕФ, вимагають більшого на 2 – 3 дБ відношення сигнал/шум за потужності, ніж базиси ДЕФ. Базиси ВКФ вимагають значно менше, до одного порядку, машинного часу при

здійснення операції ШПФ, ніж базиси ДЕФ. Базиси ДЕФ можуть бути успішно замінені базисами ВКФ, при умові підвищення потужності зондуючого випромінювання. При цьому швидкість обробки радіолокаційних даних, завдяки застосуванню базису ВКФ може зрости до трьох і більше разів.

Головним результатом проведеного наукового дослідження стала розробка методу оцінки частоти доплерівсько – імпульсного сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисах Віленкіна-Крестенсона функцій.

Розроблено метод формування дочірніх симетричних базисних систем дозволяє, за рахунок формування повного ансамблю, забезпечити більше чим в три рази підвищення швидкодію оцінки частоти вхідного сигналу при здійсненні операції ШПФ на основі базису ВКФ в порівнянні з базисом ДЕФ.

Удосконалений в роботі метод обчислення значень порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, дозволяє забезпечити необхідні імовірнісні характеристики оцінки частоти доплерівсько – імпульсного сигналу при заданих значення співвідношень сигнал/шум.

Встановлено, що базиси ВКФ для досягнення тієї ж ймовірності вірної оцінки частоти, що і базиси ДЕФ, вимагають більшого на 2 – 3 дБ відношення сигнал/шум, ніж базиси ДЕФ.

Представлений в роботі метод індикаторних матриць за рахунок виключення процедур факторизації матриць ВКФ і Уолша при синтезі алгоритмів ШПФ, дозволяє синтезувати повну безліч базисів ВКФ (в тому числі і базисів Уолша) із заданими параметрами. Це обґрунтовує успішну заміну базису ДЕФ базисом ВКФ, коли є можливість підвищити потужність зондуючого випромінювання. При цьому значно зросте швидкість обробки радіолокаційних даних.

Для пошуку порогових значень, що забезпечують допустиму ймовірність помилкової тривоги був розроблений метод оцінки дисперсій спектральних коефіцієнтів послідовності, що представляє собою шум. Для моделювання шуму було використано однозв'язний марківський ланцюг

нормальних випадкових величин із заданою дисперсією.

Ключові слова: оцінка частоти, дискретно - експоненційний сигнал, базис функцій Віленкіна – Крестенсона, базис дискретно-експоненційні функції, базис Уолша, швидке перетворення Фур'є.

Список публікацій здобувача

1. А. Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Часний алгоритм упорядкування базисних функцій Уолша». *Вісник Національного Авіаційного Університету*, № 2(1), С. 173–178, 1999. <https://doi.org/10.18372/2306-1472.2.8985>
2. А.Я. Білецький, Швець В.А., В.В. Клобуков, «Дослідження базисів Віленкіна-Крестенсона», *Актуальні проблеми автоматичних та інформаційних технологій: збірник наукових праць*. Дніпропетровськ: «Навчальна книга», Том 3. С. 74-78, 2000.
3. А.Я. Білецький, Шутко В.О., В.В. Клобуков, «Синтез та аналіз трикутно-симетричних функцій», *Актуальні проблеми автоматичних та інформаційних технологій: збірник наукових праць*. – Дніпропетровськ: «Навчальна книга», Том 3. С. 82-89, 2000.
4. M. Fuzik, V. Klobukov, O. Zykov, «Integration technology of hybrid cloud computing infrastructure of the university to perform the tasks of scientific research and education.», *The IV world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University, Vol.1*, pp. 18.50-18.54, 2010.
5. V. Klobukov, O.Zykov, S. Volhonskyi, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, S.Ermak, «Information protection in automated information systems. Definition, threats, approaches and measures to protect information», *The seventh world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University*, September 19-21, pp. 214-218, 2016.
6. V. Klobukov, O. Nechyporuk, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, Y. Nakonechny, «Algorithm of forming the estimating method of total logistic costs based on artificial neural networks», *The seventh world congress "Aviation in the*

XXI-st century”– “*Safety in Aviation and Space Technologies*” National Aviation University, September 19-21, pp. 114-118, 2016.

7. V. Klobukov, L. Klobukova, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, M. Glivenko, «UAV flight mechanics», *The seventh world congress “Aviation in the XXI-st century”– “Safety in Aviation and Space Technologies” National Aviation University*, September 19-21, pp. 349-354, 2016.

8. V. Klobukov, Wang Bo, Hu Danjuan, «Model Research on Ningbo – CEEC Scientific and Technological Exchange and Cooperation», *The Eighth world congress “Aviation in the XXI-st century”– “Safety in Aviation and Space Technologies” National Aviation University*, pp. 179-184, 2018.

9. V. Kharchenko, V. Klobukov, O. Zykov, V. Ryabokon, «Multipurpose intelligent unmanned aircraft system (MIUAS) for detecting and tracking objects using elements of computer vision and artificial intelligence», *The Eighth World Congress "AVIATION IN THE XXI-st CENTURY" – “Safety in Aviation and Space Technologies” National Aviation University October 10-12*, pp. 129-137, 2020.

10. V. Klobukov, A. Biletsky, «Comparative analysis of the computational efficiency of the fast fourier transform in the discrete exponential functions and vilenkin-crestenson functions bases», *multidisciplinary international magazine «Věda a perspektivy»*, No 1(1), pp. 244 – 251, 2021. DOI: [https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-1\(1\)](https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-1(1)).

11. В. Клобуков, А. Білецький, А. Миколушко «Деякі аспекти синтезу базисних систем віленкіна - крестенсона функцій», *multidisciplinary international magazine «Věda a perspektivy»*, No 2(2), pp. 146 – 155, 2021. DOI: [https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-2\(2\)](https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-2(2)).

Матеріали й тези доповідей на конференціях

1. Корчинський А.П., Бідний М.С., В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Синтез и исследование комбинационных устройств». XLII студентська науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 215-217, 1994.

2. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Синтез и исследование триггеров». XLIII студентська науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 175-176, 1995.
3. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Разработка аппаратно-программного комплекса информационной справочной службы аэропорта». XLIII студентська науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 215-217, 1995.
4. Корчинський А.П., Бідний М.С., В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Методы создания и хранения информации в электронном справочнике». XLII студентська науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 215-217, 1995.
5. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Анализ статистических характеристик дельта-модулированного сигнала». XLV студентська науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 165-167, 1997.
6. В.В. Клобуков, С.В. Лобур, Слесарь А.Н. «Електронний довідник по цифрових інтегральних мікросхемах». Всеукраїнська конференція молодих науковців «Інформаційні технології в науці та освіті, Черкаський державний Університет ім. Б. Хмельницького, С. 125-129, 1997.
7. А. Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Исследование новых способов упорядочивания функций Уолша». XVIII звітна науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 187-188, 1998.
8. А. Я. Белецкий, Швец В.А., В.В. Клобуков, «Модификация базиса вещественно-мнимых функций (ВМФ) с целью повышения информативности». XVIII звітна науково-технічна конференція, Київський міжнародний університет цивільної авіації, С. 92-93, 1998.
9. В.В. Клобуков, «Метод преобразования координат при обобщенном спектральном анализе радиотехнических сигналов». Матеріали I Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 221-227, 2000.

10. А.Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Аналитический метод измерения частоты радиолокационного доплеровско-импульсного сигнала». Материали II Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 152-156, 2001.

11. В.В. Клобуков, О.С. Зиков «Питання створення мультисервісних телекомунікаційних мереж з застосуванням технології пасивних оптичних мереж (Passive optical networks)». Материали VIII Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2007», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 453-457, 2007.

12. М.І. Фузік, В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт «Особливості застосування технології радіопередачі даних при побудові конвергентних телекомунікаційних мереж». Материали VIII Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2007», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 312-317, 2007.

13. В.В. Клобуков, В.А. Швець, В.А. Рябоконт «Питання захисту інформації в мультисервісних мережах на прикладі технології Voice-Over-IP». Материали II міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2009, Національний авіаційний університет, С. 62-63, 2009.

14. В.В. Клобуков, В.А. Швець, В.А. Рябоконт «Побудова розподіленого конвергентного інформаційного простору на базі національної науково-освітньої мережі URAN». Материали III міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2010, Національний авіаційний університет, С. 43-44, 2010.

15. В.В. Клобуков, М.І. Фузік, О.С. Зиков «Побудова розподіленої відкритої GRID-інфраструктури ВНЗ для задач наукових досліджень і освіти». Материали III міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2011, Національний авіаційний університет, С. 103-104, 2011.

16. В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт, С.О. Ермак, «Дослідження протоколів побудови маршрутів в мережах METRO ETHERNET». Материали

X Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2011», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 5.72-5.76, 2011.

17. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, А.О. Краснопольский, «Управління продуктивністю корпоративних конвергентних мереж». Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2011», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 5.66-5.69, 2011.

18. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, С.А. Ермак, «Использование технологии виртуальной локальной сети (VLAN) для коммуникации между LPAR». Матеріали IV міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2011, Національний авіаційний університет, С. 39-40, 2011.

19. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, L.P. Klobukova «Integration virtual desktop infrastructure in the learning Process», Матеріали V Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 156-159, 2012.

20. В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт, Ю.В. Максименко, «Віртуалізація робочих станцій на базі програмного забезпечення з відкритим програмним кодом». Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2013», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 5.21-5.26 2013.

21. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, С.І. Волхонський, С.О. Єрмак, Д.В. Самофалов, «Порівняльний аналіз сучасних інформаційних (технологічних) платформ для створення систем електронного документообігу». Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2013», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 5.75-5.78 2013.

22. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.А. Рябоконт, Ю.В. Максименко «Технічні аспекти розвитку бездротових широкосмугових мереж передачі даних на базі стандарту IEEE802.11». Матеріали XI Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2013», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 5.81-5.84, 2013.

23. V.V. Klobukov, O. Zykov, V.A. Ryabokon, L.Kloukova, «The basic principles of automated systems deployment Inside containers virtualization

software in a project», Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 216-220, 2014.

24. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, S. Volhonskiy, D. Samofalov, «Basic principles of the e-government», Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 174-178, 2014.

25. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, S. Volhonskiy, D. Samofalov, «Requirements for infrastructure electronic document management systems in higher education institutions», Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 231-234, 2014.

26. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.С.І. Волхонський, С.О. Єрмак, Д.В. Самофалов, «Електронний документообіг вищого навчального закладу як складова електронного урядування». Матеріали XII Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2015», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 6.125-6.130., 2015.

27. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.А. Рябоконт, «Базовий аналіз стандартів безпроводної передачі даних та перспективи їх розвитку». Матеріали XII Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2015», Національний авіаційний університет, Том 1, С. 6.151-6.154, 2015.

28. В.В. Клобуков, «Питання підвищення ефективності роботи радіолокаційних комплексів на етапі обробки вхідного сигналу», Materials of the XII International Scientific and Practical Conference "Modern aspects of modernization of science: status, problems, development trends" Lisbon (Portugal), pp. 77-80, 2021.

ANNOTATION

Klobukov V.V. «A method of increasing the efficiency of the Doppler speedometer at the stage of processing the input signal» - Manuscript.

Thesis for a degree of Candidate of Technical Sciences in speciality 05.12.13 - "Radio engineering devices and means of telecommunications". – National Aviation University. Kyiv, 2021.

The dissertation solves the current scientific and technical problem of developing an algorithm for estimating the frequency of a discrete exponential signal based on spectral analysis in the basis of Vilenkin - Crestenson functions, as well as evaluating the efficiency of this method and comparing it with the efficiency of the method based on fast Fourier transform. discrete-exponential functions.

It is proved that the estimation of the frequency of a noisy signal is carried out on the basis of exceeding the threshold value by the amplitude of one or more spectral coefficients.

The analysis of the existing methods of processing the information transmitted by the Doppler - pulse signal showed that the existing methods of estimating the frequency of the input signal by the Doppler speedometer have a number of shortcomings and inconsistencies.

Such shortcomings in the work include: the presence of interference that affects the number of transitions of the frequency of the harmonic signal through "0"; narrow band of input signal reception when using frequency and amplitude detectors; in the spectral analysis of a broadband signal, the interference leads to a redistribution of energy between the spectral coefficients and to a shift in the center of gravity of the energy spectrum.

It is noted that the general task of estimating the signal parameters is to estimate the amplitude, phase and frequency of the signal against the background of interference and interference

The purpose of the dissertation is to increase the efficiency of the Doppler speedometer at the stage of processing the input signal.

To achieve this goal and solve this problem in the work solved the following scientific problems:

- the analysis of the existing methods of information processing based on FFT in the basis of VKF is carried out;
- the method of synthesis of VKF bases with the set parameters is developed;
- FFT algorithms in any VKF bases with the set parameters are developed;
- developed a mathematical model of the signal received against the background of noise (in the general case, non-white), as part of the method of estimating the frequency of the Doppler signal by spectral analysis in the bases of VKF;
- developed methods for estimating the frequency of a noisy signal that provide the required probability of correct estimation at a given maximum probability of false alarm;
- the effectiveness of the obtained methods was checked.

The object of the study is the process of estimating the frequency of a discrete-exponential signal received against the background of additive correlative interference by a Doppler speedometer.

The subject of the study is the methods of signal frequency estimation based on spectral analysis based on VKF.

In the dissertation new scientific results and conclusions are received on a uniform methodological basis of the mathematical analysis and synthesis of difficult technical systems. Modern and classical methods of signal and systems theory, spectral theory methods, invariance theory methods, methods of mathematical and systems analysis, communication theory methods, probability theory and mathematical statistics were used.

The probability of scientific results, conclusions and recommendations set forth in the dissertation is justified by the correct use of mathematical apparatus and computer simulation.

In the process of theoretical research and modeling in the dissertation the following new scientific results were obtained, namely:

- for the first time a method of forming child symmetric basis systems was developed, in which, in contrast to the existing ones, the connection of discrete - exponential functions, Walsh functions and Wilenkin-Crestenson functions was synthesized, which allows to provide higher speed when performing FFT, in

comparison with DEF basis. .

- the method of calculating the values of the decision thresholds when receiving a signal received against the background of single-connected Markov noise in the bases of VKF and DEF is improved, which allows to provide probabilistic characteristics of Doppler-pulse signal frequency estimation.

- for the first time a method of isomorphic representation of discrete VKF bases was developed, which allowed to pass from complex-significant components of the base to their modular integer equivalents, which significantly simplified both analysis and synthesis of signal processing algorithms in these bases;

- the method of indicator matrices has been improved, which by synthesizing the factorization procedures of VKF and Walsh matrices in the synthesis of FFT algorithms, allows to synthesize a complete set of VKF bases (including Walsh bases) with given parameters.

The practical significance of the obtained results in the field of development and creation of radar systems of satellite telecommunications is that the methods proposed in the dissertation in combination with algorithms of their application provide increase of efficiency of Doppler speedometer at the stage of input signal processing.

Keywords: frequency estimation, discrete-exponential signal, basis of Vilenkin-Crestenson functions, basis of discrete-exponential functions, Walt basis, fast Fourier transform.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	17
ВСТУП	18
1. ОГЛЯД АЛГОРИТМІВ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ДОПЛЕРІВСЬКО-ІМПУЛЬСНИХ СИГНАЛІВ	27
1.1. Аналіз методів оцінки частоти	27
1.2. Вибір моделі сигналу і шуму	30
1.3. Вибір базису	32
1.4. Висновки по розділу	36
2. СИНТЕЗ БАЗИСНИХ СИСТЕМ ВІЛЕНКІНА- КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦІЙ	37
2.1. Матричне подання ДЕФ	37
2.2. Ізоморфне відображення матриць ДЕФ	43
2.3. Синтез симетричних дочірніх систем ДЕФ	44
2.4. Базис функцій Уолша	51
2.4.1. Базис Уолша-Адамара	52
2.4.2. Базис Уолша-Пелі	55
2.4.3. Базис Уолша-Качмажа	57
2.5. Синтез симетричних дочірніх систем Уолша	58
2.5.1. Метод спрямованої перестановки	60
2.5.2. Метод індикаторних матриць	64
2.5.3. Повний ансамбль симетричних систем Уолша восьмого порядку	67
2.6. Базис функцій Віленкіна-Крестенсона	74
2.7. Синтез симетричних дочірніх систем ВКФ	77
2.7.1. Повний ансамбль симетричних систем ВКФ з параметрами $m=3$, $n=2$	81
2.8. Висновки по розділу	83

3. ШВИДКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В БАЗИСАХ ВКФ	85
3.1. БПФ в базисах ДЕФ	85
3.1.1. Про примноження ізоморфних матриць	85
3.1.2. БПФ в материнських базисах ДЕФ	87
3.1.3. БПФ в дочірніх базисах ДЕФ	94
3.2. БПФ в базисах ВКФ	98
3.2.1. БПФ в дочірніх базисах ВКФ	107
3.3. БПФ в базисах Уолша	109
3.4. Обсяги обчислень	113
3.5. Висновки по розділу	118
4. ОЦІНКА ЧАСТОТИ ДИСКРЕТНО- ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО СИГНАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В БАЗИСІ ВКФ	119
4.1. Оцінка частоти сигналу, що приймається на тлі білого шуму 1	122
4.1.1. Визначення межі рішення	122
4.1.2. Оцінка частоти. Базис ДЕФ	125
4.1.3. Оцінка частоти. Базис ВКФ	132
4.1.4. Оцінка частоти. Базис Уолша	137
4.2. Оцінка частоти сигналу, що приймається на тлі корельованого шуму	138
4.2.1. Оцінка частоти. Базис ДЕФ	139
4.2.2. Оцінка частоти. Базис ДЕФ. Метод одноразової черезперіодної компенсації	143
4.2.3. Оцінка частоти. Базис ВКФ	150
4.3. Висновки по розділу	154
ВИСНОВКИ	155
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	157
ДОДАТКИ	167

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

Дискретно-експоненційні функції	ДЕФ
Функції Віленкіна-Крестенсона	ВКФ
Швидке перетворення Фур'є	ШПФ
Фазова модуляція	ФМ
Відновлення несучої частоти	ВНЧ
Фазова автопідстройка частоти	ФАПЧ
Узгоджений фільтр	УФ
Генератор, що підстроюється	ПГ
Фазовий детектор	ФД
Ідеальний фільтр	ІФ
Пропорційно-інтегруючий фільтр	ПІФ
Максимально правдоподібність	МП
Максимально правдоподібна оцінка	МП-оцінка
Вирішуючий пристрій	РП
Зміщена фазова модуляція	ЗФМ
Частотна модуляція з мінімальним частотним зсувом	ММЗ
Амплітудно-фазова модуляція	АФМ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Для забезпечення соборності, незалежності і державного суверенітету, Україна повинна підвищувати рівень економічного і промислового потенціалу держави та покращувати рівень народного добробуту. Одним із напрямків такої діяльності є забезпечення інфраструктури України засобами сучасного швидкісного зв'язку та засобами аеронавігації та радіолокаційними комплексами.

Розвиток сучасних радіолокаційних комплексів, що сприяє підвищенню точності визначення координат і швидкостей цілей, вимагає підвищення продуктивності систем обробки радіолокаційних сигналів. У той же час підвищення кількості та потужності пристроїв, що працюють на високих і надвисоких частотах, створює додаткові перешкоди, що посилюють перешкоди, створювані відбитим сигналом і природними електромагнітними коливаннями. Цей факт, в свою чергу, вимагає посилення перешкодозахищеності радіолокаційних комплексів, що забезпечується не тільки збільшенням потужності зондуючого випромінювання, удосконаленням апаратної частини радіолокаційних станцій, але і алгоритмами обробки зашумленого сигналу, що сприяє відділенню корисного сигналу від шуму.

Одним з сімейств методів фільтрації корисного сигналу є сімейство алгоритмів, заснованих на аналізі спектра прийнятого сигналу.

Ці методи мають на увазі прийом сигналу і перетворення його з метою отримання його ж спектра в одному з базисів. Після цього параметри прийнятого сигналу оцінюються за допомогою аналізу не самого сигналу, а аналізу його спектра. Далі операція аналізу спектру прийнятого сигналу буде називатися узагальненим перетворенням Фур'є.

Окремим випадком узагальнених перетворень Фур'є класичні перетворення Фур'є. У разі дискретної обробки сигналів базисом класичних перетворень Фур'є виступає набір дискретно-експоненційних функцій (ДЕФ). Цей базис отримав широке застосування в багатьох галузях техніки,

пов'язаних з обробкою сигналу. Радіолокація не стала винятком. Головними факторами популярності базисів ДЕФ для обробки радіолокаційних сигналів стали гармонійний характер багатьох сигналів, які використовуються в радіолокації, і поява цифрових методів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Перший фактор через те, що базисні ДЕФ теж мають гармонійний характер, забезпечує високу концентрацію енергії сигналу в околицях одного або декількох вихідних частотних каналів процесора ШПФ. Другий фактор дозволяє виконувати класичні перетворення Фур'є зі швидкістю, з якою легко справляються сучасні обчислювальні системи.

Однак базис Фур'є є далеко не єдиним базисом, в якому можливі ортогональні перетворення. Зокрема, базис функцій Віленкіна-Крестенсона (ВКФ) забезпечує більш високу швидкодію при виконанні ШПФ, ніж базис ДЕФ. Крім того, цей базис не накопичує похибки округлення, що дає базис ДЕФ при великих обсягах вибірки. Тому дослідження даного базису з метою застосування його для спектрального аналізу радіолокаційних сигналів є актуальним і перспективним.

При вирішенні визначеного в дисертаційній роботі завдання автор у своїх дослідженнях спирався на праці вітчизняних і зарубіжних вчених, які зробили значний внесок у розвиток теорії обробки радіолокаційних сигналів. А саме: Віленкін Н. Я., Chrestenson Н. Е., Белецкий А.Я., Тараканов А. В., Малоземов В. Н., Банкет В.Л., Козелков С. В., Бойко Ю.М., Климаш М.М.,

Аналіз наукових досліджень вітчизняних і зарубіжних вчених показав, що завданням підвищення точності оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона не приділяється достатньої уваги.

Розв'язання вказаного завдання передбачає розробку методу та на його основі алгоритму оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона. В свою чергу розроблений алгоритм вимагає оцінки ефективності цього методу і порівняння його з ефективністю методу,

заснованого на швидкому перетворенні Фурє в базисі дискретно-експоненційних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційне дослідження відповідає вимогам статті 5 Закону України «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки» від 11 липня 2001 року № 2623-III (зі змінами та доповненнями від 29.01.2021 р.), пункту першого розділу другого «Переліку пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 2021 року», затвердженого Постановою КМУ від 7 вересня 2011 р. № 942.

Дослідження проведено в межах науково-дослідної роботи: «Методологія розроблення високоточних динамічних модульних систем багатоальтернативного виявлення, розпізнавання та класифікації об'єктів» (ДР №0117U004333), та «Структурно-параметричний синтез і розроблення технології побудови геліоенергетичних стратосферних платформ з адаптивно-нейронним керуванням» (ДР №0120U01989), у яких автор був співвиконавцем.

Метою дисертаційної роботи є підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу.

Для досягнення поставленої мети і вирішення зазначеної проблеми необхідно вирішити наступні наукові задачі:

- провести аналіз існуючих методів обробки інформації, заснованих на ШПФ в базисі ВКФ;
- розробити метод синтезу базисів ВКФ із заданими параметрами;
- розробити алгоритми ШПФ в будь-яких базисах ВКФ із заданими параметрами;
- розробити математичну модель сигналу, що приймається на тлі шуму (в загальному випадку небілого), як складову методу оцінки частоти доплерівського сигналу методом спектрального аналізу в базисах ВКФ;
- розробити методи оцінки частоти зашумленого сигналу, що забезпечують необхідну ймовірність правильної оцінки при заданій

максимальній ймовірності помилкової тривоги;

– здійснити перевірку ефективності отриманих методів.

Об'єктом дослідження є процес оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на тлі адитивної корелятивної перешкод доплерівським вимірювачем швидкості.

Предметом дослідження є методи оцінки частоти сигналу, засновані на спектральному аналізі в базисі ВКФ.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі нові наукові результати й висновки отримані на єдиній методологічній основі математичного аналізу й синтезу складних технічних систем. Використовувалися сучасні і класичні методи теорії сигналів і систем, методи спектральної теорії, методи теорії інваріантності, методи математичного й системного аналізу, методи теорії зв'язку, теорії ймовірності і математичної статистики.

Вірогідність наукових результатів, висновків та рекомендацій, викладених у дисертаційній роботі, обґрунтовано коректним використанням математичного апарату та моделюванням на ЕОМ.

Наукова новизна одержаних результатів. У процесі теоретичних досліджень і моделювання у дисертаційній роботі одержані наступні нові наукові результати, а саме:

1. *Вперше розроблено* метод формування дочірніх симетричних базисних систем, в якому на відміну від існуючих, синтезовано зв'язок дискретно - експоненційних функцій, функцій Уолша і функцій Віленкіна-Крестенсона, що надає змогу забезпечити більш високу швидкодію при виконанні ШПФ, в порівнянні з базисом ДЕФ.

2. *Удосконалено* метод обчислення значень порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, що надає змогу забезпечити імовірнісні характеристики оцінки частоти доплерівсько-імпульсного сигналу.

3. *Вперше розроблено* метод ізоморфного представлення дискретних базисів ВКФ, який дозволив перейти від комплексно-значних

компонентів базису до їх модулярних цілочисельних еквівалентів, що істотно спростило як аналіз, так і синтез алгоритмів обробки сигналів в цих базисах;

4. *Удосконалено* метод індикаторних матриць який за рахунок виключення процедур факторизації матриць ВКФ і Уолша при синтезі алгоритмів ШПФ, дозволяє синтезувати повну безліч базисів ВКФ (в тому числі і базисів Уолша) із заданими параметрами.

Практичне значення одержаних результатів у галузі розробки та створення радіолокаційних систем супутникових телекомунікацій полягає у тому, що запропоновані в дисертаційній роботі методи у поєднанні з алгоритмами їх застосування забезпечують підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу.

1. Розроблено методику оцінки дисперсії квадратур гармонік при спектральному аналізі корельованого шуму в різних базисах. Дана методика може знайти практичне застосування в пристроях вимірювання параметрів радіолокаційних сигналів для визначення порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, при умові забезпечення необхідні імовірнісні правильної оцінки частоти сигналу.

2. Розроблено метод оцінки частоти доплерівського сигналу методом спектрального аналізу в базисах ВКФ. Метод може бути використаний в пристроях радіолокації для оцінки швидкості руху цілі.

3. Встановлено, що базиси ВКФ для досягнення тієї ж ймовірності вірної оцінки частоти, що і базиси ДЕФ, вимагають більшого на 2 – 3 дБ відношення сигнал/шум за потужності, ніж базиси ДЕФ. Базиси ВКФ вимагають значно менше, до одного порядку, машинного часу при здійсненні операції ШПФ, ніж базиси ДЕФ. Базиси ДЕФ можуть бути успішно замінені базисами ВКФ, при умові підвищення потужності зондуючого випромінювання. При цьому швидкість обробки радіолокаційних даних, завдяки застосуванню базису ВКФ може зрости до трьох і більше разів.

Практична цінність роботи підтверджена актами реалізації основних результатів дослідження у навчальному процесі Національного авіаційного університету, і актами впровадження в науково-технічну діяльність, державного підприємства «Завод 410 Цивільної авіації» та комунального підприємства Міжнародний аеропорт “Київ” (Жуляни). У додатку до дисертаційної роботи представлені документи, що підтверджують практичне використання результатів дисертаційної роботи.

Особистий внесок здобувача. Наукові положення та результати дисертації отримані автором самостійно. Особисто автором здійснена розробка загальної концепції дисертації, вибір об’єктів, визначено мету та задачі роботи, обрано та обґрунтовано методи досліджень.

Наукові положення та результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Особисто автором здійснена розробка загальної концепції дисертаційної роботи, вибір об’єктів, визначено мету та завдання дослідження, обрано та обґрунтовано методи досліджень.

В дисертаційній роботі узагальнено результати досліджень, виконаних автором самостійно і опублікованих одноосібно в роботах [20,39] та в співавторстві в роботах [1-19,21-38]. Усі наукові результати, що подаються до захисту, одержано особисто автором, наукові статті, опубліковані у фахових виданнях, відповідають вимогам як за назвою, так і за змістом.

В наукових публікаціях у співавторстві автору належать: провідна роль у виборі та обґрунтуванні напрямку досліджень, постановка задачі на різних етапах виконання роботи, аналіз та інтерпретація одержаних результатів. В дисертаційній роботі не використовувалися ідеї та розробки, що належать співавторам, з якими опубліковано наукові праці.

У опублікованих у співавторстві роботах автором дисертації зроблено такий особистий внесок. В [1] подано особисто розроблені математичні залежності часного алгоритму упорядкування базисних функцій Уолша. В [2] подано математичні залежності та на їх основі отримані результати дослідження базисів Виленкіна-Крестенсона. В [3] подані результати

синтезу та аналізу трикутно-симетричних функцій. В [4] обґрунтовано наукове завдання та подано матеріали стосовно аналізу літератури відповідно наукового завдання статті. В [5] подано технологію інтеграції гібридної хмарної обчислювальної системи. В [6] подано матеріал стосовно аналізу нейронних мереж. В [7,8,9] обґрунтовано наукове завдання та подано матеріали стосовно аналізу літератури відповідно наукового завдання статті. В [10] проведено порівняльний аналіз обчислювальної ефективності швидкого перетворення Фур'є в дискретних експоненціальних функціях та базах функцій Віленкіна-Крестенсона. В [11] викладено аспекти синтезу базисних систем Віленкіна – Крестенсона. В [12,13] подано результати досліджень комбінаційних пристроїв з складу радіотехнічних систем. В [14,15] обґрунтовано наукове завдання та подано матеріали стосовно аналізу літератури відповідно наукового завдання статті. В [16] проведено аналіз статистичних характеристик дельта-модульованого сигналу. В [17] проведено аналіз цифрових інтегральних мікросхемах щодо обробки великих масивів інформації. В [18,19] проведено дослідження щодо упорядкування функції Уолша та модифікації базиса матеріально - уявних функцій. В [21] наведено аналітичний метод виміру частоти сигналу радіотехнічного пристрою. В [22] подано матеріал стосовно аналізу технології пасивних оптичних мереж. В [23] визначені особливості застосування технології радіопередачі даних при побудові конвергентних телекомунікаційних мереж. В [24,25,26] обґрунтовано наукове завдання та подано матеріали стосовно аналізу літератури відповідно наукового завдання статті. В [27] подано матеріали дослідження протоколів побудови маршрутів в мережах METRO ETHERNET. В [28] подано матеріал аналізу критеріїв продуктивності корпоративних конвергентних мереж. В [29,30] обґрунтовано застосування віртуальної локальної мережі. В [31] подано матеріали віртуалізація робочих станцій на базі програмного забезпечення з відкритим програмним кодом. В [32] подано матеріали стосовно аналіз сучасних інформаційних (технологічних) платформ для створення систем електронного

документообігу. В [33] розглянуто та подано аспекти розвитку бездротових мереж передачі даних. В [34] подано основні принципи розгортання автоматизованих мереж. В [35] обґрунтовано основні принципи електронного уряду. В [36,37] подано матеріали стосовно електронного документообігу в межах розвитку електронного урядування. В [38] проведено базовий аналіз стандартів безпроводної передачі даних.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертації, практичні висновки і рекомендації, які одержані в ході роботи, апробовані та оприлюднені в ході: Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000», Національний авіаційний університет, 2000; II Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000», Національний авіаційний університет, 2001; II Международной научно-практической конференции «Проблеми й перспективи розвитку ІТ-індустрії», Харьковский национальный экономический университет, Харьков, 18 – 19 ноября 2010 г.; V Всесвітнього конгресу "Авіація у ХХІ столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", 2012; XII International Scientific and Practical Conference "Modern aspects of modernization of science: status, problems, development trends", 2021.

Крім того, основні положення і результати дисертації, практичні висновки і рекомендації також апробовано на міжкафедральному семінарі Факультету аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету.

Публікації. Основні наукові положення та результати дисертаційного дослідження опубліковано в 39 наукових працях. У томи числі: в 2 наукових статтях у періодичних наукових виданнях держави, яка входить до Організації економічного співробітництва та розвитку та/або Європейського Союзу, з наукового напрямку, за яким підготовлено дисертацію; в 9 наукових статтях у періодичних виданнях України включених до “Переліку наукових фахових видань України”; в 28 тезах доповідей та матеріалах конференцій, з них дві опубліковано одноосібно..

Структура дисертації та її обсяг. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку умовних скорочень вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків і має 152 сторінки основного тексту, 46 рисунків та таблиць, 17 сторінок додатків. Список використаних джерел містить 98 найменувань і займає 9 сторінок. Загальний обсяг дисертаційної роботи – 180 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД АЛГОРИТМІВ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ДОПЛЕРІВСЬКО-ІМПУЛЬСНИХ СИГНАЛІВ

1.1 Аналіз методів оцінки частоти

Одним із головних завдань в теорії обробки сигналів є виявлення сигналу і вимірювання його параметрів [1, 3–5]. Оскільки зазвичай в каналі зв'язку присутні перешкоди, що змінюють форму сигналу, точне вимірювання його параметрів часто є нездійсненним завданням. Тому замість вимірювання проводять оцінку параметрів сигналу з деякою точністю [2, 6–12].

В сучасних радіотехнічних системах використовуються сигнали різних форм. Однак зазвичай провідним сигналом є сигнал гармонійного виду. Саме тому завдання оцінки параметрів саме гармонійного сигналу не втрачає своєї актуальності [13–22,].

Оскільки поширеною є цифрова обробка сигналів, на практиці часто доводиться мати справу з сигналами, дискретизованими у часі. Надалі вибірку відліків безперервного комплексного гармонійного сигналу будемо називати дискретно-експоненціальним сигналом. Такий сигнал математично описується наступним чином [23–30]:

$$\dot{s}_g(l) = U \cdot e^{2\pi \frac{gl}{N}}, l = \overline{0, \dots, N-1}, \quad (1.1)$$

де g – нормована частота сигналу, яку потрібно оцінити, l – номер відліку в вибірці (дискретний час), N – обсяг вибірки.

Таку форму може мати, зокрема, доплерівсько-імпульсний сигнал, що містить інформацію про доплерівський зсув частоти зонduючого гармонійного випромінювання, який, в свою чергу, дозволяє визначити швидкість цілі. Класична структурна схема імпульсної доплерівської радіолокаційної станції з істинній внутрішній когерентності [7, 10, 35-41]

зображена на рис. 1.1. Високочастотний зонduючий сигнал, що породжується генератором високої частоти ГВЧ, подається на підсилювач потужності УМ, керований модулятором М. Серія високочастотних імпульсів, тривалість і шпаруватість яких задається модулятором, через антену досягає цілі. Відбиті від цілі високочастотні сигнали посилюються і подаються на фазовий детектор ФД, на інший вхід якого поданий опорний сигнал з генератора. Внаслідок руху цілі відбиті імпульси будуть мати різну фазу. Напруга на виході фазового детектора прямо пропорційна косинусу різниці фаз між сигналами, поданими на його входи. Тому послідовність вимірів напруг з виходу фазового детектора є доплерівсько-імпульсним сигналом з частотою, що відповідає швидкості руху цілі.

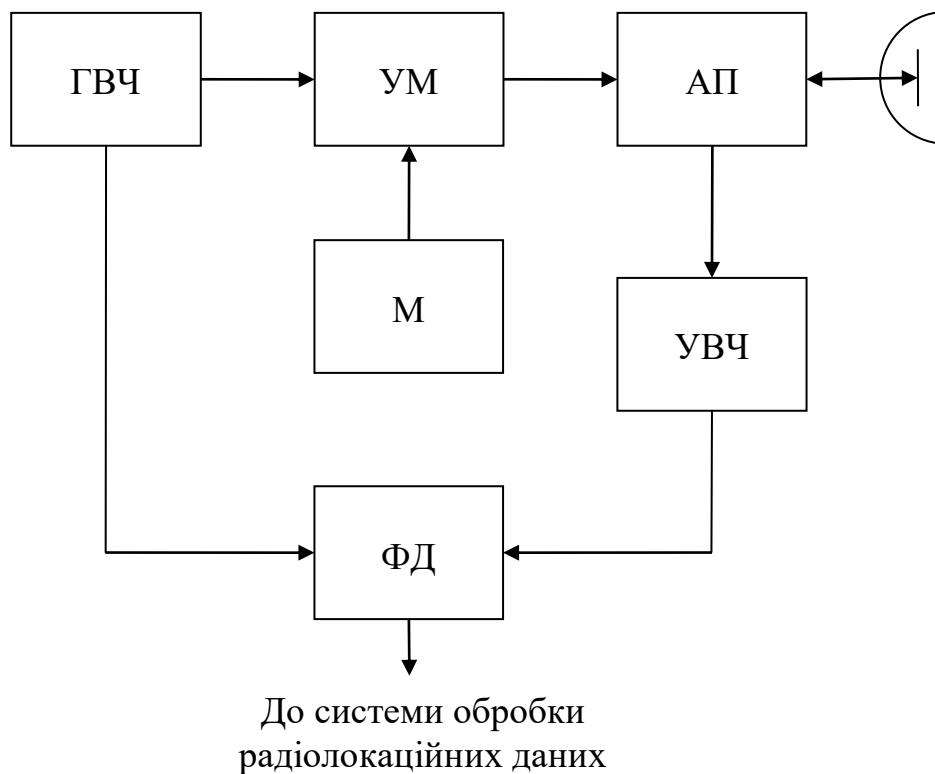


Рис. 1.1 – Схема доплерівського вимірювача швидкості

Оскільки як зонduюче, так і відбите випромінювання схильні до впливу перешкод, доплерівсько-імпульсний сигнал є спотвореним і його параметри не можуть бути точно виміряні. При цьому параметри сигналу можна оцінити з певною ймовірністю [2, 9, 45].

Поняття «частота» має чітке визначення лише для гармонійних коливань. Ці коливання мають, по-перше, ідеальну форму, по-друге, нескінченну протяжність в часі. Насправді ж реальні сигнали, що надходять на вхід пристрою одержувача, завжди кінцеві у часі. Крім того, часто ці сигнали не є гармонійними. Однією з причин відмінності форми сигналів, що виходять з ФДЧ (рис. 1), від гармонійної є вплив перешкод [45-51, 67, 71]. Чим менше відношення сигнал/шум, тим ближче форма цього сигналу до гармонійної. На практиці зазвичай доводиться оцінювати центральну або несучу частоту зашумленого радіосигналу.

Для оцінки несучої частоти було винайдено кілька методів. Один із перших в історії методів полягає у підрахунку кількості переходів через 0 кривої, яка описує поведінку сигналу за певний час. Використання даного способу має на увазі, що сигнал має занадто гармонійну форму, тому він не підходить, якщо в каналі присутня перешкода. Справа в тому, що навіть незначні (з точки зору впливу на енергетичний спектр) перешкоди можуть призвести до значної зміни кількості переходів через 0, що призведе до невірному результату оцінювання частоти сигналу.

Метод, заснований на використанні частотного детектора, менш чутливий до перешкод. Цей пристрій складається з двох основних частин:

- 1) обраний лінійний ланцюг, що перетворює частотну модуляцію в амплітудну;
- 2) амплітудний детектор.

В якості обраного лінійного ланцюга використовується ланцюг з нерівномірною АЧХ. При аналізі сигналів, чия форма близька до гармонійної, АЧХ ідеального частотного детектора відрізняється від нуля лише в смузі частот, на яких очікується присутність корисного сигналу [64, 65]. Амплітудний детектор порівнює значення з виходу лінійного ланцюга з пороговим і виносить рішення про наявність або відсутність гармонійного сигналу на обраному відрізку частот. Такий детектор працює у вузькому частотному діапазоні. У разі, коли частота вхідного сигналу апріорно

невідома, потрібно кілька частотних детекторів для того, щоб була можливість провести оцінку частоти [2].

Крім методів оцінки частоти, заснованих на аналізі самого вхідного сигналу, існують методи, засновані на спектральному аналізі, тобто на математичній обробці спектра сигналу в одному з базисів. Так, одним із широко застосовуючих методів оцінки центральної частоти є обчислення центра ваги енергетичного спектра сигналу [66-74]. Цей метод знайшов застосування головним чином при аналізі широкосмугових сигналів, ширина спектрів яких може порівнюватися з їх центральною частотою. При використанні такого підходу передбачається, що значення середньої частоти, знайденої з енергетичного спектра за допомогою методу моментів, відповідає швидкості руху центру мас цілі. Однак наявність перешкод призводить до того, що енергія зашумленого сигналу розподіляється між спектральними коефіцієнтами не так, як вона була б розподілена за відсутності перешкод. Це, в свою чергу, призводить до зміщення центру ваги енергетичного спектра. Відповідно, такий підхід буде малоефективний при аналізі вузькосмугових сигналів, що приймаються на тлі перешкоди.

Для сигналів, чия форма близька до гармонійної, більш прийнятним буде метод оцінки з перевіркою N гіпотез [2], який і розглядається в даній роботі. Цей метод має на увазі аналіз амплітуд спектральних компонентів незалежно один від одного. Рішення про наявність сигналу і його частоті приймається при перевищенні однієї з амплітуд деякого порогового значення, яке залежить від максимально допустимої ймовірності помилкової тривоги.

1.2 Вибір моделі сигналу і шуму

Крім оцінки частоти гармонічного сигналу важливими залишаються завдання оцінки інших його параметрів: амплітуди і фазового зсуву. Вирішенню цих завдань присвячено безліч робіт, в тому числі [32, 41, 42]. Однак оцінка фази і амплітуди гармонічного коливання без знання його

частоти є складною, а іноді й задачею без вирішення. Тому дана робота присвячена оцінці частоти. У більшості з робіт, присвячених оцінці параметрів радіолокаційного сигналу, дискретна за часом прийнята послідовність задається наступним виразом:

$$\dot{x}(l) = \dot{s}_g(l) + \dot{\omega}(l), \quad (1.2)$$

Де $s_g(l)$ – корисний сигнал, один або декілька параметрів якого потрібно оцінити, $\dot{\omega}(l)$ – адитивний білий шум.

При цьому вибір в якості перешкоди білого шуму, зазвичай, пояснюється тим, що реальні перешкоди часто досить точно описуються саме за допомогою білого шуму. У той же час безліч робіт, в тому числі [67 - 69, 71], присвячених опису реальних перешкод, що мають місце при прийомі радіолокаційних сигналів, говорять про те, що найчастіше характеристики цих перешкод далекі від характеристик білого шуму. До небілого характеру заважаючого впливу призводить, зокрема, наявність пасивної перешкоди, створюваної відображенням зондуючого випромінювання від нерухомих об'єктів, розташованих поблизу РЛС.

Це в свою чергу, призводить до того, що параметри алгоритмів оцінки сигналу, розраховані теоретично і перевірені експериментально за допомогою статистичного моделювання при впливі на сигнал адитивного білого шуму, можуть відрізнитися від параметрів, якими будуть володіти ці алгоритми в умовах, коли на сигнал впливає небілий шум.

Щоб узагальнити результати на більш складні види перешкод, ніж білий шум, в даній роботі розглядається наступна модель прийнятої послідовності:

$$\dot{x}(l) = \dot{s}_g(l) + \dot{\omega}_M(l), \quad (1.3)$$

Де $\dot{\omega}_M(l)$ – однозв'язний марковський ланцюг гауссовських випадкових величин.

Таким чином, передбачається, що сусідні відліки завади, що представляють собою нормально розподілені випадкові величини, пов'язані

один з одним коефіцієнтом кореляції R , оцінці якого присвячений відповідний підрозділ роботи. Окремим випадком такого шуму при $R = 0$ є білий гауссовський шум.

Вибір такої моделі шуму пояснюється тим, що, по-перше, вона краще описує реальні перешкоди, що виникають при прийомі радіолокаційного сигналу, що дозволяє застосувати результати до різних видів перешкод; по-друге, така модель дозволяє створити метод оцінки частоти сигналу в умовах змінюючого характеру шуму (його зміна моделюється зміною параметра R); по-третє, така модель виявилася зручною для теоретичного обґрунтування деяких параметрів системи оцінки частоти сигналу (дисперсій квадратурних складових відліків дискретних спектрів прийнятих послідовностей і порогів рішення [77]), без яких неможливо поставити максимально допустиму ймовірність помилкової тривоги.

1.3 Вибір базису

Як було вже зазначено, для оцінки частоти сигналу в даній роботі розглядається метод оцінки з перевіркою N гіпотез. Це означає, що при аналізі прийнятої послідовності може бути винесено рішення або про відсутність в ній корисного сигналу $\dot{s}_g(l)$, або про те, що сигнал в послідовності присутній, а його нормована частота g дорівнює одному з N цілих чисел. При цьому фактичне значення частоти g може бути одно будь-якому дійсному числу з діапазону $[0; N)$. Тобто роздільна здатність аналізатора по частоті складає N .

Оцінка частоти з перевіркою N гіпотез може бути організована за допомогою набору N фільтрів, перевищення граничного значення на виході одного або декількох з яких дає достатньо підстав для оцінки параметра сигналу.

Таким набором фільтрів може служити процесор узагальнених

дискретних перетворень Фур'є (ДПФ), що має N входів і N виходів [2]. Виявлення в прийнятій послідовності $\dot{x}(l)$ корисного сигналу $\dot{s}_g(l)$, а також оцінка нормованої частоти g цього сигналу в цьому випадку проводяться за допомогою аналізу відліків спектру, отримуваних на виходах процесора узагальнених ДПФ.

Якщо прийняту послідовність $\dot{x}(l)$ представити у вигляді N -мірного вектора, то можна сказати, що узагальнені ДПФ переводять вектор $\dot{x}(l)$ з одного ортогонального векторного простору в інший [20]. У разі, коли в якості базису для ДПФ виступає класичний тригонометричний базис Фур'є, мова йде про переведення сигналу з тимчасової області в частотну [21, 22] (оскільки функціями даного базису є дискретизовані гармонійні коливання з цілими нормованими частотами).

Класичний дискретний базис Фур'є (базис ДЕФ), який задається виразом [26, 30]

$$f_k(l) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} ,$$

де k – номер гармоніки (нормована частота), l – номер відліку (дискретний час), широко застосовується в цифровій обробці сигналів.

Іншими базисами, поширеними при обробці сигналів, є базиси Уолша [24], базиси дискретно-косинусних перетворень та ін. При цьому на даний момент широкого застосування в техніці не знайшли базиси Віленкіна-Крестенсона функцій (ВКФ).

Історія цих базисів починається з публікації Дж. Л. Уолша [11], в якій автор запропонував повну систему знакових функцій, впорядкованих за кількістю знакових змін. Згодом ця система отримала назву Уолша-Качмажа [26,30]. Пелі Р.Є. в своїй статті [12] запропонував альтернативний спосіб упорядкування систем Уолша.

Кількома роками пізніше вийшли роботи Віленкіна Н. Я. [13, 14], в яких автор повідомив про відкриття нового класу функцій. Більш детально базиси, запропоновані Віленкіним Н. Я., були вивчені Е. Крестенсоном.

Зокрема, в своїй статті [15] він показав зв'язок між цими новими базисами і базисами Уолша. А самі нові базиси Е. Крестенсон назвав узагальненими функціями Уолша. Пізніше вони стали відомі, як базиси ВКФ.

У 1965 році в спільній статті Дж. Кулі і Дж. Тьюкі [16] було запропоновано новий метод обробки цифрової інформації – БПФ. Розвиток цей метод отримав в подальших роботах Дж. Кулі [17, 19]. Завдяки цьому методу стало можливим створення цифрових фільтрів для прийому і обробки сигналів, в тому числі і радіолокаційних [26, 28, 64]. До цього створенню таких фільтрів заважала низька швидкодія існуючих на той час обчислювальних машин.

Поява методів БПФ повернула інтерес дослідників не тільки до класичних, але і до узагальнених перетворень Фур'є. Так, в 1975 році вийшла книга Трахтман А. М. і Трахтман В. А. [26], яка є ще однією помітною роботою, що присвячена ВКФ. У ній автори показали зв'язок між базисами ВКФ, базисами Уолша і базисами ДЕФ. А саме, в цій книзі було показано, що і базиси ДЕФ, і базиси Уолша є окремими випадками базисів ВКФ. Крім того, у праці викладені алгоритми синтезу деяких фундаментальних систем ВКФ довільного порядку. Автори наводять структури графів БПФ в базисах ВКФ. Показано, що БПФ в базисах ВКФ вимагають менше машинного часу, ніж БПФ в базисі ДЕФ тієї ж розмірності. У цій же книзі було здійснено спробу оцінки кількості всіх можливих симетричних базисів ВКФ заданого порядку. Однак оцінка, запропонована авторами, виявилася невірною; вона може бути спростована емпіричним шляхом.

Машарський С. М. [44, 49] запропонував два алгоритми БПФ в базисах ВКФ, заснованих на методі факторизації, який запропонував І. Гуд [43] для матриць ДЕФ. Фактично в статті Машарського наведені алгоритми ШПФ в двох симетричних базисах ВКФ.

Білецький А. Я. в [30] пропонує формулу для оцінки кількості симетричних базисів ВКФ, яка підтверджується емпірично. Крім того, дана книга містить опис двох методів, що дозволяють синтезувати всі симетричні базиси ВКФ з довільними параметрами: метод спрямованої перестановки і метод індикаторних матриць [33, 34, 37]. На прикладі методу індикаторних

матриць автор показує можливість застосування складових кодів Грея для синтезу симетричних систем ВКФ [36, 38 - 40].

Умняшкін С. В. в своїй дисертаційній роботі пропонує використовувати БПФ в базисі ВКФ (які в даній роботі названі перетвореннями Крестенсона-Леві) для стиснення зображень. При цьому автор розглядає базиси ВКФ рівною трьом. Цей факт призводить до того, що базисні функції ВКФ містять ірраціональні комплексні числа, що знижує швидкодію операцій ШПФ в порівнянні з базисами ВКФ, заснованими на модулі 4. Однак варто зазначити, що при стисненні зображень швидкодія має менший пріоритет, ніж якість стиснення. Швидкодія більш затребуваним в системах, що працюють в реальному часі, зокрема, радіолокаційних системах.

Шустиков О. Є. пропонує використовувати базиси ВКФ для обробки (зокрема для розпізнавання) мовних сигналів. У його роботі [62] зазначається про те, що велика кількість симетричних систем ВКФ одного порядку дозволяє вибрати для кожної фонетичної групи свій базис ВКФ.

Назаров Л.Є. запропонував використовувати спектральний аналіз в базисах ВКФ для захисту від шумів бінарних сигналів. При цьому в якості заважаючого впливу було обрано білий гауссовський шум.

Що стосується радіолокації, в [26] і [30] розглянуті спектри деяких поширених сигналів в базисах ВКФ. Однак в цих книгах розглянуті лише випадки детермінованих сигналів, спектральний аналіз випадкових процесів в базисі ВКФ (необхідний при вирішенні завдань відділення корисного сигналу від перешкоди) в них не зачіпається. Про можливість застосування базисів ВКФ для гармонійного аналізу сигналів пише Агієвич С. М. У статтях [50 - 53] крім іншого автор відзначає, що при деяких параметрах базисів ВКФ БПФ в них перевершує за швидкістю БПФ в базисах ДЕФ. Однак розвитку дана тема в подальших роботах авторів не отримала.

Крім того, про спектральний аналіз радіосигналів в базисах ВКФ пишуть Щетінін В. І., Малозьомов В. Н., Машарський С. М. Але варто зазначити, що у їхніх працях тема оцінки частоти сигналу не досліджується [43 - 49].

Таким чином, наскільки нам відомо, на сьогоднішній день немає публікацій, в яких докладно розглянута можливість застосування базисів

ВКФ для оцінки параметрів радіолокаційних сигналів. Проте, дослідження на цю тему представляє інтерес мінімум з двох причин. По-перше, як вже було зазначено, ці базиси пропонують більш високу швидкодію у порівнянні з базисами ДЕФ, а по-друге, – оскільки при деяких параметрах система ВКФ не містить ірраціональних чисел, БПФ в базисі ВКФ не накопичують похибку округлення на відміну від БПФ в базисі ДЕФ [31].

1.4 Висновки по розділу

Огляд літератури та аналіз наявних методів оцінки частоти показав, що проблема удосконалення методів оцінки сигналів, що приймаються на тлі перешкод, залишається актуальною.

Метою роботи є вивчення можливості застосування базисів ВКФ для розв'язання задачі оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу (1.1), що приймається на тлі адитивного корельованого шуму, а також розробка алгоритму оцінки частоти, заснованого на спектральному аналізі в базисах ВКФ.

Для досягнення даної мети потрібно вирішити наступні завдання:

- розробка ефективних алгоритмів синтезу базисів ВКФ із заданими параметрами

- розробка алгоритмів ШПФ в будь-яких базисах ВКФ із заданими параметрами

- розробка методів оцінки частоти зашумленого доплерівсько-імпульсного сигналу, що забезпечують необхідну мінімальну ймовірність вірної оцінки при заданій максимальній ймовірності помилкової тривоги;

- перевірка ефективності отриманих методів

У якості критерію ефективності базису при оцінці частоти сигналу вибрано відношення сигнал/шум за потужністю, що забезпечує необхідну ймовірність вірної оцінки при ймовірності помилкової тривоги, що не перевищує максимально допустиму задану величину.

РОЗДІЛ 2

СИНТЕЗ БАЗИСНИХ СИСТЕМ ВІЛЕНКІНА-КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦІЙ

2.1 Матричне подання ДЕФ

Класичні перетворення Фур'є над безперервним нескінченним у часі сигналом, що переводять його з тимчасової області в частотну, виконуються за допомогою виразу [18]:

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

де $\dot{X}(\omega)$ – безперервний спектр сигналу в базисі Фур'є, $e^{-j\omega t}$ – комплексна експоненціальна функція двох змінних, що представляє собою базис континуальних перетворень Фур'є, t – час, ω – частота. Таким чином, континуальний базис Фур'є визначений на нескінченному інтервалі часу і нескінченному інтервалі частот.

При дискретних перетвореннях Фур'є кінцевих у часі дискретних сигналів час t замінюється цілочисельним параметром l , таким, щот $t = lT$, де T – період дискретизації. Замість частоти ω використовується цілочисельний параметр k : $\omega = \frac{k}{T}$. Причому і час, і частота обмежені N відліками: $l, k = \overline{0 \dots N - 1}$. При цьому безперервний базис $e^{-j\omega t}$ перетворюється у безліч з N базисних дискретно-експоненційних функцій (ДЕФ). Аналітично дискретний класичний базис Фур'є задається наступним виразом:

$$f_k(l) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} . \quad (2.2)$$

Тут параметр k (дискретна частота) відіграє роль номера функції в базисі, а параметр l (дискретний час) – аргумент базисної функції.

Для спрощення подальших записів введемо наступне позначення для

фазообертаючого множника:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}. \quad (2.3)$$

Для підготовки до дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) безперервний сигнал $\dot{x}(t)$ обмежується інтервалом $[0; (N-1)T]$ і дискретизується у часі з періодом дискретизації T . Отриманий дискретний сигнал $\dot{x}(t)$ складається з N відліків.

Формула (2.1) для випадку ДПФ з урахуванням (2.3) набуває такого вигляду:

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l) W^{kl}. \quad (2.4)$$

Тут $\dot{X}(k)$ – набір комплексних коефіцієнтів, що є спектром дискретного сигналу $\dot{x}(t)$ в класичному дискретному базисі Фур'є.

Оригінальний сигнал може бути відновлений зі спектра $\dot{X}(k)$ за допомогою формули

$$\dot{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k) W^{-kl}. \quad (2.5)$$

Пара виразів (2.4) і (2.5) задає відповідно прямі і зворотні класичні ДПФ [26].

У загальному ж випадку формула для узагальнених перетворень Фур'є над сигналом $\dot{x}(l)$ має такий вигляд:

$$\dot{X}^{(\phi)}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l) \phi_k(l),$$

Де $\dot{X}^{(\phi)}(k)$ – k -й спектральний коефіцієнт розкладання сигналу $\dot{x}(l)$ в узагальнений дискретний ряд Фур'є, $\phi_k(l)$ – l -й відлік k -й базисної функції.

Кінцеве $\dot{x}(l)$ традиційно називається вибіркою сигналу $\dot{x}(t)$, а число N – об'ємом вибірки.

Будь-яка дискретна функція $\dot{x}(l)$ (в загальному випадку комплексна), що

складається з N відліків, може бути представлена у вигляді вектора \bar{x} в N -вимірному лінійному векторному просторі [20]. При цьому узагальнена дискретне перетворення Фур'є буде являти собою ортогональне перетворення, що переводить вектор \bar{x} з одного базису до іншого. Базисом векторного простору називається така безліч векторів цього простору, що будь-який вектор цього простору може бути однозначно представлений лінійною комбінацією векторів цієї множини. Вектори, що становлять базис, називаються базисними векторами.

На практиці для здійснення векторних перетворень найчастіше застосовують ортогональні системи базисних векторів. До таких систем відносяться, зокрема, система ДЕФ і система функцій Уолша, представлені у вигляді наборів векторів. Обидва цих базиса набули широкого поширення в системах передачі та обробки даних в якості базисів ортогональних перетворень: класичного дискретного перетворення Фур'є і перетворення Уолша.

В даному розділі буде показано, що обидва цих базиса є окремими випадками систем Віленкіна-Крестенсона функцій (ВКФ), алгоритми синтезу яких також розглянуті в цьому розділі. Крім того, цей розділ містить алгоритми синтезу дочірніх систем ДЕФ, Уолша і ВКФ, отриманих із материнських шляхом зміни нумерації базисних векторів відповідних материнських систем.

Впорядковану множину функцій (2.2) зручно представляти у вигляді E_N – квадратної матриці розмірністю $N \times N$. Для випадку $N = 8$ ця матриця приймає наступний вигляд [26]:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7l$$

$$\{f_k(l)\} \Rightarrow E_8 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix}$$

k.(2.6)

Скориставшись формулою Ейлера, уявімо ступінь фазообертаючого множника у вигляді

$$W^{kl} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kl\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kl\right). \quad (2.7)$$

З (2.7) очевидно, що ДЕФ є N-періодичними. Для них вірні такі вирази:

$$W^{l+kN} = W^l, \quad l = \overline{0 \dots N-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

і

$$W^{\frac{N}{2}+l} = -W^l, \quad l = \overline{0 \dots \frac{N}{2}-1}. \quad (2.8)$$

Отже, для будь-яких $k, l = \overline{0 \dots N-1}$ буде правильною рівність:

$$f_k(l) = (f_1(l))^k. \quad (2.9)$$

Скориставшись виразами (2.8) і (2.9), можемо спростити матрицю (2.6)

до вигляду

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ l \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & -W^0 & -W & -W^2 & -W^3 \\ W^0 & W^2 & -W^0 & -W^2 & W^0 & W^2 & -W^0 & -W^2 \\ W^0 & W^3 & -W^2 & W^1 & -W^0 & -W^3 & W^2 & W^5 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W & W^2 & -W^3 & -W^0 & W^1 & -W^2 & W^3 \\ W^0 & -W^2 & -W^0 & W^2 & W^0 & -W^2 & -W^0 & W^2 \\ W^0 & -W^3 & -W^2 & -W & -W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}$$

k. (2.10)

Для окремого випадку при $N = 8$ побутують наступні рівності:

$$W^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

і

$$W^4 = e^{-j\pi} = -1.$$

Нульова ступінь фазообертаючого множника, за будь-яких N тотожно дорівнює одиниці $W^0 \equiv 1$. З огляду на ці рівності, можна спростити отриману матрицю:

$$\{f_k(l)\} \Rightarrow E_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & -j & W^3 & -1 & -W & j & -W^3 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & W^3 & j & W & -1 & -W^3 & -j & W^5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W & -j & -W^3 & -1 & W & j & W^3 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -W^3 & j & -W & -1 & W^3 & -j & W \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$k.$

Аналізуючи матрицю (2.10) отримуємо наступні рекурентні алгоритми формування рядків базисних матриць ДЕФ для будь-яких N [26, 30]:

$$f_{2k}(l) = f_k(\text{mod}_N(2l)), k \geq 1, l = \overline{0 \dots N-1} \quad (2.11)$$

– для парних рядків,

$$f_{2k+1}(l) = f_{2k}(l)f_1(l), k \geq 1, l = \overline{0 \dots N-1}. \quad (2.12)$$

– для непарних рядків.

Доповнюють рекурентний алгоритм формування рядків початкові умови:

$$f_0(l) = 1, l = \overline{0 \dots N-1} \quad (2.13)$$

і

$$f_1(l) = \begin{cases} W^l, l = 0 \dots \overline{\frac{N}{2} - 1}; \\ -W^{\text{mod}_{N/2}(l)}, l = \overline{\frac{N}{2}} \dots N - 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Матриця (2.10) володіє наступними характерними рисами: по-перше, елементи правої половини парних рядків повторюють відповідні елементи лівої половини:

$$f_{2k}\left(l + \frac{N}{2}\right) = f_{2k}(l), l = 0 \dots \overline{\frac{N}{2} - 1}; \quad (2.15)$$

по-друге, елементи правої половини непарних рядків рівні відповідним елементам лівої половини, помноженим на -1

$$f_{2k+1}\left(l + \frac{N}{2}\right) = -f_{2k+1}(l), l = 0 \dots \overline{\frac{N}{2} - 1}. \quad (2.16)$$

В силу симетрії матриці (2.10) відносно головної діагоналі всі зазначені для її рядків співвідношення виявляються вірними і для її стовпців.

Вирази (2.8), (2.9), (2.11) – (2.16) значно спрощують обчислення, необхідні для формування матриці E_N для довільного двійково-раціонального порядку ($N = 2^n, n = 1, 2, \dots$).

2.2 Ізоморфне відображення матриць ДЕФ

Візьмемо як приклад матрицю ДЕФ п'ятого порядку.

$$E_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^3 & W^1 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \end{matrix}, W = e^{-j\frac{2\pi}{5}}.$$

Щоби спростити запис цієї матриці, застосуємо ізоморфне відображення цієї матриці. Для цього залишимо в її осередках лише показники ступеня фазообертаючого множника:

$$E_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Надалі таке зображення матриці базисних функцій буде використовуватися не тільки для позначення систем ДЕФ, але і для базисних систем інших функцій.

2.3 Синтез симетричних дочірніх систем ДЕФ

Алгоритми, описані в підрозділі 2.1, призводять до синтезу симетричної системи ДЕФ. Симетричні базиси ДЕФ зручні тим, що при зворотньому БПФ структура дерева перетворення залишається такою ж, як і структура дерева при прямому БПФ [30]. Симетричні системи ДЕФ (які будемо називати дочірніми системами) можна отримати, переставляючи

рядки базової матриці ДЕФ (яку назвемо материнською) за деякими правилами. Цей підрозділ містить матеріали, що описують ці правила. При цьому нумерацію рядків і стовпців матриць будемо вести від нуля.

Легко перевірити, що матриця, наведена в підрозділі 2.1, є не єдиною симетричною матрицею ДЕФ аналогічного порядку [35]. Для прикладу розглянемо ізоморфне відображення матриці ДЕФ третього порядку:

$$E_3^{(1)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & 2l \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 1 \\ k & & & & \end{matrix}. \quad (2.17)$$

Якщо переставити місцями рядки матриці $E_3^{(1)}$, що відповідають номерам $k = 1$ і $k = 2$, отримуємо наступну матрицю:

$$E_3^{(2)} = \begin{matrix} & & & & 0 & 1 & 2l \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \\ k & & & & & & \end{matrix}. \quad (2.18)$$

Очевидно, що і матриця (2.17), і матриця (2.18) є симетричними матрицями ДЕФ.

Зауважимо, що нульова базова функція ДЕФ може займати лише нульовий рядок в дочірньої симетричної матриці. Якщо на нульовий рядок поставити будь-яку іншу функцію, це очевидно призведе до порушення симетричності матриці, оскільки всі елементи нульового стовпця матриці дорівнюють нулю. Відповідно, для кожного інтервалу визначення N існує $(N - 1)!$ систем ДЕФ, деякі з яких є симетричними.

Для синтезу симетричних систем скористаємося методом спрямованої перестановки базисних функцій. Для цього виберемо в якості материнської системи систему ДЕФ, яка формується за допомогою виразу (2.9). На місце першого рядка (нульовий займає нульова базова функція) можна поставити

будь-яку з решти $N - 1$ базисних функцій. Решта $N - 2$ базисні функції розташовуються таким чином, щоби забезпечити виконання умови симетричності отриманої матриці:

$$f_k(l) = f_l(k), k, l = \overline{0 \dots N - 1}. \quad (2.19)$$

Для ілюстрації прикладу виберемо базову матрицю ДЕФ п'ятого порядку і знайдемо всі її дочірні симетричні матриці.

$$E_5^{(1)} = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Будемо позначати через $E_N^{(i)}$ i -ю симетричну матрицю ДЕФ порядку N , отриману послідовно з материнської матриці ДЕФ.

Поставимо на перший рядок нової матриці другу базисну функцію ДЕФ п'ятого порядку:

$$f_2(l) = \{0, 2, 4, 1, 3\}.$$

Для того, щоби не порушувалася умова симетричності (2.19) майбутньої матриці $E_5^{(2)}$, необхідно, щоби другий рядок в ній зайняла базисна функція з номером 4. У третій рядок можна записати лише першу базисну функцію; останній, четвертий рядок займе третя базисна функція:

$$E_5^{(2)} = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ставлячи на перший рядок третю базисну функцію, приходимо до матриці:

$$E_5^{(3)} = \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Остання з можливих симетричних матриць ДЕФ п'ятого порядку – $E_5^{(4)}$

– містить в першому рядку четверту базисну функцію:

$$E_5^{(4)} = \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Якщо порядок материнської матриці ДЕФ N – просте число, то для синтезу симетричної дочірньої матриці на перший рядок можна поставити будь-яку з базисних функцій (крім нульової). При цьому значення елементів першого рядка цієї матриці в ізоморфній формі однозначно визначають порядок проходження базисних функцій материнської матриці. Таким чином, при простому N існує $N - 1$ симетричних матриць ДЕФ, кожна з яких починається з однієї із $N - 1$ базисних функцій.

Перейдемо до випадку, коли порядок N матриці ДЕФ є складовим числом, тобто може бути представлений у вигляді добутку ступенів простих чисел. Як приклад візьмемо матрицю ДЕФ порядку $N = 2 \cdot 3 = 6$.

Материнська матриця ДЕФ в цьому випадку виглядає наступним чином:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5l$$

$$E_6^{(1)} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Проаналізувавши цю матрицю, приходимо висновку, що в базовій системі ДЕФ шостого порядку є функції, що набувають нульового значення при аргументі $l \neq 0$. Розміщення такої функції в першому рядку матриці призводить алгоритм спрямованої перестановки у кінцевий стан. Справа в тому, що немає жодної базисної функції (крім нульової), що приймає нульове значення при $l = 1$, а саме такої функції вимагає описана ситуація.

Звідси приходимо до висновку про те, що функції, які беруть нульове значення на інтервалі $l = \overline{2 \dots N - 1}$, не можуть породити симетричну матрицю, якщо їх розмістити в першому рядку.

Як приклад розмістимо в першому рядку дочірньої матриці ДЕФ шостого порядку третю базову функцію:

$$E = \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ k \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Тепер для того, щоби виконалось умова симетричності (2.19), потрібно, щоб у другому рядку містилася базисна функція, приймаюча нульове значення при $l = 2$. Жодна з решти незаписаних функцій не відповідає цій вимозі. Цей факт доводить виведене вище твердження.

Очевидно, що нульові значення при $l \neq 0$ беруть лише ті базисні функції, номери яких мають з порядком матриці N спільний дільник.

Узагальнюючи наведені вище спостереження, приходимо до висновку про те, що число L_N симетричних матриць ДЕФ порядку N дорівнює

кількості чисел на інтервалі $\overline{0 \dots N - 1}$, взаємно простих з N . Іншими словами,

$$L_N = \phi(N),$$

де $\phi(N)$ – функція Ейлера.

Окремими випадками застосування цього правила є наступні твердження:

1) кількість симетричних матриць ДЕФ при N , що дорівнює простому числу, становить $L_N = N - 1$, як і було з'ясовано раніше;

2) кількість симетричних матриць ДЕФ двійковій-раціонального порядку $N = 2^n, n = 0, 1, 2 \dots$ дорівнює кількості непарних чисел на інтервалі N і становить $L_N = \frac{N}{2}$.

Для розглянутого прикладу при $N = 6$ на інтервалі $\overline{0 \dots N - 1}$ існує лише два числа, які є взаємно простими з N . Це 1 і 5. Першому з них відповідає материнська матриця $E_6^{(1)}$, другого – матриця

$$E_6^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

що містить у другому рядку п'яту базисну функцію.

Сформулюємо правило, яке дозволить синтезувати всю безліч симетричних матриць ДЕФ для будь-якого заданого порядку N . Для цього перетворимо формулу (2.9) для випадку ізоморфного відображення матриці ДЕФ:

$$f_k(l) = f_1(\text{mod}_N(kl)). \quad (2.20)$$

Це правило залишається вірним і для дочірніх матриць. Так,

підставляючи в якості першого рядка дочірньої матриці ДЕФ базисну функцію, номер якої взаємно простий з порядком матриці N , можна отримати всі інші елементи нової матриці за допомогою виразу (2.20).

Проілюструємо це правило на прикладі. Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{L_N}\}$ – множина, що складається з L_N чисел, взаємно простих з N . Тоді, відповідно до правила (2.20), для того, щоб дізнатися, яка базисна функція ДЕФ материнської матриці $E_N^{(1)}$ займе k -й рядок нової симетричної матриці $E_N^{(i)}$ потрібно помножити k на число a_i , а результат взяти по модулю N .

Розглянемо материнську матрицю ДЕФ $E_8^{(1)}$:

$$E_8^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В даному випадку безліч $A = \{1,3,5,7\}$. Це означає, що будь-яке непарне число від 1 до 7 може бути використано для синтезу симетричної матриці ДЕФ восьмого порядку. У табл. 2.1 Наведені результати множення числа $k = \overline{0 \dots 7}$ на елементи множини A , взяті по модулю 8.

Таблиця 2.1

До синтезу симетричних матриць ДЕФ

k	$E_8^{(1)}, a_i = 1$	$E_8^{(2)}, a_i = 3$	$E_8^{(3)}, a_i = 5$	$E_8^{(4)}, a_i = 7$
0	0	0	0	0
1	1	3	5	7

2	2	6	2	6
3	3	1	7	5
4	4	4	4	4
5	5	7	1	3
6	6	2	6	2
7	7	5	3	1

Три правих стовпчика цієї таблиці містять номери базисних функцій, які, будучи розміщеними в наведеному порядку, утворюють симетричні дочірні матриці ДЕФ. Зокрема, матриця $E_8^{(2)}$ згідно табл. 2.2 приймає такий вигляд:

$$E_8^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ k \end{matrix} & \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \end{matrix} \right. \end{matrix}.$$

Легко переконатися в тому, що ця матриця симетрична, і це підтверджує наведене правило синтезу симетричних матриць ДЕФ.

2.4 Базис функцій Уолша

Системи ортогональних функцій Уолша широко поширені для вирішення завдань, пов'язаних зі спектральним аналізом дискретних сигналів [24, 57]. У цьому підрозділі описується алгоритм синтезу симетричних систем Уолша-Адамара заданого порядку, а також ряду інших симетричних систем Уолша. Операцію отримання спектра дискретного сигналу в базисі функцій, відмінних від ДЕФ далі будемо називати узагальненим

перетворенням Фур'є в обраному базисі.

Особливістю функцій Уолша є те, що будь-який відлік кожної з функцій може приймати лише одне з двох речових значень: +1 або -1. Цей факт забезпечує деякі переваги процесора узагальнених ДПФ в базисі функцій Уолша в порівнянні з процесором ДПФ в базисі ДЕФ. По-перше, функції Уолша більш зручні для обчислення на ЕОМ. По-друге, і це головна перевага, процесор ДПФ-Уолша забезпечує на порядок більш високу швидкодію при отриманні спектра, ніж процесор ДПФ-ДЕФ, за рахунок виключення з обчислень операції множення [26, 30]. Однак ці переваги не дозволяють повністю замінити базис ДЕФ базисом функцій Уолша у всіх додатках. Зокрема, базис Уолша практично не може бути використаний для фільтрації гармонійного сигналу, що робить неможливим його застосування для виявлення такого сигналу, що приймається на тлі шуму, в той час як з цим завданням справляються процесори ДПФ-ДЕФ [30].

Базисну систему Уолша складають всі функції Уолша заданого порядку, зведені разом і пронумеровані. Як і у випадку з базисною системою ДЕФ, число відліків кожної функції Уолша N дорівнює кількості функцій, що становлять базис. При цьому число N називається інтервалом визначення функцій Уолша. Можливі значення числа N задаються таким співвідношенням

$$N = 2^n, n = 1, 2 \dots \quad (2.21)$$

Відповідно, системи функцій Уолша визначені на двійково-раціональному інтервалі в просторі чисел з двійковою системою числення.

2.4.1 Базис Уолша-Адамара

Для початку розглянемо систему Уолша-Адамара, яка є історично першою в класі систем функцій Уолша. Як і у випадку з ДЕФ функції Уолша зручно представляти у вигляді квадратних матриць. У матриці Уолша-Адамара функції Уолша розташовуються в такому порядку, що їх відліки

утворюють матрицю Адамара. Це означає, що систему Уолша-Адамара можна синтезувати, ґрунтуючись на відомих властивостях цих матриць. Матриця Адамара другого порядку (параметр n зі співвідношення (2.21) дорівнює одиниці) має такий вигляд:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тут варто відзначити, що якщо прийняти відповідно до (2.3)

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi} = -1,$$

то матрицю H_2 можна записати у вигляді

$$H_2 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix}.$$

При переході до ізоморфного зображення матриці H_2 елементи, що мають значення 1 замінюються нулями, а елементи, що мають значення -1 – одиницями. Саме ізоморфне відображення буде мати наступний вигляд:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Далі будемо використовувати лише ізоморфні відображення матриць Уолша. Відзначимо також, що матриця (2.22) являє собою єдину можливу систему функцій Уолша для порядку $N = 2$.

При $N = 2^2 = 4$ елементами матриці Адамара H_4 стануть матриці H_2 :

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Видно, що при збільшенні параметра n на одиницю кількість рядків матриці Адамара подвоюється, так само, як і кількість елементів у кожній з них. Для довільного двійково-раціонального порядку виконується наступна рівність

$$H_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Введемо наступне позначення для функцій, що становлять систему Уолша-Адамара: $h_k(l)$, де k – номер базисної функції Уолша (номер рядка матриці Адамара, нумерація рядків починається з нуля), l – аргумент базисної функції Уолша (номер стовпчика матриці Адамара).

Використовуючи матрицю (2.22) і правило (2.24) синтезуємо матрицю Адамара восьмого порядку H_8 :

$$H_8 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{array} \quad (2.25)$$

Сформулюємо деякі властивості отриманої матриці. Вона, як і базова система ДЕФ, синтезована в підрозділі 2.1, є симетричною. Це означає, що всі висновки щодо її рядків можна застосувати й до її стовпців. Кожний рядок цієї матриці, за винятком нульового, складається з рівної кількості нулів і одиниць. Нульовий же рядок ізоморфного відображення матриці Уолша-Адамара будь-якого порядку складається з нулів. Рівність всіх елементів першого рядка нулям і однакова кількість нулів і одиниць у всіх інших рядках є особливостями не тільки системи Уолша-Адамара, але і будь-якої іншої системи Уолша. Аналізуючи матриці (2.22), (2.23) і (2.25) приходимо до висновку про те, що для першої функції в матриці Адамара будь-якого можливого порядку виконується рівність:

$$h_1(l) = \begin{cases} +1, & \text{для чётных } l; \\ -1, & \text{для нечётных } l. \end{cases}$$

Аналізуючи матриці (2.22) і (2.25) приходимо до наступних

рекурентним формулам, за допомогою яких можна синтезувати систему функцій Уолша-Адамара будь-якого порядку:

$$h_{2k}(2l) = h_{2k}(2l + 1) = h_{2k}(l)$$

– для парних функцій і

$$h_{2k+1}(l) = h_{2k}(l)h_1(l)$$

– для непарних функцій.

Аналітичний вираз для опису базису функцій Уолша-Адамара має наступний вигляд:

$$h_k(l) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} k_i l_i} = e^{j\pi \sum_{i=0}^{n-1} k_i l_i},$$

де k_i , l_i – розрядні коефіцієнти двійкового представлення чисел k і l відповідно (молодший розряд – нульовий).

2.4.2 Базис Уолша-Пелі

Цей підрозділ присвячений системі функцій Уолша, упорядкованих за відмінним від розглянутого вище способу. Цей спосіб був запропонований Р. Е. Пелі [12]. Безліч елементів матриці Уолша-Пелі будемо позначати $\{p_k(l)\}$, де k – номер рядка матриці (номер базисної функції Уолша-Пелі), l – номер стовпця матриці (аргумент базисної функції Уолша-Пелі).

Система Уолша-Пелі може бути отримана з системи функцій Уолша-Адамара за допомогою двійкової інверсії номерів функцій. Для цього числа, що представляють собою двійкове подання номерів функцій Уолша-Адамара, записуються в зворотньому порядку. В результаті виходить ряд чисел, що представляє собою нумерацію рядків в системі Уолша-Пелі. Приклад синтезу двійково-інверсних номерів для випадку $N = 8 = 2^3$ приведений у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Синтез двійково-інверсних номерів

Номер	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Послідовність рядків матриці Уолша-Адамара восьмого порядку H_8 , зазначена в крайньому правому стовпчику табл. 2.1, утворює матрицю Уолша-Пелі восьмого порядку P_8 :

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \{p_k(l)\} \Rightarrow P_8 = \\
 \\
 \\
 \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (2.26)$$

Матриця (2.26) є симетричною і відрізняється від матриці (2.25) лише розташуванням рядків. Матрицю Уолша-Пелі будь-якого можливого порядку можна отримати з матриці Уолша-Пелі вдвічі меншого порядку за допомогою наступного мнемонічного правила. Ліва половина матриці P_{2^l} виходить, якщо кожен рядок матриці $P_{2^{l-1}}$ записати двічі. Щоб отримати праву половину матриці P_{2^l} , потрібно до кожного рядка неповної матриці з непарним номером дописати цей же рядок, а до кожного парного рядка - його інверсні значення. Це правило свідчить про деяку схожість систем ДЕФ і Уолша-Пелі: в обох системах праві половини парних рядків повторюють ліві, а праві половини непарних рядків інверсні по відношенню до лівих.

Згідно з цим правилом, можемо записати наступний вираз для першого рядка матриці Уолша-Пелі будь-якого можливого порядку:

$$p_1(l) = \begin{cases} +1, l = 0 \dots \frac{N}{2} - 1; \\ -1, l = \frac{N}{2} \dots N - 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Правило (2.27) і рівність нулям всіх елементів нульового рядка будь-якої системи функцій Уолша є початковими умовами рекурентного алгоритму синтезу матриць Уолша-Пелі будь-якого двійково-раціонального порядку. Сам алгоритм виглядає таким чином:

$$p_{2k}(l) = p_k(\text{mod}_N(2l))$$

– для парних базисних функцій,

$$p_{2k+1}(l) = p_{2k}(l)p_1(l)$$

– для непарних базисних функцій.

Оскільки матриця Уолша-Пелі виходить з матриці Уолша-Адамара шляхом двійкової інверсії її рядків, то очевидно, що матриця Уолша-Адамара може бути отримана з матриці Уолша-Пелі таким же способом.

Аналітично систему Уолша-Пелі будь-якого порядку $N = 2^n$ можна задати наступним чином:

$$p_k(l) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i-1} l_i} = e^{j\pi \sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i-1} l_i} .$$

2.4.3 Базис Уолша-Качмажа

Розглянемо систему функцій запропоновану самим Дж. Л. Уолшем [11], яка в деяких джерелах носить назву системи функцій Уолша-Качмажа [30].

У ній функції Уолша розташовуються за зростанням в них числа знакозмін на інтервалі визначення N . Таке розташування функцій у ній зручно для використання її в техніці зв'язку, оскільки впорядкування за кількістю

знакозмін надає їй схожість з функціями ДЕФ. Виглядає матриця Уолша-Качмажа для порядку $N = 8$ наступним чином:

$$\{w_k(l)\} \Rightarrow W_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

2.5 Синтез симетричних дочірніх систем Уолша

Раніше були розглянуті системи Уолша-Адамара, Уолша-Пелі і Уолша-Качмажа. Безліч симетричних матриць Уолша для заданого порядку N не вичерпується цими системами. Для прикладу розглянемо систему Уолша четвертого порядку.

При $N = 4$ система Уолша-Адамара виглядає наступним чином:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

система Уолша-Пелі – наступним:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

система Уолша-Качмажа – наступним:

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Існує ще одна симетрична система Уолша четвертого порядку, названа системою Уолша-Кулі:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Всього ж можливо $(N - 1)! = (4 - 1)! = 6$ перестановок базисних функцій Уолша четвертого порядку, що не зачіпають нульову функцію. Перебираючи всі можливі перестановки, отримуємо залишилися дві матриці Уолша четвертого порядку:

$$M^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

і

$$M^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

які не є симетричними.

Для кожного двійково-раціонального числа N , існує, як було зазначено вище $(N - 1)!$ систем Уолша. Якщо порядок матриці дорівнює $N = 8$, то мова йде про $7! = 5040$ системи, які можна синтезувати на ЕОМ і перевірити їх симетричність. Однак при порядку $N = 16$ ми маємо справу із $15! \approx 1,3 \cdot 10^{12}$ матриць. З такою кількістю матриць звичайний персональний комп'ютер не впорається. Тому були винайдені інші методи синтезу симетричних матриць Уолша. У цьому підрозділі будуть розглянуті метод спрямованої перестановки базисних функцій, а також метод індикаторних матриць.

2.5.1 Метод спрямованої перестановки

Розглянемо даний метод на прикладі матриці Уолша восьмого порядку. В якості материнської виберемо матрицю Уолша-Пелі P_8 :

$$\{p_k(l)\} \Rightarrow P_8 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}. \quad (2.28)$$

Як зазначалося вище, нульова базова функція для збереження симетричності повинна залишатися на нульовому рядку. На перший рядок можна помістити будь-яку з решти базисних функцій Уолша-Пелі. Виберемо в якості такої першу базисну функцію $p_1(l)$:

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}. \quad (2.29)$$

Без шкоди симетричності матрицю (2.29) можна доповнити другою $p_2(l)$ або третьою $p_3(l)$ базисною функцією. При цьому третій рядок нової матриці буде починатися як і третій стовпець – двома нулями, чого не можна домогтися, підставивши в третій рядок будь-яку іншу з решти базисних функцій. Підставимо в якості другого рядка базисну функцію Уолша-Пелі другого порядку $p_2(l)$:

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \end{array}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_k \quad (2.30)$$

Аналізуючи третій стовпець матриці (2.30), приходимо до висновку, що на місце третьої базисної функції з решти незадіяних рядків матриці P_8 підходить лише третя, що починається двома нулями і одиницею:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \quad (2.31)$$

У відповідності з розташуванням елементів в четвертому стовпці матриці (2.31) робимо висновок про те, що на місце четвертого рядка підходять п'ята і четверта базисні функції Уолша-Пелі. Виберемо на це місце четверту функцію $p_4(l)$:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \quad (2.32)$$

Починаючи з матриці (2.32) порядок проходження базисних функцій є визначеним і єдино можливим. Так, щоб не порушити симетричності формованої матриці, на місце п'ятого рядка може претендувати лише п'ята базисна функція Уолша-Пелі. На місце шостого рядка – шоста, сьомий рядок займе сьома базисна функція, що залишилася. Таким чином, ми прийшли до матриці Уолша-Пелі P_8 .

Повернемося до матриці (2.31) і розмістимо на четвертому рядку не четверту, а п'яту базисну функцію Уолша-Пелі:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right]_k
 \end{array} \quad (2.33)$$

Щоб дотриматися умови симетричності, отриману матрицю (2.33) можна доповнити лише четвертою базисною функцією Уолша-Пелі:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{array} \right]_k .
 \end{array} \quad (2.34)$$

Матрицю (2.34) можна доповнити за чергою сьомою і шостою базисними функціями:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \\
 M_4^{(2)} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ k \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right] .
 \end{array} \quad (2.35)$$

Таким чином, ми прийшли до симетричної системи функцій Уолша (2.35).

Повертаючись до матриці (2.29) і розміщуючи на її перший рядок третю базову функцію Уолша-Пелі $p_3(l)$, по черзі приходимо аналогічним чином до наступних матриць:

Таблиця 2.3

Кількість симетричних матриць Уолша

N	1	2	4	8	16	32
L_N	1	1	4	28	446	13888

Позначимо

$$L_N = L_{2^n}.$$

Тоді для всіх $n \geq 2$ буде правильним вираз для оцінки кількості симетричних матриць Уолша заданого порядку 2^n [30]:

$$L_N = \prod_{i=1}^n (2^i - \text{mod}_2(i)). \quad (2.38)$$

Метод спрямованої перестановки базисних функцій, по-перше, забезпечує синтез всіх можливих симетричних систем Уолша заданого порядку; по-друге, вимагає набагато менше машинного часу, ніж метод звичайної перестановки і перевірки на симетричність, оскільки заздалегідь виключає кінцеві перестановки рядків материнської матриці Уолша.

Метод, описаний далі, пропонує інший підхід до синтезу симетричних систем Уолша заданого порядку.

2.5.2 Метод індикаторних матриць

Звернемося до системи Уолша, функції в якій пронумеровані за Пелі. Номери функцій представимо в двійковій системі числення:

$$P_4 = \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \\ k^{(p)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

де $k^{(p)}$ – безліч, елементами якої є двовимірні виконавчі вектори,

відповідні двійковим номерами функцій в системі Уолша-Пелі,
 $k^{(p)} = \{00,01,10,11\}$.

Цю послідовність можна отримати в результаті наступного множення:

$$k_i^{(p)} = \text{mod}_2(k_i^{(p)} \cdot E), i = \overline{0 \dots 3}, \quad (2.40)$$

де E – одинична матриця другого порядку:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Оскільки в результаті множення (2.40) кожен елемент безлічі переходить сам у себе, назовемо матрицю (2.41) індикаторною матрицею системи Уолша-Пелі.

Розглянемо матрицю

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результаті множення

$$k_i^{(h)} = \text{mod}_2(k_i^{(p)} \cdot I), i = \overline{0 \dots 3}$$

отримаємо безліч $k^{(h)} = \{00,10,01,11\}$.

Якщо розташувати функції Уолша, пронумеровані за Пелі в зазначеному безліччю порядку, ми прийдемо до матриці Уолша-Адамара:

$$H_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 00 \\ 10 \\ 01 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} k^{(h)} \end{matrix} & & \end{matrix}.$$

Відповідно, матрицю інверсної перестановки I назовемо індикаторною матрицею системи Уолша-Адамара.

Матриця перетворення зворотнього лівостороннього коду Грея має наступний вигляд:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Помноживши елементи безлічі $k^{(p)}$ на цю матрицю по модулю два, отримаємо безліч $k^{(h)} = \{00,01,11,10\}$, відповідну матриці Уолша-Качмажа четвертого порядку:

$$W_4 = \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \\ k^{(w)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значить M_1 – індикаторна матриця системи Уолша-Качмажа четвертого порядку.

Нарешті, системі Уолша-Кулі відповідає індикаторна матриця

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

що є матрицею перетворення зворотнього правостороннього коду Грея.

Індикаторні матриці для симетричних систем Уолша порядку $N = 2^n$ є квадратними матрицями порядку n , заповнені нулями і одиницями.

Щоби квадратна матриця M була індикаторною для симетричної системи Уолша, вона повинна задовольняти дві умови:

- 1) M повинна бути правосторонньо симетричною;
- 2) її визначник, взятий за модулем два, не повинен бути рівний нулю.

Кожній симетричній системі Уолша відповідає одна індикаторна матриця, однозначно визначаючи структуру цієї системи, задаючи відповідність між номером базисної функції Уолша-Пелі і рядком симетричної системи Уолша, в яку ця функція поміщується за допомогою виразу [30]:

$$k_i^{(M)} = \text{mod}_2 \left(k_i^{(p)} \cdot M \right), i = \overline{0 \dots N - 1},$$

де $k^{(M)}$ – безліч, елементи якої визначають порядок проходження відповідних базисних функцій Уолша-Пелі в новій симетричній матриці Уолша.

Кількість індикаторних матриць систем Уолша визначається оцінкою (2.39). Метод пошуку симетричних матриць Уолша порядку $N = 2^n$, заснований на індикаторних матрицях, полягає в синтезі правосторонньо симетричних матриць порядку n . Матриці, визначник яких за модулем два дорівнює нулю, відбраковуюються. Таким чином, кожній правосторонньо симетричній матриці, що залишилася, буде відповідати симетрична матриця Уолша. Оскільки при такому підході порядок матриць, з якими доводиться працювати, значно менше N , кількість машинного часу, необхідного для синтезу всіх симетричних систем Уолша заданого порядку методом індикаторних матриць менше, ніж при використанні методу спрямованої перестановки базисних функцій.

2.5.3 Повний ансамбль симетричних систем Уолша восьмого порядку

Відповідно до оцінки (2.38) існує 28 симетричних систем Уолша восьмого порядку. Ця оцінка була підтверджена експериментально в підрозділі 2.5.1 методом спрямованих перестановок базисних функцій. Далі буде показано, що весь повний набір симетричних систем Уолша восьмого порядку може бути отриманий із системи Уолша-Пелі за допомогою апарату складових перетворень Грея [30].

Алфавіт елементарних перетворень Грея складається з шести елементарних операторів, кожному з яких відповідає матриця перетворення. Для двійкових кодів Грея при порядку матриць перетворення ці оператори мають такий вигляд:

$$g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– одинична матриця;

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.42)

– матриця інверсної перестановки;

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.43)

– оператор прямого лівостороннього перетворення Грея;

$$g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.44)

– оператор зворотнього лівостороннього перетворення Грея;

$$g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.45)

– оператор прямого правостороннього перетворення Грея;

$$g_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.46)

– оператор зворотнього правостороннього перетворення Грея.

Перетворення, відповідне одному з елементарних операторів Грея g_i ,

над числом проводиться за допомогою наступного виразу:

$$y = \text{mod}_2(x \cdot g_i), i = \overline{0 \dots 5},$$

де x – вектор рядок, елементами якої є виконавчі розряди перетворюється числа, y – вектор-рядок, елементами якого є виконавчі відліки результату перетворення.

В силу мультиплікативності операції матричного утворення, вираз

$$y = \text{mod}_2(x \cdot g_a \cdot g_b), a, b = \overline{0 \dots 5}$$

буде еквівалентним вислову $y = \text{mod}_2(x \cdot G)$,

$$\text{де } G = \text{mod}_2(g_a \cdot g_b).$$

Складовим кодом Грея називається послідовність декількох елементарних операторів Грея. Матриця перетворення складеного коду Грея виходить у результаті утворення матриць перетворення елементарних операторів Грея.

результатами множень

$$G = \text{mod}_2(g_2 \cdot g_3)$$

і

$$G = \text{mod}_2(g_4 \cdot g_5)$$

будуть поодинокі матриці. Це є наслідком того, що матриці g_3 і g_5 відновлюють вихідні комбінації, отримані при кодуванні матрицями g_2 і g_4 відповідно.

Введемо наступне позначення операторів складових кодів Грея. Якщо матриця складеного коду Грея виглядає наступним чином:

$$G = \text{mod}_2(g_2 \cdot g_4 \cdot g_2),$$

будемо записувати її, як $G = 242$, тобто використовувати для запису лише номери операторів елементарного коду Грея, які потрібно застосувати, щоб отримати необхідний оператор складеного коду гріючи.

Як було сказано в підрозділі 2.5.2, якщо переставити рядки матриці Уолша-Пелі відповідно до матриці інверсної перестановки другого порядку, вийде матриця Уолша-Адамара четвертого порядку. При $n = 3$ матриці інверсної перестановки (2.42) теж відповідає матриця Уолша-Адамара, на цей раз порядку $N = 2^3 = 8$ (2.25).

Так само перестановки рядків матриці Уолша-Пелі згідно індикаторним

матрицями зворотного лівостороннього коду Грея (2.44) і зворотного правостороннього коду Грея (2.46) приводять до матриць Уолша-Качмажа і Уолша-Кулі відповідно. При $N = 8$ ця матриця Уолша-Кулі має такий вигляд:

$$\{c_k(l)\} \Rightarrow C_8 = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$

Крім того, при $n > 2$ з'являються матриці Уолша, відповідні прямим ліво- і правостороннім кодам Грея (при $n = 2$ оператори зворотного лівостороннього і зворотного правостороннього перетворення Грея збігаються з операторами прямого лівостороннього і правостороннього перетворення Грея відповідно). Позначимо матрицю Уолша, індикаторною матрицею для якої є оператор g_2 (2.43) через A , а матрицю, якій відповідає індикаторна матриця g_4 (2.45) через B . При $N = 8$ ці матриці мають такий вигляд:

$$\{a_k(l)\} \Rightarrow A_8 = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7l \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \end{array}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7l$$

$$\{b_k(l)\} \Rightarrow B_8 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Систему P , а також системи H , W , C , A , B , що виходять з неї за допомогою перестановок її рядків за допомогою елементарних кодів Грея, будемо називати фундаментальними системами функцій Уолша.

$$M_8^{(7)} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.47)$$

До системи (2.47) приходимо, переставляючи рядки матриці W_8 відповідно до коду g_3 , за допомогою якого була отримана матриця W_8 із P_8 .

До цієї ж матриці ми прийдемо, переставивши рядки матриці A_8 відповідно до коду g_2 .

Переставивши рядки матриці C_8 відповідно до коду g_4 або матриці B_8 відповідно до коду g_5 , отримаємо матрицю

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7l$$

$$M_8^{(8)} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Верхні символи в позначеннях матриць (2.47) і (2.48) означають, що вони є відповідно сьомий і восьмий базисними системами Уолша, синтезованими з системи Уолша-Пелі за допомогою елементарних кодів Грея.

На рис. 2.1 зображений граф зв'язку між системами Уолша, які можна отримати, переставляючи рядки матриці Уолша-Пелі відповідно до елементарних кодів Грея.

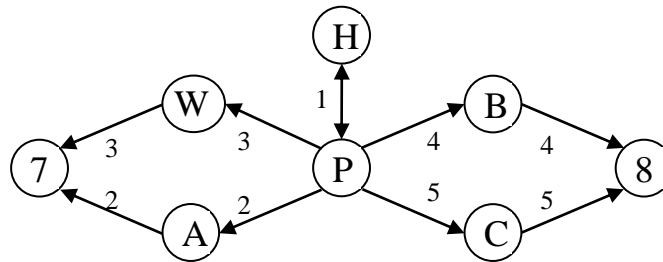


Рис. 2.1 – Граф зв'язку систем Уолша восьмого порядку

На цьому малюнку базові системи Уолша позначені колами з відповідними символами. Символам «7» і «8» відповідають матриці $M_8^{(7)}$ і $M_8^{(8)}$. Числа у стрілок позначають номер оператора коду Грея, переставляючи відповідно до якого рядки однієї матриці можна перейти до іншої.

Решта 22 симетричних системи Уолша восьмого порядку можна отримати з системи Уолша-Пелі за допомогою складових кодів Грея. Властивість правобічної інверсії мають лише матриці перетворення симетричних складових кодів Грея [30]. Відповідно, тільки симетричні

складові коди Грея можуть бути використані для синтезу симетричних систем Уолша.

Розглянемо першу пару складових симетричних сполучених перетворень Грея третього порядку: $G_1^{(1)} = 212$ і $G_2^{(1)} = 414$. Їм відповідають такі матриці перетворення:

$$M_{212} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

і

$$M_{414} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Перестановки номерів k базисних функцій системи Уолша-Пелі, що формуються за допомогою складових кодів Грея 212 (2.49) і 414 (2.50) показані в ДОДАТКУ Б.

Друга пара симетричних складових кодів Грея третього порядку приймає наступний вигляд:

$$G_1^{(2)} = 242 \text{ і } G_2^{(2)} = 424.$$

Цим перетворенням відповідають наступні індикаторні матриці

$$M_{242} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

і

$$M_{424} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Період циклу кожного з цих кодів дорівнює семи. Графи контурів, які формують ці коди при перетворенні матриці Уолша-Пелі, а також матриці, які є вузлами графів, занесені в ДОДАТОК В.

Жоден з решти симетричних складових кодів Грея третього порядку, так

само, як і жоден з симетричних складових кодів Грея четвертого порядку, не може бути використаний для формування нових симетричних систем Уолша.

Єдиний симетричний складовий код Грея п'ятого порядку, що породжує нові симетричні системи Уолша – це

$$G = 22422 . \quad (2.53)$$

Цьому коду відповідає індикаторна матриця

$$M_{2425242} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Період циклу коду (2.53) дорівнює чотирьом. Сполучений код

$$G^* = 44244$$

в силу симетричності матриці (2.54) збігається з кодом (2.53), тому він не може бути використаний для синтезу нових симетричних систем Уолша.

Останнім, який породжує симетричні матриці Уолша складовим кодом Грея є код сьомого порядку

$$G = 2425242 .$$

Матриця перетворення для цього коду виглядає наступним чином:

$$M_{2425242} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

У ДОДАТКУ Г містяться системи, породжені кодами 22422 і 2425242.

Таким чином, за допомогою складових кодів Грея і матриці Уолша-Пелі восьмого порядку були отримані всі 27 симетричних систем Уолша восьмого порядку, що залишилися. Повний граф зв'язку між матрицями Уолша восьмого порядку занесений в ДОДАТОК Д.

2.6 Базис функцій Віленкіна-Крестенсона

ВКФ були запропоновані і вивчені в континуальному варіанті Віленкіна і Крестенсона [13 - 15]. Материнська система ВКФ, яку будемо називати

системою ВКФ-Кронекера і позначати $H_{m,n}$, виходить із системи ДЕФ m -го порядку шляхом зведення її в n -у кронекерівську ступінь [26 - 30]:

$$H_{m,n} = E_m^{[n]} .$$

Очевидно, що система ВКФ-Кронекера будь-якого прядка може бути задана двома параметрами: m – основа системи числення, на якій заснована система ВКФ-Кронекера, n – кронекерівська ступінь.

Розглянемо такий приклад. В якості порядку матриці ДЕФ виберемо число $m = 2$. При цьому

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi} = -1 ,$$

а ізоморфне відображення матриці E_2 збігається з матрицею Уолша-Адамара H_2 :

$$E_2 = H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.55)$$

Правило (2.23), що використовується для синтезу системи Уолша-Адамара, описує операцію кронекерівського зведення в ступінь матриці (2.55). Саме тому можна стверджувати, що системи функцій Уолша-Адамара є окремим випадком систем ВКФ-Кронекера при $m = 2$.

Будь-яка матриця ДЕФ є першим кронекерівським ступенем самої себе, тому система ДЕФ технічно є окремим випадком системи ВКФ-Кронекера при $n = 1$.

Матриця ДЕФ порядку $N = 3$ виглядає наступним чином:

$$E_3 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2l \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Її другий кронекерівський ступінь, утворюючий матрицю ВКФ-

$$had_k(l) = W^{\sum_{i=0}^{n-1} k_i l_i},$$

де $had_k(l)$ – l -й відлік k -ї базисної функції ВКФ-Кронекера, множник W заданий співвідношенням (2.57), k_i, l_i – розрядні коефіцієнти m -ічного уявлення чисел k і l .

Система ВКФ-Пелі задається наступним виразом:

$$pal_k(l) = W^{\sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i-1} l_i}.$$

2.7 Синтез симетричних дочірніх систем ВКФ

Як було показано раніше, дочірні симетричні системи ВКФ можуть бути отримані із системи ВКФ-Кронекера перестановкою її рядків. Метод індикаторних матриць, описаний вище, може бути використаний і для синтезу симетричних систем ВКФ.

У даній роботі індикаторними матрицями симетричних систем ВКФ порядку $N = m^n$ будемо називати такі квадратні матриці порядку n , що заповнені натуральними числами від 0 до $m - 1$, які встановлюють однозначну відповідність

$$k' = \text{mod}_m(k \cdot M)$$

між номером k базисної функції системи ВКФ-Пелі та номером k' рядка матриці нової системи ВКФ, в яку дана функція переміщується.

Для того аби матриця M порядку n , що складається з чисел від 0 до $m - 1$, була індикаторною для симетричної системи ВКФ, повинні виконуватися наступні умови:

- 1) M повинна мати правосторонню симетрію;
- 2) її визначник, взятий за модулем m , не повинен мати з m спільних дільників і не повинен бути рівний нулю.

В якості прикладу розглянемо матрицю ВКФ-Пелі з параметрами:

Номер функции ВКФ-Пэли	Троичный номер	Преобразованный номер	Номер строки новой матрицы ВКФ
0	00	00	0
1	01	02	2
2	02	01	1
3	10	20	6
4	11	22	8
5	12	21	7
6	20	10	3
7	21	12	5
8	22	11	4

Переупорядкувавши рядки матриці ВКФ-Пелі згідно табл. 2.5, приходимо до наступної дочірньої симетричної системі ВКФ:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 00 \\
 02 \\
 01 \\
 20 \\
 22 \\
 21 \\
 10 \\
 12 \\
 11 \\
 k
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 .$$

Кількість індикаторних матриць симетричних систем ВКФ, як і у випадку із симетричними системами Уолша, дорівнює кількості самих симетричних систем. Якщо m – просте число, то ця кількість становить [30]

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=2}^n (m^i - \text{mod}_2(i)),$$

де $L_{m,1} = \phi(m)$.

Якщо m є ступенем простого числа m_1 :

$$m = m_1^k$$

то кількість симетричних матриць визначається за допомогою рекурентної формули

$$L_{m_1^{k+1},n} = L_{m_1^k,n} \cdot m_1^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (2.59)$$

У разі, коли m являє собою сукупність ступенів s простих чисел:

$$m = \prod_{i=1}^s m_i^{k_i},$$

кількість симетричних матриць ВКФ (і індикаторних матриць) визначається виразом

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=1}^s L_{m_i^{k_i},n}.$$

Варто відзначити, що технічно метод синтезу симетричних дочірніх систем ДЕФ, описаний в підрозділі 2.5 також може бути названий методом індикаторних матриць. При цьому розмір індикаторної матриці вироджується до 1×1 (оскільки система ДЕФ – окремий випадок системи ВКФ із параметрами $m = N, n = 1$) і матриця вироджується в число.

2.7.1 Повний ансамбль симетричних систем ВКФ з параметрами $m = 3, n = 2$

За аналогією з підрозділом 2.5.3 проведемо синтез усіх симетричних систем ВКФ порядку $N = 3^2 = 9$ за допомогою m -ічних складових кодів Грея. Згідно з оцінкою (2.59) кількість таких систем дорівнює $L_{3,2} = 18$.

Матриця ВКФ-Кронекера зазначеного порядку виходить зведенням до другого кронекерівського ступеня матриці, як це показано в (2.56). Матриця ВКФ-Пелі (2.58) отримана шляхом трійочної інверсії номерів матриці (2.56). Використовуючи в якості індикаторних матриць, відповідним матрицям трійчастих операторів перетворення Грея

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і

$$g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

можна отримати за аналогією з 2.5.3 матриці $A_{3,2}$, $B_{3,2}$, $C_{3,2}$, $W_{3,2}$. Матриці $C_{3,2}$ і $W_{3,2}$ виходять з матриці ВКФ-Пелі таким же чином, як і матриці Уолша-Кулі і Уолша-Качмажа виходять з матриці Уолша-Пелі. Тому будемо називати матриці $C_{3,2}$ і $W_{3,2}$ матрицями ВКФ-Кулі та ВКФ-Уолша відповідно по аналогії з матрицями Уолша.

Граф контурів простих кодів Грея 2 і 4 при формуванні симетричних систем ВКФ, а також отримані системи представлені в ДОДАТКУ Е.

Розглянемо дочірню систему ДЕФ третього порядку $E_3^{(2)}$:

$$0 \quad 1 \quad 2l$$

$$E_3^{(2)} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Звівши її в другий кронекерівський ступінь, отримаємо матрицю ВКФ-Кронекера $H_{3,2}^{(2)}$:

$$H_{3,2}^{(2)} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ k \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Переставивши рядки матриці (2.60) за законом трічної інверсії, прийдемо до матриці ВКФ-Пелі $P_{3,2}^{(2)}$:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 k
 \end{array}
 P_{3,2}^{(2)} =
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 l
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1
 \end{bmatrix}.
 \quad (2.61)$$

Матриця (2.61) також може бути використана для синтезу симетричних матриць, як і матриця (2.58). Граф перетворення матриці (2.61) за допомогою елементарних кодів Грея 2 і 4 і отримані в результаті перетворень системи представлені в ДОДАТКУ Ж.

Решта 6 симетричних систем ВКФ $V_{3,2}$ можна отримати за допомогою потрібного складеного коду Грея $G = 212$, матриця перетворення якого виглядає наступним чином:

$$M_{212} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Повний граф взаємозв'язку між симетричними системами ВКФ при $m = 3$, $n = 2$ показаний на рис. 2.2.

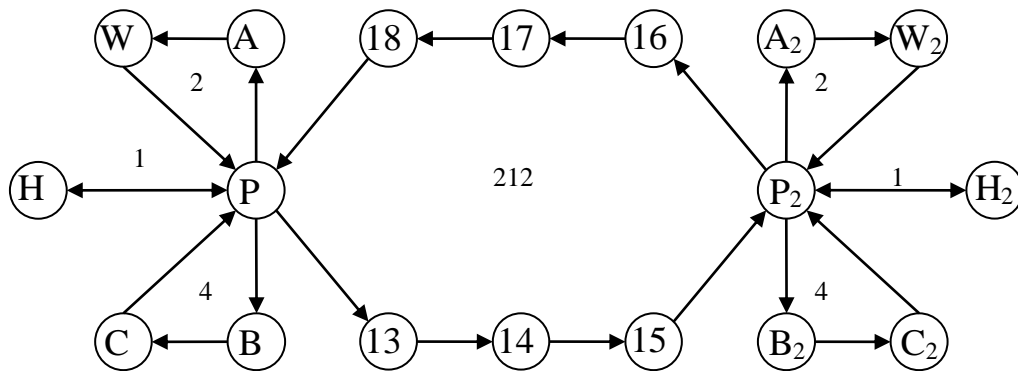


Рис. 2.2 – Повне сімейство симетричних систем ВКФ при $m = 3, n = 2$

2.8 Висновки по розділу

Наведено матричну інтерпретацію базисів ДЕФ, функцій Уолша і функцій ВКФ.

Показано, що базиси ДЕФ і Уолша є окремими випадками базисів ВКФ.

Запропоновано алгоритми формування дочірніх симетричних базисних систем ДЕФ, функцій Уолша і ВКФ.

Наведені аналітичні описи фундаментальних систем Уолша і ВКФ.

За допомогою складових кодів Грея показано взаємозв'язок між симетричними системами функцій Уолша порядку $N = 8$.

За допомогою складових кодів Грея показано взаємозв'язок між симетричними системами ВКФ з параметрами $m = 3, n = 2$.

РОЗДІЛ 3

ШВИДКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В БАЗИСАХ ВКФ

3.1 БПФ в базисах ДЕФ

Швидкі перетворення Фур'є (ШПФ) в базисах ДЕФ дозволяють значно прискорити отримання дискретного спектра прийнятої послідовності за рахунок скорочення кількості елементарних математичних операцій, що виконуються для цього.

У цьому розділі буде показано, що БПФ можна проводити і в базисах ВКФ. При цьому при деяких значеннях параметра m системи ВКФ БПФ послідовності в базисі ВКФ зажадають значно менше часу, ніж БПФ аналогічної послідовності в базисі ДЕФ [26, 30].

Математично БПФ в базисах ДЕФ можливі завдяки тому, що базисні матриці систем ДЕФ можуть бути факторизовані, тобто, представлені в якості матриць з великою кількістю нулів. Послідовність вектора-стовпця, що представляє собою прийняту послідовність, на ці матриці зажадає менше машинного часу, ніж вектор стовпця на базисну матрицю ДЕФ.

3.1.1 Про множенні ізоморфних матриць

Далі в цьому розділі будуть розглядатися ізоморфні уявлення матриць, які будуть множитися один на одного. Цей підрозділ містить опис процедури множення ізоморфних матриць. Для прикладу розглянемо наступні матриці:

$$A = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^1 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^2 \end{bmatrix},$$

Де $W = e^{-2i\frac{\pi}{N}} = e^{-2i\frac{\pi}{4}}$.

Результатом множення $A \cdot B$ стане матриця ДЕФ

$E_4^{(1)}$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^1 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = E_4^{(1)}$$

Розглянемо для прикладу формування елемента 3-го стовпця 3-го рядка матриці $E_4^{(1)}$. Він був отриманий, як скалярний третього рядка матриці А на третій стовець матриці В:

$$E_4^{(1)}(3,3) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot W^0 + W^0 \cdot 0 + W^3 \cdot W^2 = W^3 \cdot W^2 = W^1.$$

Оскільки, як було сказано в попередньому розділі, ізоморфне зображення матриці представляє собою матрицю, що містить лише показники ступенів фазоповертаючого множника W , то операція множення елементів при пошуку двох ізоморфних матриць замінюється операцією додавання показників ступенів за модулем N . Перейдемо до ізоморфного зображенню матриць А і В (A' і B' відповідно).

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 1 \\ 0 & 2 & - & - \\ - & - & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 2 & - \\ - & 0 & - & 2 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриць A і B , рівні нулю, в матрицях A' і B' позначені символом «-».

Якщо слідувати описаному правилу множення ізоморфних матриць, то правий нижній елемент матриці, що є результатом множення, буде дорівнювати

$$E_4^{(1)}(3,3) = \text{mod}_4(3 + 2) = 1.$$

В цьому випадку множення матриць A' і B' дасть матрицю $E_4^{(1)}$, що являтиме собою ізоморфне відображення матриці ДЕФ $E_4^{(1)}$:

$$A' \cdot B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 1 \\ 0 & 2 & - & - \\ - & - & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 2 & - \\ - & 0 & - & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_4^{(1)}$$

Далі множення ізоморфних відображень матриць буде проводитися саме за таким правилом.

3.1.2 БПФ в материнських базисах ДЕФ

У даній роботі розглянуті лише випадки, коли порядок БПФ і кількість відліків в прийнятій послідовності є двійково-раціональним числом ($N = 2^m$). Використовуючи описаний в підрозділі 3.1.1 математичний апарат ізоморфних матриць, складемо правило факторизації матриці ДЕФ двійково-раціонального порядку. Для прикладу розглянемо матрицю ДЕФ $E_8^{(1)}$, ізоморфне представлення якої виглядає так

$$\begin{array}{c}
 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7l \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\
 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\
 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\
 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\
 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (3.1)$$

Елементи матриці (3.1) являють собою ступені, фазоповертаючого множника

$$W = e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

При $N = 2^m$ матрицю ДЕФ можна уявити як множення m факторизованих матриць. В даному випадку $N = 2^3 = 8$. Відповідно, матриця $E_8^{(1)}$ є множенням трьох факторизованих матриць.

Перший крок факторизації полягає в поданні числа N множенням $N = 2^{m-1} \cdot 2$. В даному випадку $N = 4 \cdot 2$. У цьому співвідношенні числу 4 відповідає частково факторизована матриця F , а числу 2 – повністю факторизована матриця F_3 . Причому має виконуватися рівність

$$E_8^{(1)} = F \cdot F_3. \quad (3.2)$$

Правило формування матриці F полягає в тому, що в кожному її рядку необхідно послідовно записати $2^{m-1} = 4$ перших елемента відповідного рядка матриці (3.1). Причому в парні рядки важливі елементи записуються з нульової позиції, а в непарних рядках перший значущий елемент зміщується на 4 позиції вправо. Решта вільними осередку матриці F заповнюються символами «—»:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Таке заповнення матриці F забезпечує наявність рівно чотирьох значущих елементів в кожному її стовпці.

Матриці, що містять в кожному рядку, подібно матриці (3.3), по 2 і більше значущих елемента, слідуєчих підряд, будемо називати рядково-факторизованими.

На наступному етапі потрібно знайти таку матрицю F_3 , яка при множенні на (3.3) зліва дасть матрицю (3.1). Оскільки матриці F_3 відповідає число 2, в кожному її рядку і в кожному її стовпці повинні розташовуватися по 2 значущих елемента, причому вони повинні розташовуватися уздовж діагоналей матриці. Оскільки нульовий рядок матриці (3.1) може бути отриманий шляхом скалярного множення першого рядка матриці (3.2) на стовпці матриці (3.3) і оскільки важливі елементи містяться в першій половині нульового рядка матриці (3.2), ми можемо записати перші чотири рядки матриці F_3

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 0 \end{bmatrix}.$$

Другі чотири рядки матриці F_3 отримуємо, аналізуючи аналогічним чином перші рядки матриць (3.1) і (3.3):

$$\begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 4 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 4 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 4 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 4 \end{bmatrix}.$$

Легко перевірити, що множення матриць F і F_3

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & 4 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 4 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 4 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 4 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

виконане за правилом, описаним в підрозділі 3.1.1, дасть матрицю (3.1).

Матриці, схожі за структурою з (3.4), а саме ті, що не мають ні в одному рядку двох наступних один по одному значущих елементів, але мають два і більше значущих елементів, розташованих уздовж однієї з діагоналей, будемо називати діагонально-факторизованими. Факторизація матриці ДЕФ при $N = 2^m$ закінчується після того, як отримана одна рядково-факторизована F_1 і $m - 1$ діагонально-факторизованих матриць F_2, F_3, \dots, F_m . В даному випадку, при $m = 3$ повинно вийти 2 діагонально факторизованих матриці: F_2 і F_3 . Щоби отримати матриці F_1 і F_2 проведемо подальшу факторизацію матриці (3.2).

Цій матриці відповідає множник 4, який може бути розкладений на співмножники $4 = 2 \cdot 2$. Отже, матриці F_1 (рядково-факторизована) і F_2 (діагонально-факторизована) в кожному стовпці і кожному рядку будуть містити по 2 значущих елементів.

Матриця F_1 формується зі щільно розставлених елементів матриці (3.2).

Для цього беруться лише перші два значущих елементи кожного рядка. Кожна пара елементів ставиться правіше на дві позиції, ніж пара елементів

попереднього рядка:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 1 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 \\ 0 & 4 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 5 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Матриця F_2 повинна бути такою, щоб її множення на матрицю (3.5) за описаним в підрозділі 3.1.1 правилом в результаті давало матрицю (3.3). Такою матрицею є

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & 2 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & 2 \\ 0 & - & 4 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 4 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & 6 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Легко перевірити, що результатом множення матриць (3.4), (3.5) і (3.6) є матриця (3.1), тобто, виконується рівність (3.2).

Перейдемо до синтезу графа ШПФ в базисі ДЕФ. Для цього зобразимо на комплексній площині ступеня фазообертаючого множника W (рис. 3.1) і перейдемо від ізоморфного зображення факторизованих матриць до простору оригіналів.

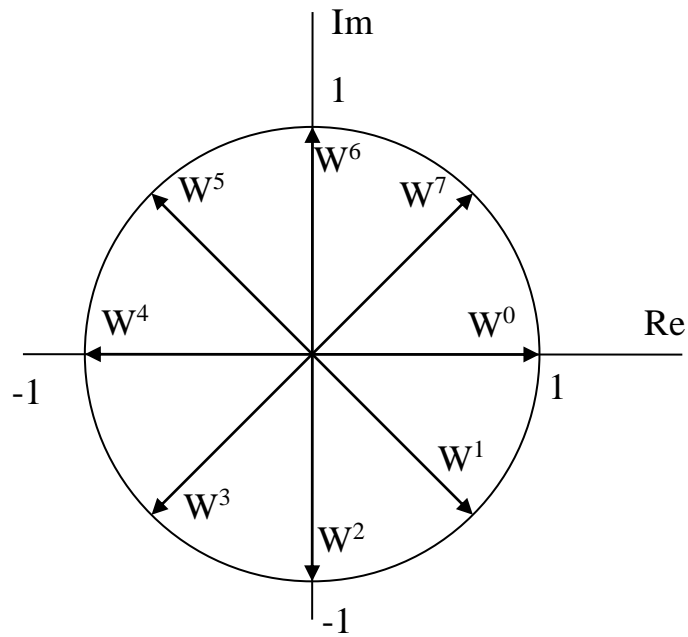


Рис. 3.1 – Ступені фазообертаючого множника

Очевидно, що для всіх $k \in [0; \frac{N}{2}]$ виконується рівність

$$W^k = -W^{\frac{N}{2}+k}. \quad (3.7)$$

Скориставшись рівністю (3.7), перепишемо матриці (3.4) – (3.6):

$$F_1 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & W^3 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & -W^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & -W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & -W^3 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & W^2 \\ W^0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & -W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & -W^2 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Дискретний спектр \dot{X} довільного 8-ми мірного комплексного вектора-стовпця \dot{x} в базисі ДЕФ $E_8^{(1)}$ може бути отриманий за допомогою наступного матричного множення

$$\dot{X} = E_8^{(1)} \dot{x}.$$

Цей же спектр може бути отриманий за допомогою послідовного множення справа вектора \dot{x} на матриці (3.8), (3.), (3.6):

$$y_1 = F_3 \dot{x},$$

$$y_2 = F_2 y_1,$$

$$\dot{X} = F_1 y_2.$$

Графічно послідовно множення векторів на матриці (3.8) – (3.10) зручно представляти за допомогою діаграми «метелик» (рис. 3.), яка представляє собою графічну інтерпретацію операції множення двовимірного вектора на матрицю розміром 2×2 .

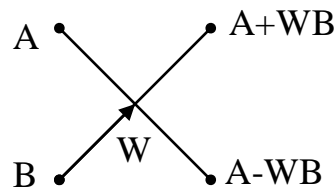


Рис. 3.2 – Діаграма «метелик»

Відповідно до матриць (3.8) – (3.10) граф 8-ми точкового БПФ в базисі ДЕФ виглядає так, як показано на рис. 3.3.

Із рис. 3.3 видно, що відліки вхідного сигналу розташовуються на входах графа БПФ в двійково-інверсному порядку.

При формуванні графів БПФ в базисі ВКФ матиме місце послідовність, отримана шляхом m -їчної перестановки натуральної послідовності.

Аналогічним чином можуть бути побудовані графи БПФ в базисах ДЕФ будь-яких двійково-раціональних порядків.

3.1.3 БПФ в дочірніх базисах ДЕФ

Крім $E_N^{(1)}$ будь-яка базова система ДЕФ, яка задається симетричною матрицею, може бути використана для БПФ в базисі ДЕФ. Для того щоб скласти граф БПФ в одній з дочірніх систем ДЕФ, достатньо провести перенумерацію вихідних відліків графа (рис. 3.3), що відповідає материнській системі ДЕФ, за правилом (2.20). Так, наприклад, матриці $E_8^{(2)}$

$$E_8^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ k \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right. \end{matrix}$$

відповідає граф БПФ, зображений на рис. 3.4.

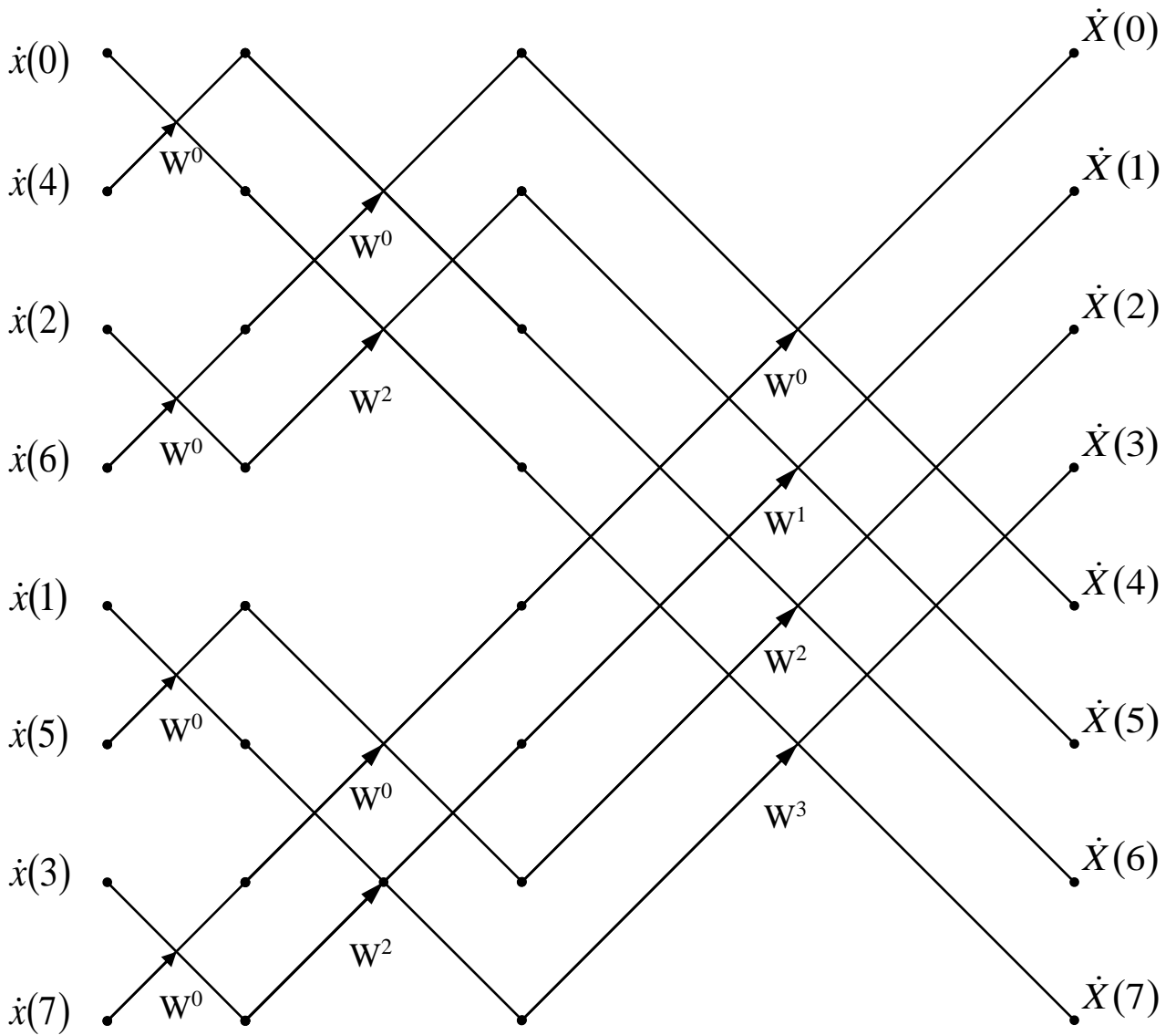


Рисунок 3.3 - Граф 8-ми точкового ШПФ в материнському базисі ДЕФ

Такий спосіб синтезу алгоритму БПФ в дочірніх базисах ДЕФ дозволяє зберегти структуру графа БПФ в базисі материнської системи ДЕФ. Змінюються лише номери вхідних відліків. Цей спосіб зручний для демонстрації взаємозв'язку, що існує між усіма симетричними системами ДЕФ. При цьому незмінною зберігається і структура графа зворотного БПФ в базисі ДЕФ. Граф зворотного БПФ виглядає аналогічно графу прямого БПФ за тим винятком, що замість ступенів фазообертаючого множника, зазначених в графі, потрібно брати комплексно-сполучені їм числа. Крім

того, значення, отримані на вихідних каналах графа зворотного БПФ, потрібно помножити на нормуючий множник $\frac{1}{N}$.

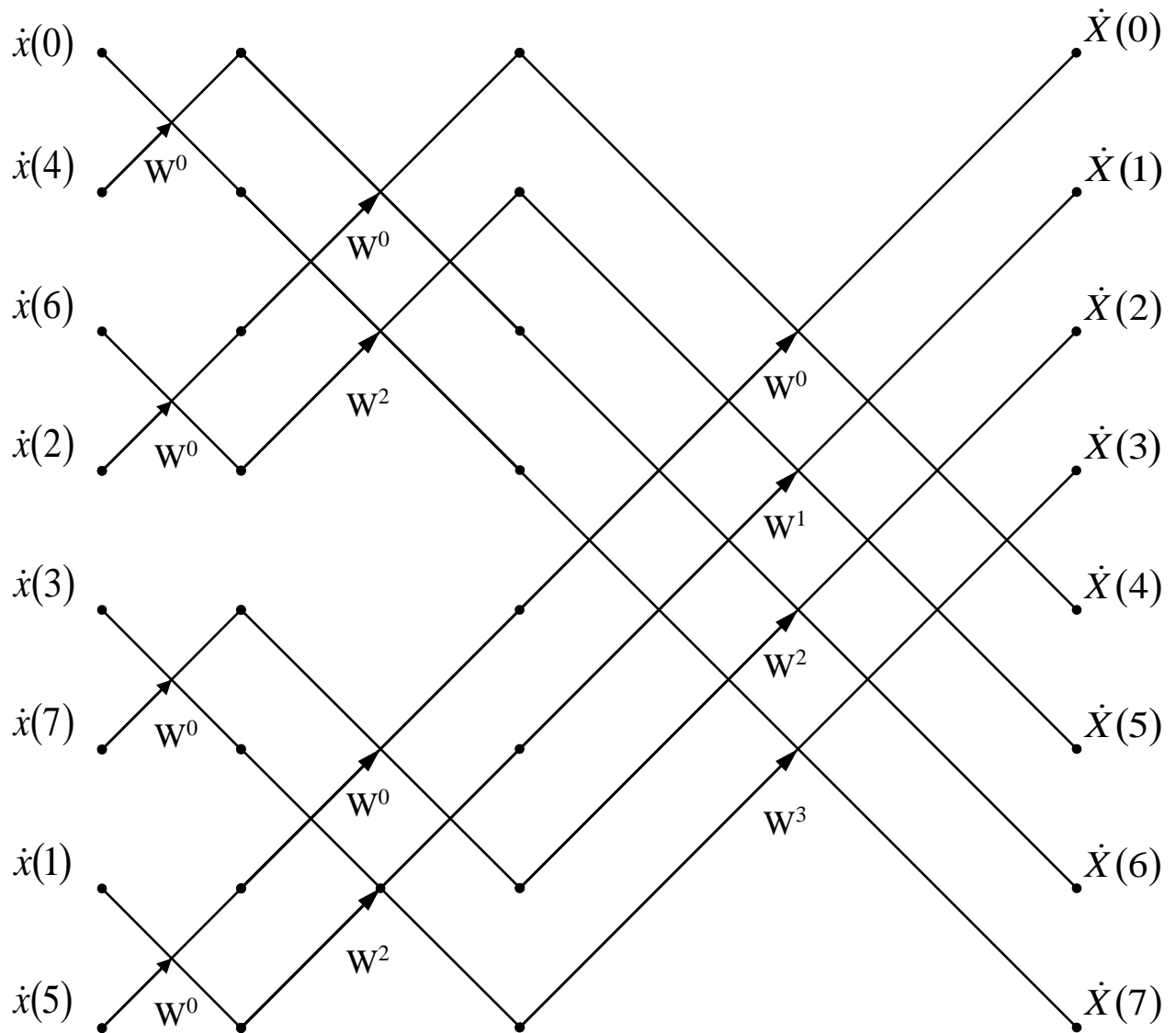


Рис. 3.4 – Граф 8-ми точкового БПФ в базисі ДЕФ $E_8^{(2)}$

Інший спосіб формування алгоритму БПФ в дочірніх системах ДЕФ дозволяє зберегти двійково-інверсну послідовність відліків вхідного сигналу на вході процесора БПФ, вимагаючи при цьому зміни структури графа. Зміна структури графа в цьому випадку викликана необхідністю врахувати структуру дочірньої матриці ДЕФ. Заснований цей спосіб на факторизації дочірньої матриці ДЕФ. Так, наприклад, матриця $E_8^{(2)}$ може бути

представлена, як множення наступних матриць:

$$F_1 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & W^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & W^1 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & -W^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & -W^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & -W^1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & W^6 \\ W^0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & -W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & -W^6 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & -W^0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Отримані факторизовані матриці за своєю структурою схожі на матриці (3.8) – (3.10). Різниця полягає лише в зміні ступенів деяких елементів матриць (3.8) – (3.10). Тому матриці (3.11) – (3.13) можуть, так само як і матриці (3.8) – (3.10) використані для синтезу графа БПФ в базисі ДЕФ. Нумерація вхідних відліків нового графа буде, як було сказано вище, ідентична нумерації відліків графа на рис. 3.3. Сам граф, відповідний матрицями (3.11) – (3.13), зображений на рис. 3.5.

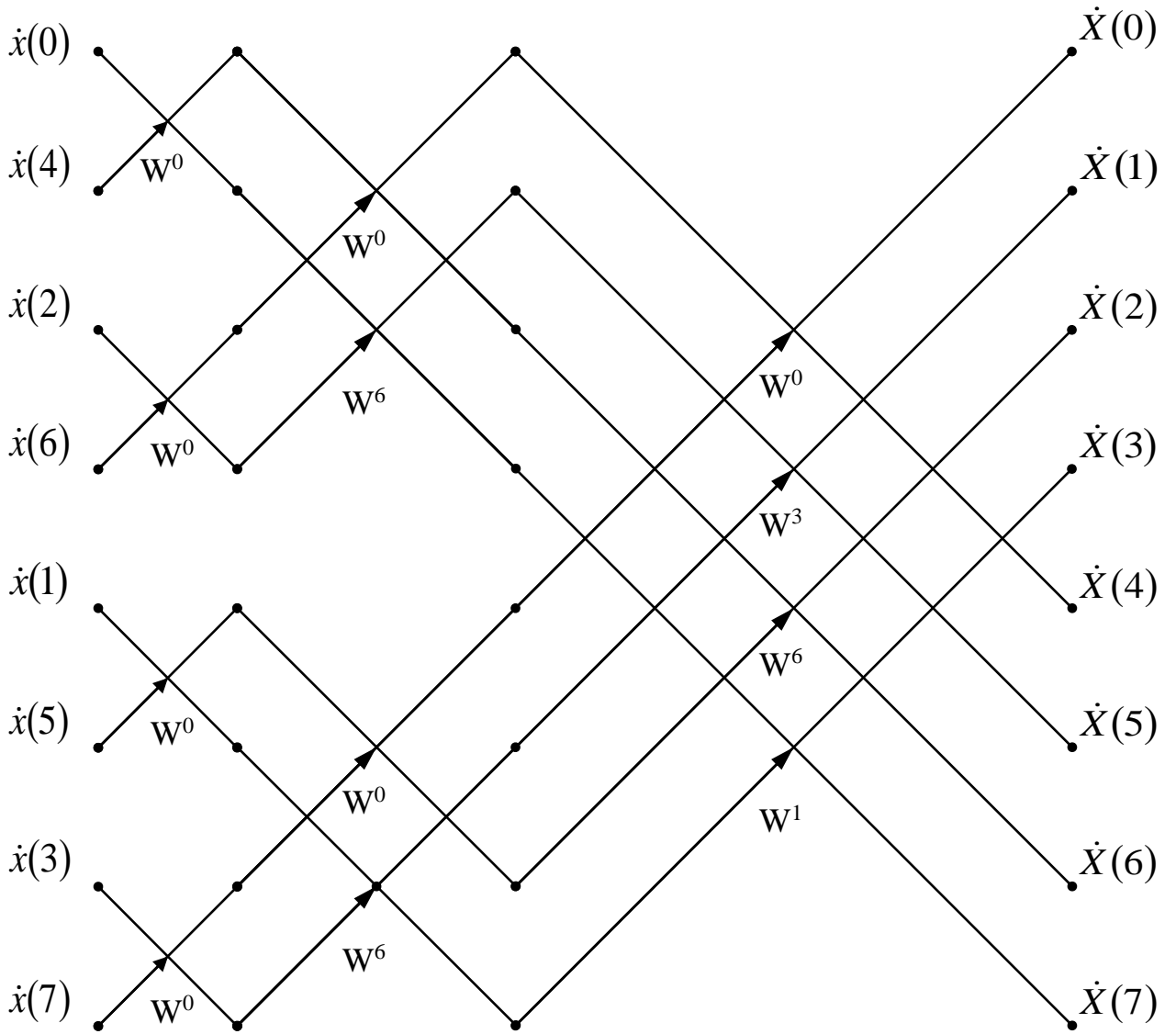


Рис. 3.5 – Граф 8-ми точкового БПФ в дочірньому базисі ДЕФ $E_8^{(2)}$

3.2 БПФ в базисах ВКФ

Розглянемо базис ДЕФ $E_4^{(1)}$:

$$E_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Фазообертаючий множник в даному випадку дорівнює $W = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$.

Граф ШПФ в базисі (3.14) представлений на рис. (3.6).

Другий кронекерівський ступінь матриці (3.14) являє собою матрицю перетворення базису ВКФ-Кронекера $H_{4,2}^{(1)}$ 16-го порядку (3.15). Відповідно, алгоритм 16-ти точкового БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,2}^{(1)}$ являє собою двоетапну процедуру перетворення, кожен етап якої здійснюється чотирма 4-точковими графами БПФ в базисі ДЕФ.

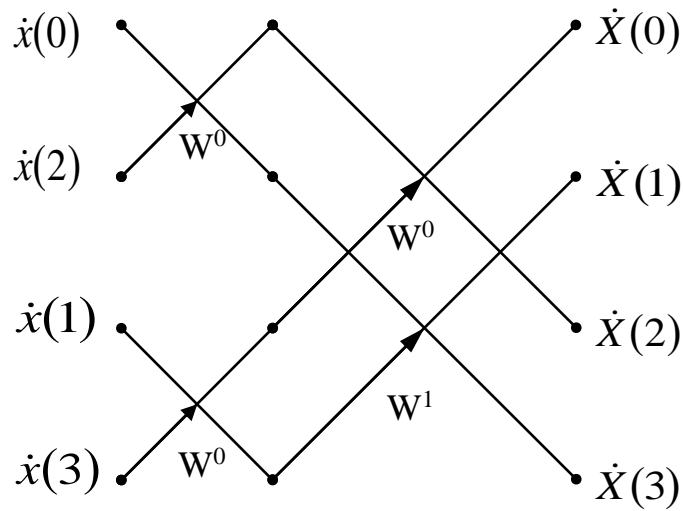


Рис. 3.6 – Граф 4-х точкового БПФ в базисі ДЕФ $E_4^{(1)}$

Для того щоби результат БПФ за описаним алгоритмом відповідав матриці (3.15), необхідно за аналогією з БПФ в базисі ДЕФ розташувати відліки вхідної послідовності $\dot{x}(l)$ в двійково-інверсному порядку. Граф 16-ти точкового БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,2}^{(1)}$ зображений на рис. 3.7.

Матриця ВКФ-Пелі виходить з матриці ВКФ-Кронекера шляхом м-ічної інверсії номерів рядків. Матриця ВКФ-Пелі $P_{4,2}^{(1)}$ показана в (3.16).

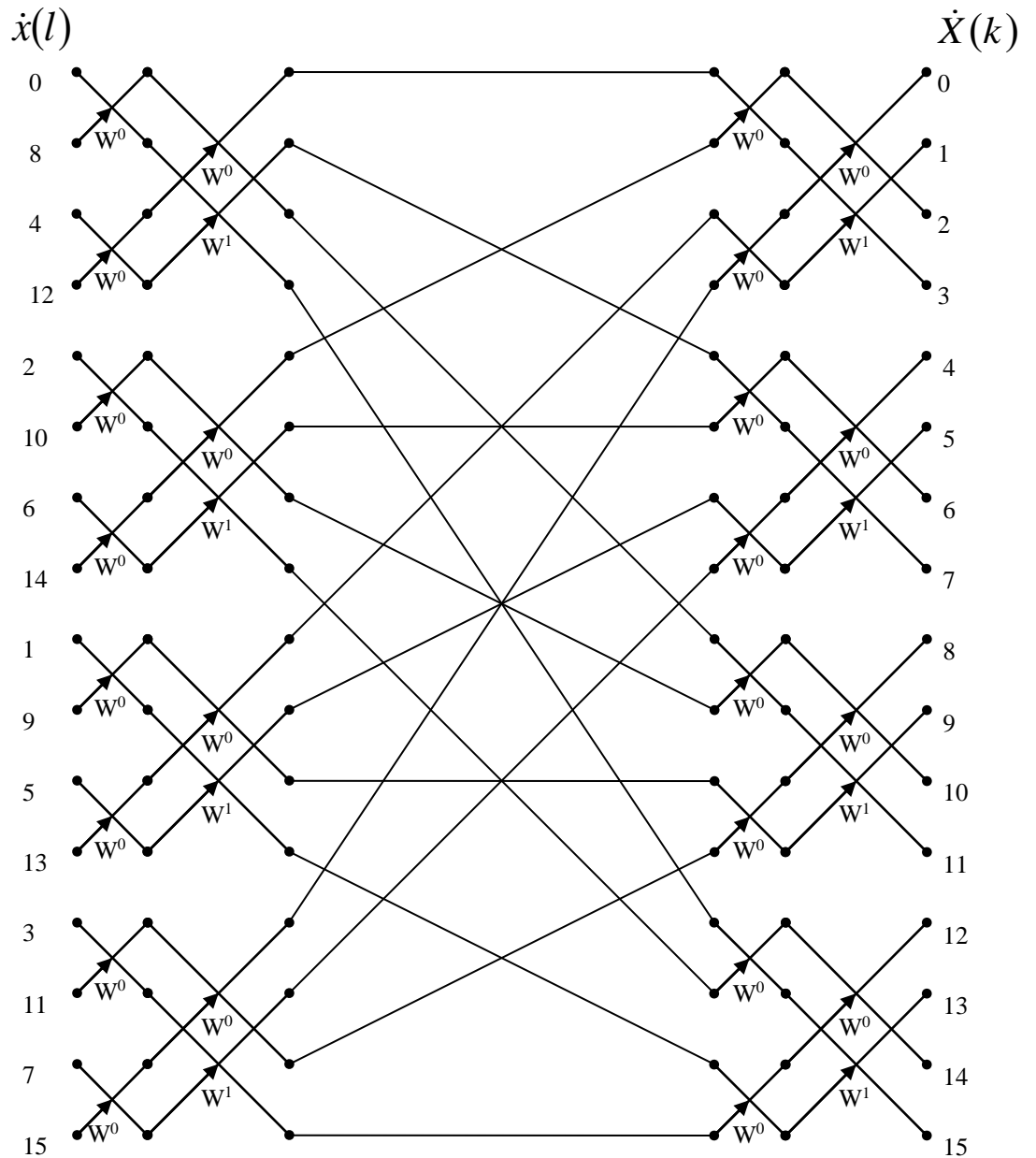


Рис. 3.7 – Граф 16-ти точкового БПФ в базисі ВКФ-Кронекра $H_{4,2}^{(1)}$

m -ічні інверсії чисел від 0 до 15, записаних в позиційній системі числення, заснованої на числі $m = 4$, зібрані в табл. 3.1

Легко перевірити, що, якщо провести перенумерацію вхідних відліків графа рис. 3.7 згідно табл. 3.1, то він буде відповідати матриці (3.16) (рис. 3.8).

Таблиця 3.1

Номер	m -ичное представление	Двоичная инверсия	m -ичная инверсия номера
0	00	00	0
1	01	10	4
2	02	20	8
3	03	30	12
4	10	01	1
5	11	11	5
6	12	21	9
7	13	31	13
8	20	02	2
9	21	12	6
10	22	22	10
11	23	32	14
12	30	03	3
13	31	13	7
14	32	23	11
15	33	33	15

Рис. 3.8 – Граф 16-ти точкового БПФ в базисі ВКФ-Пелі

Таким чином, приходимо до висновку про те, що граф БПФ в базисі ВКФ-Кронекера з параметрами $m = 4$ і $n = 2$ включає в себе 8 графів БПФ в базисі ДЕФ розмірністю 4. Саме БПФ за даною схемою проходить в два етапи. Кожен етап складається з 4 блоків, над якими проводяться 4-х точкові БПФ в базисі ДЕФ. Причому нульові виходи графів першого етапу з'єднані з відповідними входами нульового графа другого етапу, перші виходи графів першого етапу з'єднуються з відповідними входами першого графа другого етапу і т. п.

При $m = 4$, $n = 3$ БПФ в базисі ВКФ проходять в три етапи, кожен з яких складається з 16 чотирьохточкових БПФ в базисі ВКФ. Таким чином, проводиться в цілому 48 чотирьохточкових БПФ в базисі ДЕФ. При цьому логіка підключення виходів графів попереднього етапу до графів наступного етапу зберігається такою ж, як описано в попередньому абзаці. Можна ввести схематичні позначення процесорів БПФ в різних базисах. Так, на рис. 3.9 зображений процесор чотирьохточкового БПФ в базисі ДЕФ, якому

відповідає граф на рис. 3.6; на рис. 3.10 показаний процесор БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,2}^{(1)}$, якому відповідає би граф на рис. 3.7.

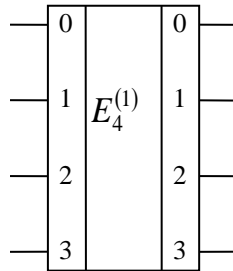


Рис. 3.9 – Процесор БПФ в базисі ДЕФ $E_4^{(1)}$

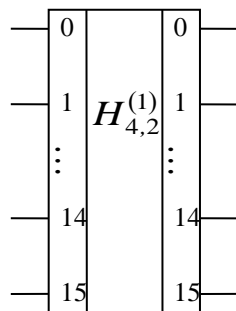
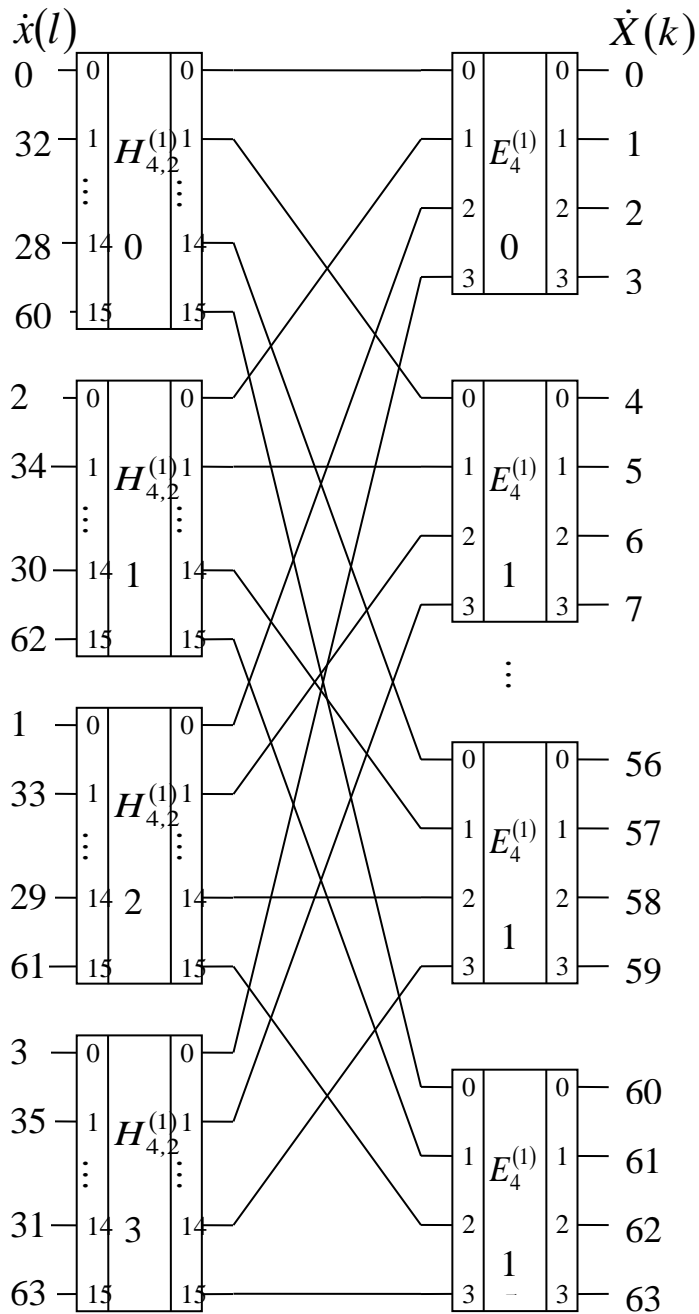


Рис. 3.10 – Процесор БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,2}^{(1)}$

Скориставшись цими схематичними зображеннями, покажемо структурну схему процесора БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,3}^{(1)}$ (рис. 3.11).

Тут, як і в попередніх випадках, вхідні відліки сигналу подаються на входи в двійково-інвертованій натуральній послідовності. При цьому кількість розрядів в номері вхідного відліку, записаного в позиційній двійковій системі числення, дорівнює шести.



Малюнок 3.11 - Структурна схема процесора ШПФ
в базисі ВКФ-Кронекера $H_{4,3}^{(1)}$

БПФ в базисі ДЕФ можливі не лише тоді, коли основа базису ДЕФ рівна двійково-раціональному числу. Та коли $N = 2^k$, $k = 2, 3, \dots$, відношення числа N до обсягу обчислень є мінімальним. Тому розглянемо ще одну систему ВКФ-Кронекера з двійково-раціональною основою m .

Звернемося до БПФ в базисі ВКФ $H_{8,n}^{(1)}$. Оскільки матриця $H_{8,2}^{(1)}$ виходить

шляхом зведення в другий кронекерівський ступінь матриці $E_8^{(1)}$, в графі операції БПФ в базисі ВКФ-Кронекера центральне місце буде відведено 8-ми точковому процесору БПФ в базисі ДЕФ. Граф 8-ми точкового БПФ зображений на рис. 3.3. Для економії місця введемо умовне позначення процесора БПФ в базисі ДЕФ (рис. 3.12).

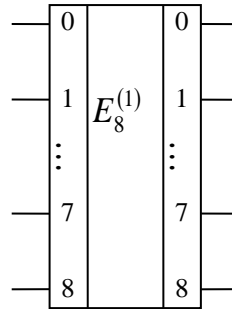


Рис. 3.12 – Процесор БПФ в базисі ДЕФ

Слідуючи описаному вище алгоритму, синтезуємо структурну схему процесора БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{8,2}^{(1)}$. Вона складається з двох каскадів, кожен з яких складається з 8 восьмиточкових процесорів БПФ в базисі ДЕФ $E_8^{(1)}$. При цьому i -й вихід ($i = \overline{0,1,\dots,7}$) нульового процесора в базисі ДЕФ першого етапу буде підведений до нульового виходу i -го процесора БПФ в базисі ДЕФ другого етапу; i -й вихід першого процесора першого етапу – до першого входу i -того процесора другого етапу і т.п. В кінцевому підсумку кожен процесор першого етапу одним зі своїх виходів буде з'єднаний з одним із входів кожного процесора другого етапу БПФ (рис. 3.13).

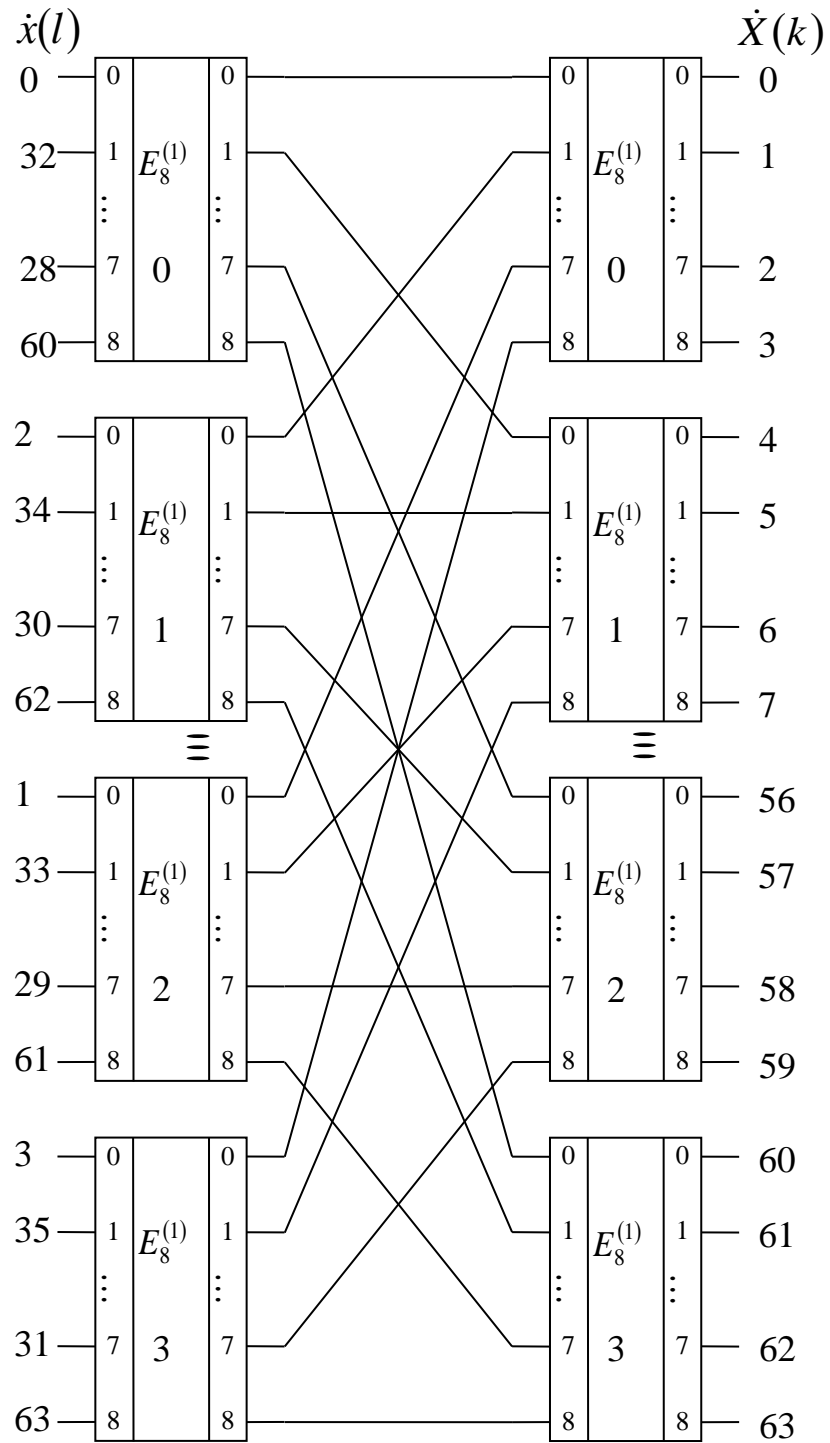


Рис. 3.13 – Структурна схема процесора БПФ в базисі ВКФ-Кронекера $H_{8,2}^{(1)}$

Аналогічно можна синтезувати граф БПФ в базисі ВКФ з довільним двійково-раціональним параметром $m = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$) і довільної розрядності $n = 2, 3, \dots$

3.2.1 БПФ в дочірніх базисах ВКФ

Як і у випадку з дочірніми базисами ДЕФ, можуть бути складені графи БПФ в дочірніх базисах ВКФ. Спосіб синтезу цих графів полягає в переупорядкуванні відліків вхідного сигналу, що надходять на вхід графа БПФ в материнському базисі ВКФ. При цьому структура графа залишається незмінною.

Розглянемо для прикладу систему ВКФ з параметрами $m = 4$, $n = 2$, яка задається індикаторної матрицею

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Матриця (3.17) є правосторонньо симетричною, а її визначник, взятий по модулю $m = 4$, дорівнює

$$\text{mod}_4(9 - 4) = 1.$$

Відповідно до підрозділу 2.7 матриця (3.17) може бути використана для синтезу дочірньої системи ВКФ.

Для того аби отримати порядок подачі відліків вхідного сигналу на входи графа БПФ в дочірньому базисі ВКФ, необхідно помножити номери відліків сигналу, що подаються на вхід графа БПФ в базисі ВКФ-Пелі $P_{4,2}^{(1)}$ на матрицю (3.17). Для цього потрібно подати номери відліків сигналу у вигляді двовимірних m -ічних векторів-рядків. Результат множення потрібно брати за модулем m .

Наприклад, відповідно до рис. 3.8 на 7-й вхід графа БПФ в базисі ВКФ-Пелі $P_{4,2}^{(1)}$ подається 11-й відлік вхідного сигналу. В системі числення, заснованої на числі 4, число 11 записується як 23:

$$11_{(10)} = 23_{(4)}.$$

Помножимо це число на матрицю (3.17) за модулем 4:

$$\text{mod}_4 \left([2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) = [0 \ 1].$$

Значить, на 7-й вхід графа БПФ в розглянутому дочірньому базисі подається 1-й відлік сигналу. Результати множення номерів відліків вхідного сигналу на матрицю (3.17) зведені в табл. 3.2

Таблиця 3.2

Синтез дочірньої системи ВКФ

Номер в базисі ВКФ-Пелі $P_{4,2}^{(1)}$	m-ічне представлення номера в Базисі ВКФ-Пелі $P_{4,2}^{(1)}$	m-ічне представлення номера в дочірньому базисі ВКФ	Номер в дочірньому базисі ВКФ
0	00	00	0
1	01	23	11
2	02	02	2
3	03	21	9
4	10	32	14
5	11	11	5
6	12	30	12
7	13	13	7
8	20	20	8
9	21	03	3
10	22	22	10
11	23	01	1
12	30	12	6
13	31	31	13
14	32	10	4
15	33	33	15

Матриця дочірньої системи ВКФ виглядає наступним чином

$$V_{4,2}^{(M)} = \begin{matrix} 00 \\ 23 \\ 02 \\ 21 \\ 32 \\ 11 \\ 30 \\ 13 \\ 20 \\ 03 \\ 22 \\ 01 \\ 12 \\ 31 \\ 10 \\ 33 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

(3.18)

Нумерація рядків матриці (3.18) відповідає нумерації базисних функцій системи ВКФ, впорядкованої за Пелі. Відповідно до табл. 3.2 складаємо граф ШПФ в дочірньому базисі ВКФ (рис. 3.14). Проаналізувавши граф (рис. 3.14) легко зрозуміти, що він відповідає матриці (3.18) дочірнього базису ВКФ $V_{4,2}^{(M)}$

3.3 БПФ в базисах Уолша

Базиси Уолша можуть бути використані для синтезу алгоритмів БПФ. Причому, оскільки базиси Уолша є окремим випадком базисів ВКФ, схема побудови графів БПФ в базисах Уолша залишається такою ж, як і при побудові графів БПФ в базисах ВКФ. При цьому підставою базису функцій Уолша завжди є число $m = 2$.

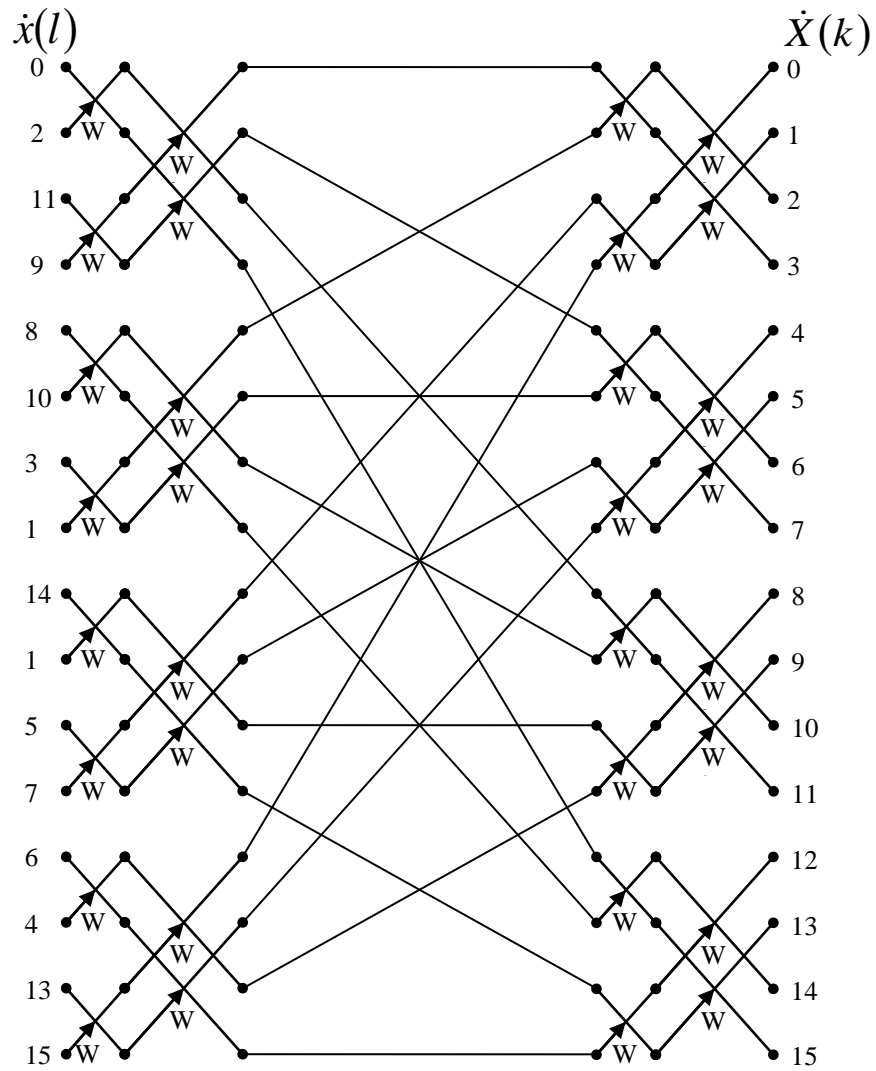


Рис. 3.14 – Граф 16-ти точкового БПФ в дочірньому базисі ВКФ $V_{4,2}^{(M)}$

Розглянемо випадок 8-ми точкового перетворення Фур'є в базисі функцій Уолша. При цьому параметр n системи функцій буде дорівнює трьом ($2^3 = 8$). Матриця Уолша-Адамара восьмого порядку представляє собою третій кронекерівський ступінь матриці ДЕФ E_2

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При цьому фазообертаючий множник дорівнює

$$W = e^{-\frac{2\pi}{N}} = e^{-\frac{2\pi}{2}} = -1.$$

Відповідно, оператор «метелик» для цього випадку приймає наступний

вигляд (рис. 3.14).

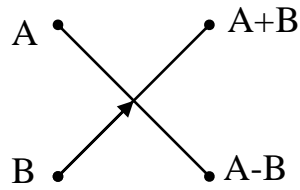


Рис. 3.14 – Діаграма «метелик» для двухточкового перетворення Фур'є

Сама матриця Уолша-Адамара виглядає так:

$$H_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Користуючись описаною вище методикою, синтезуємо граф БПФ в базисі Уолша-Адамара H_8 рис. (3.15).

На входи графа рис. 3.15 відліки вхідного сигналу надходять в двійково-інверсній послідовності. Для того, щоб перетворити цей граф в граф БПФ в базисі Уолша-Пелі P_8 , необхідно провести m -ічну інверсію номерів відліків вхідного сигналу. Оскільки в даному випадку $m = 2$, то m -кова інверсія являє собою двійкову інверсію, яка відновлює натуральну послідовність відліків вхідного сигналу (рис. 3.16).

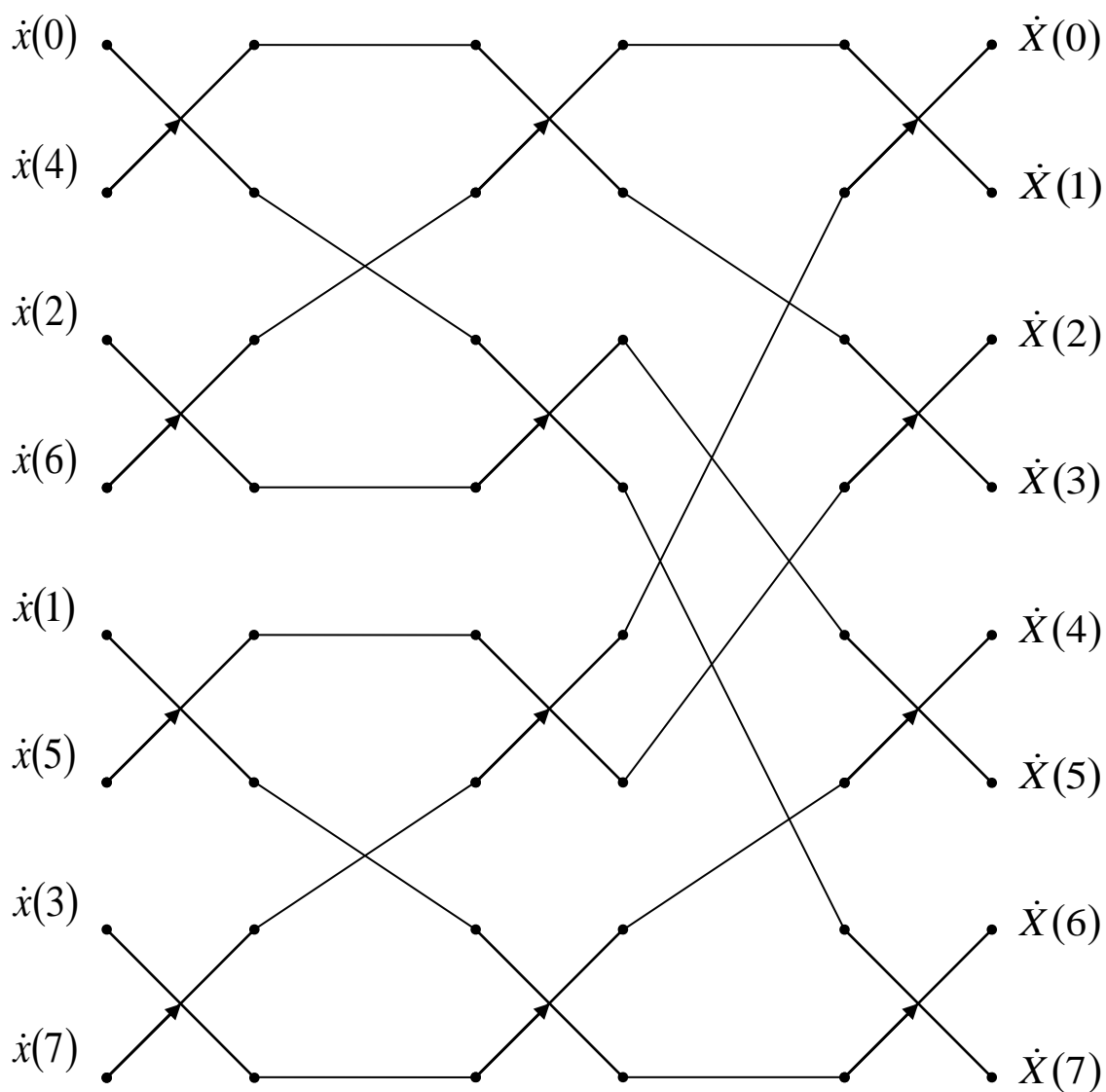


Рис. 3.15 – Граф 8-ми точкового БПФ в базисі Уолша-Адамара

Матриця базисної системи ВКФ-Пелі P_8 виглядає так:

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

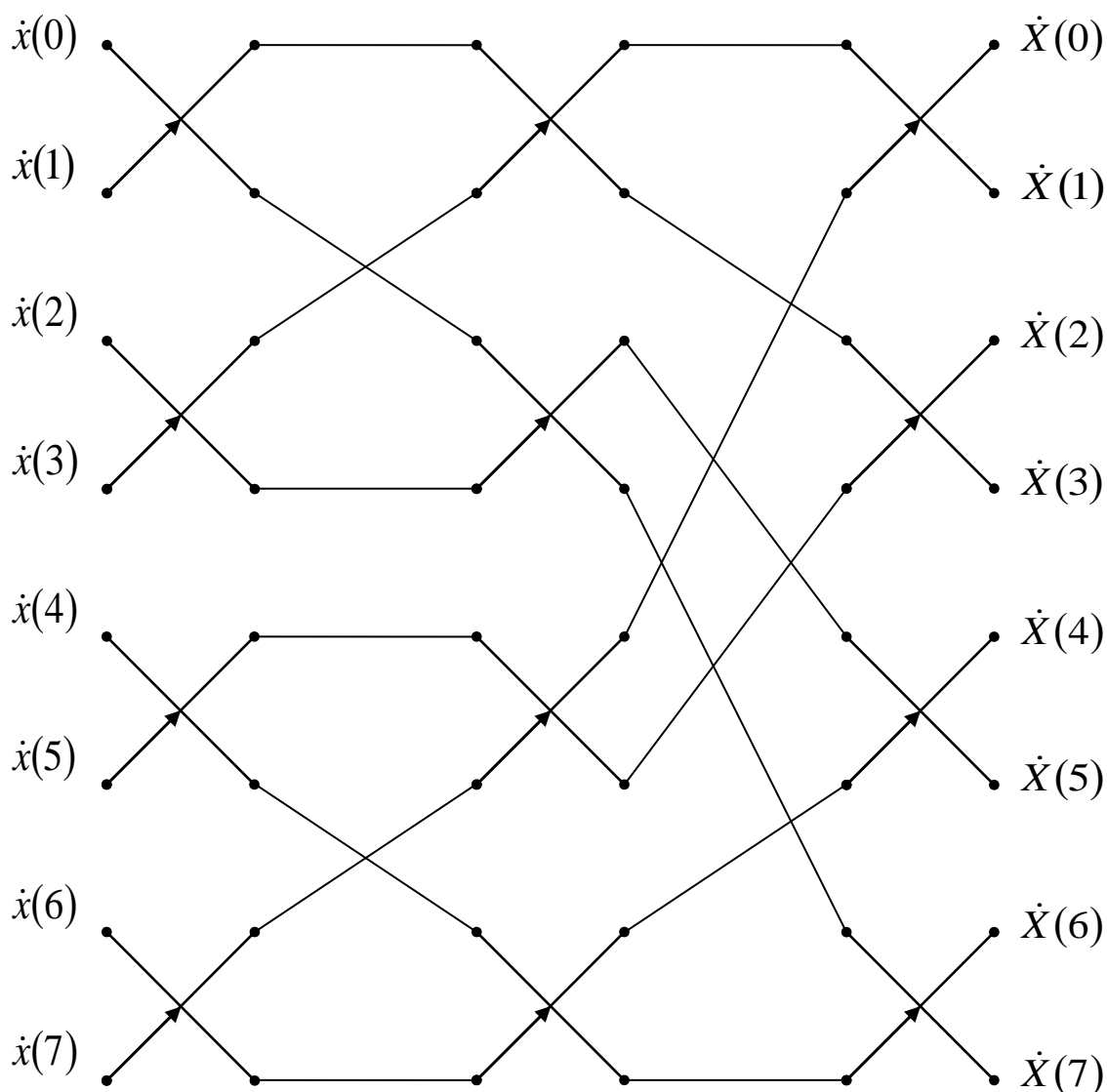


Рис. 3.16 – Граф 8-ми точкового БПФ в базисі Уолша-Адамара H_8

Легко перевірити, що граф (рис. 3.15) відповідає матриці (3.19), в той час як граф (рис. 3.16) відповідає матриці (3.20).

Графи БПФ в дочірніх системах Уолша можуть бути побудовані за допомогою індикаторних матриць так, як це описано в підрозділі, присвяченому БПФ в дочірніх базисах ВКФ.

3.4 Обсяги обчислень

Якщо N - m -раціональне число, то кількість елементарних графів перетворень (процесорів БПФ в базисі ДЕФ з m входів) у графах БПФ в

базисах ДЕФ і ВКФ збігається. Відповідно, збігається і кількість множень чисел на ступінь фазообертаючого множника. При цьому всі елементарні графи, що складають схему БПФ в базисі ДЕФ, можна розділити на дві групи: перша – що складається з елементарних графів, коефіцієнти яких повторюють коефіцієнти елементарних графів схеми перетворення в базисі ВКФ, друга – з відмінними коефіцієнтами. Якщо елементарні графи другої групи будуть вимагати більше машинного часу, ніж графи першої групи, БПФ в базисі ВКФ будуть проходити швидше, ніж БПФ в базисі ДЕФ. При цьому виграш буде залежати від співвідношення між кількостями графів в першій і другій групах, а також від співвідношень часу виконання цих графів. Проілюструємо описану ситуацію на прикладі графів БПФ в базисах ДЕФ і Уолша при $N = 8$. Розглянемо рис. 3.3 і 3.15. Видно, що до першої групи належать ті двоххідні процесори БПФ (діаграми «метелик»), при яких наявний коефіцієнт W^0 (перший етап БПФ); до другої групи – «метелики» другого і третього етапу перетворень, що містять ірраціональні коефіцієнти. Якщо для виконання графів першої групи потрібні тільки операції додавання, то графи другої групи вимагають виконання множення ірраціональних чисел.

Оцінимо співвідношення між кількістю членів цих двох груп для загального випадку. Нехай розмірність БПФ становить $N = m^n$. Перший етап перетворень в базисі ДЕФ складається із m^{n-1} елементарних графів першої групи.

У другому етапі до першої групи належить кожен з m графів, на третьому – кожен із m^2 , на четвертому – кожен із m^3 і т. п. Обчисливши суму цієї геометричної прогресії приходимо до результату

$$m^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^{n-1}} \right) = \frac{m^{n-1}-1}{m-1}.$$

При цьому загальна кількість елементарних графів в схемі БПФ становить $m^{n-1}n$. Відповідно, відносна кількість елементарних графів

першої групи складе

$$k_1 = \frac{m^{n-1}-1}{(m-1)m^{n-1}n}. \quad (3.21)$$

Відносна кількість елементарних графів другої групи рівна

$$k_2 = 1 - \frac{m^{n-1}-1}{(m-1)m^{n-1}n}. \quad (3.22)$$

Оцінимо час, необхідний для виконання графів обох груп. Позначимо через t_1 час, необхідний для виконання графів першої групи, через t_2 – час для графів другої групи, через K – кількість елементарних графів в схемі БПФ. Тоді загальний час на виконання БПФ дорівнюватиме

$$T = K(t_1k_1 + t_2k_2). \quad (3.23)$$

При $m = 4$ елементарний граф БПФ в базисі ВКФ представлений на рис.

3.8. Виконання цього графа є множення на матрицю розміром 4×4 (рис. 3.8):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Для виконання множення на таку матрицю вектора-стовпця, що складається з 4-х комплексних елементів, потрібно виконати 24 операції додавання дійсних чисел. Позначимо через t_+ час, необхідний для виконання складання, а через t_\times – час множення. При цьому $t_1 = 24t_+$. Загальний час виконання БПФ в базисі ВКФ складе

$$T_{ВКФ} = 24Kt_+. \quad (3.25)$$

Графам другої групи відповідає матриця перетворення

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^q & W^{2q} & W^{3q} \\ 1 & W^{2q} & W^{4q} & W^{6q} \\ 1 & W^{6q} & W^{12q} & W^{24q} \end{bmatrix},$$

де коефіцієнт q залежить від розмірності БПФ і номера етапу перетворення.

У загальному випадку виконання такого графа зажадає 36 операцій множення і 42 операції додавання. Відповідно, $t_2 = 36t_\times + 42t_+$. А загальний час виконання операції БПФ в базисі ДЕФ складе

$$T_{ДЕФ} = K(24t_+k_1 + (36t_\times + 42t_+)k_2). \quad (3.26)$$

Враховуючи (3.21) – (3.23), (3.25), (3.26) приходимо до виразу для оцінки виграшу часу при переході від базису ДЕФ в базис ВКФ з основою $m = 4$:

$$\xi = \frac{T_{ДЕФ}}{T_{ВКФ}} = 1 + \left(1 - \frac{4^{n-1}-1}{3 \cdot 4^{n-1}n}\right) \frac{6t_\times + 3t_+}{4t_+}. \quad (3.27)$$

У сучасній обчислювальній техніці при виконанні операції множення з фіксованою точкою вважається, що $t_\times = 5t_+$, для операцій з плаваючою точкою – $t_\times = t_+$. Враховуючи цю оцінку, перепишемо вираз (3.27):

$$\xi = \frac{T_{ДЕФ}}{T_{ВКФ}} = 1 + 2.25 \left(1 - \frac{4^{n-1}-1}{3 \cdot 4^{n-1}n}\right), \quad (3.28)$$

для множення з плаваючою точкою,

$$\xi = \frac{T_{ДЕФ}}{T_{ВКФ}} = 1 + 8.25 \left(1 - \frac{4^{n-1}-1}{3 \cdot 4^{n-1}n}\right), \quad (3.27)$$

для множення з фіксованою точкою.

Залежність виграшу в обсязі обчислень при переході від БПФ–ДЕФ до БПФ–ВКФ від порядку БПФ при множенні з плаваючою точкою показана на рис. 3.17. Максимально можливе (при $n \rightarrow \infty$) значення ξ становить 3,5, реально досягне – близько трьох.

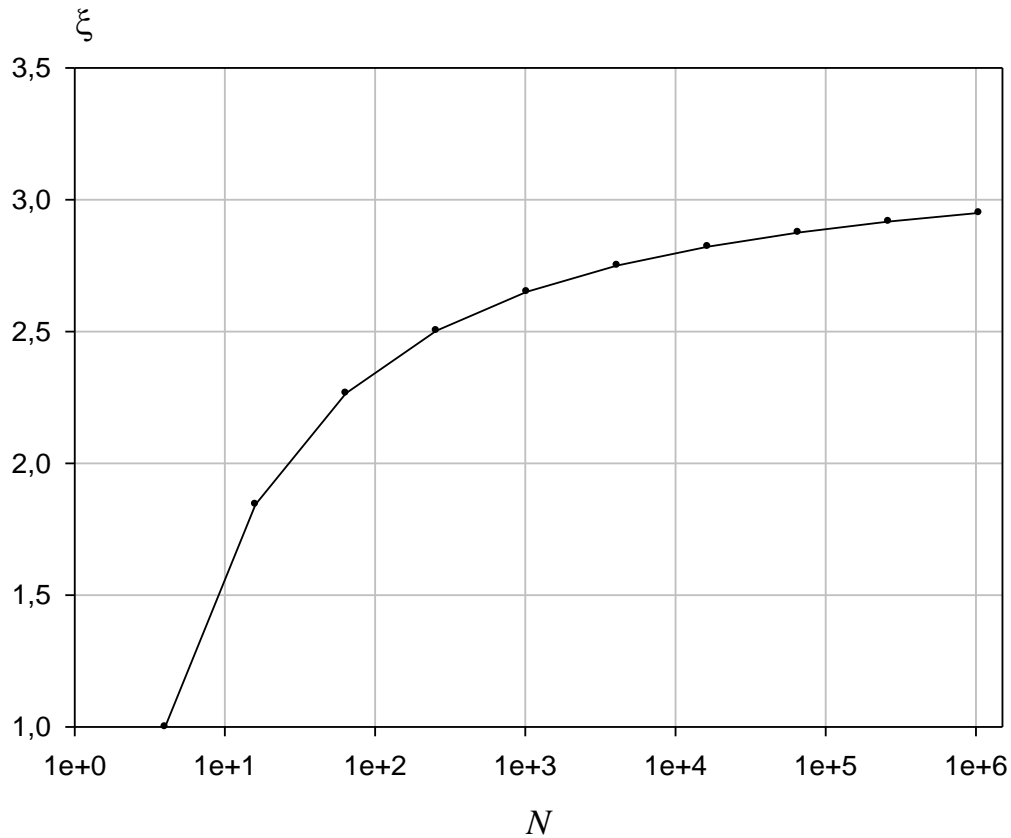


Рис. 3.17 – Залежність виграшу від розмірності БПФ

Якщо алгоритм БПФ в базисі ВКФ буде враховувати факторизацію матриці (3.24) (при цьому граф рис. 3.8 більше не буде елементарним, елементарними графами стануть діаграми «метелик», рис. 3.6), то кінцевий вираз для оцінки виграшу у швидкодії в разі множення з плаваючою точкою набуде вигляду

$$\xi = \frac{T_{ДЭФ}}{T_{ВКФ}} = 1 + 4 \left(1 - \frac{2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^{n-1} n} \right).$$

При цьому максимально можливе значення ξ складе 5. Реально досягне його значення становитиме близько 4. При використанні множення з фіксованою точкою виграш складе близько 11.

3.5 Висновки по розділу

Представлені алгоритми формування графів БПФ в базисах ВКФ. Структури отриманих графів за складністю не відрізняються від графів БПФ в базисах ДЕФ. При цьому обчислення спектра в базисі ВКФ (при деяких значеннях параметра базису m) вимагає менше витрат апаратури або машинного часу (швидкість обробки зростає майже на порядок). Ця властивість може бути використана для реалізації пристроїв, які оцінюють частоту прийнятого дискретно-експоненціального сигналу в базисі ВКФ, що володіють більш високою швидкістю, ніж аналогічний пристрій, що працює з базисом ДЕФ.

РОЗДІЛ 4

ОЦІНКА ЧАСТОТИ ДИСКРЕТНО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО СИГНАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В БАЗИСІ ВКФ

Незалежно від обраного базису: ДЕФ або ВКФ, результатом дискретних ортогональних перетворень над N -мірним комплексним вектором-сигналом буде N -мірний комплексний вектор, званий дискретним спектром сигналу в обраному базисі.

Якщо вихідний вектор являє собою дискретно-експонентний сигнал, то по його спектру можна *визначити* всі параметри цього сигналу (частоту, амплітуду і початкову фазу). У разі, коли вихідний вектор являє собою сигнал, змінений під впливом шуму, характеристики сигналу можуть бути лише *оцінені* з певною ймовірністю за його спектру [68 - 70, 72].

Даний розділ присвячений оцінці частоти дискретно-експоненціального сигналу, який приймається на тлі адитивного шуму, Що являє собою однозв'язний марківський гаусівський процес.

Доплерівсько-імпульсний сигнал задається наступним виразом:

$$\dot{s}_g(l) = U e^{j \frac{2\pi g l}{N}}, \quad l = \overline{0 \dots N-1}, \quad g \in [0, N-1], \quad (4.1)$$

де U – амплітуда сигналу, g – нормована частота, N – кількість відліків сигналу (обсяг вибірки), l – номер відліку.

Адитивний шум, який діє на корисний сигнал, в цій роботі задається наступними виразами [40]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_M(0) &= a(0) + jb(0), \\ \dot{\omega}_M(l) &= (a(l) + jb(l)) \cdot \sqrt{1 - R^2} + (a(l-1) + jb(l-1)) \cdot R, \\ & \quad l = \overline{1 \dots N-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Де $\dot{\omega}_M(l)$ – l -й відлік шуму, l – номер відліку (дискретний час), $a(l), b(l)$ – незалежні випадкові величини, підлеглі гауссівському закону розподілу з

нульовим математичним очікуванням (МО) і дисперсією, що дорівнює ψ , R – коефіцієнт кореляції між двома відліками шуму, віддаленими один від одного на один період дискретизації.

Прийнята послідовність $\dot{x}(l)$ може являти собою або адитивну суміш сигналу (4.1) і шуму (4.2):

$$\dot{x}(l) = \dot{s}_g(l) + \dot{\omega}(l), \quad (4.3)$$

або лише шум:

$$\dot{x}(l) = \dot{\omega}(l). \quad (4.4)$$

У цьому розділі за допомогою спектрального аналізу в базисах ДЕФ і ВКФ вирішується завдання визначення вірності гіпотези (4.3) або (4.4). Якщо підтверджується гіпотеза (4.3), то з деякою точністю визначається нормована частота сигналу g .

Послідовність $\dot{x}(l)$ надходить на вхід процесора БПФ. З виходів процесора знімається дискретний спектр $\dot{X}(k)$ прийнятої послідовності в базисі ДЕФ, функцій Уолша або ВКФ.

Рішення про наявність чи відсутність доплерівсько-імпульсного сигналу в прийнятій послідовності приймається після порівняння амплітуд $|\dot{X}(k)|$ спектральних коефіцієнтів з їх порогоми V_k . Якщо амплітуда відгуку перевищує поріг, то вважається, що це є наслідком присутності сигналу в прийнятій послідовності $\dot{x}(l)$. Поріг вибирається таким чином, щоб ймовірність помилкової тривоги (перевищення порога амплітудою деякого спектрального коефіцієнта при відсутності сигналу $\dot{s}_g(l)$ в прийнятій послідовності $\dot{x}(l)$) не перевищувала заданого максимально допустимого значення.

Результатом оцінки нормованої частоти сигналу g (яка є дійсним числом) є натуральне число g' . Правильною оцінкою вважається таке

значення g' , при якому виконується така умова:

$$|g' - g| < 1.$$

Таким чином, якщо нормована частота сигналу лежить в інтервалі (4; 5), то результати оцінювання $g' = 4$ і $g' = 5$ є рівною мірою вірними. Надалі будемо вважати, що нормована частота g підпорядкована рівномірному закону розподілу.

У розділі розглянуті два методи оцінки нормованої частоти дискретно-експоненціального сигналу $\dot{s}_g(l)$: метод без чересперіодної компенсації (ЧПК) і метод ЧПК. Показано, що ефективності вказаних методів залежать від коефіцієнта кореляції R між сусідніми відліками шуму $\dot{\omega}_M(l)$. Для розглянутих базисів знайдені точки комутації R_C – значення коефіцієнтів кореляції R , при перевищенні яких більш ефективним стає оцінка методом ЧПК.

Згідно з визначенням коефіцієнт кореляції R між сусідніми відліками шуму $\dot{\omega}_M(l)$ дорівнює

$$R = \frac{\langle a(l)a(l+1) \rangle}{\psi},$$

Де $a(l)$ і $a(l + 1)$ – реальні квадратурні складові сусідніх відліків шуму, ψ – дисперсія квадратурних складових відліків шуму.

При допущенні, що адитивний шум, що діє на сигнал, може бути описаний за допомогою однозв'язного марківського гаусівського ланцюга, оцінка коефіцієнта кореляції R між сусідніми відліками шуму може виглядає так:

$$R = \frac{\sum_{l=0}^K a(l)a(l+1)}{\sum_{l=0}^K a^2(l)},$$

де K – відносно велике (в кілька разів перевищує обсяг вибірки при

БПФ) натуральне число, $a(l)$ – реальні чи уявні квадратурні компоненти прийнятої послідовності, яка не містить корисного сигналу.

4.1 Оцінка частоти сигналу, що приймається на тлі білого шуму

Розглянемо випадок, при якому коефіцієнт кореляції R між сусідніми відліками шуму $\hat{\omega}(l)$ дорівнює нулю. При цьому квадратурні компоненти $a(l), b(l)$ шуму є випадковими величинами, підлеглими нормальному закону розподілу.

У цьому підрозділі буде знайдено значення відносин сигнал/шум за потужністю, при якому середня ймовірність правильної оцінки нормованої частоти сигналу складе не менше $P(D) = 0,9$ при ймовірності помилкової тривоги не більше $P(F) = 0,001$.

Будуть розглянуті наступні базиси: ДЕФ з $N = 16$ і $N = 64$, базиси ВКФ з $m = 4, n = 2$ і $m = 4, n = 3$.

4.1.1 Визначення межі рішення

Як було сказано раніше, значення квадратур відліків шуму підпорядковані нормальному закону розподілу з нульовим МО:

$$p_{a,b}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi}} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{2\pi\psi}},$$

де ψ – дисперсія величин $a(l), b(l)$.

Будь-який із спектральних коефіцієнтів $\hat{\Omega}(k)$, отриманих при БПФ послідовності $\hat{\omega}(l)$ в будь-якому з розглянутих базисів, являє собою алгебраїчну суму відліків $\hat{\omega}(l)$, взятих з деякою постійною вагою. А оскільки

квадратурні складові цих відліків – нормально розподілені випадкові величини з нульовим МО, то і квадратурні складові відліків спектру $\dot{\Omega}(k)$ будуть нормально розподіленими випадковими величинами з нульовими МО. З тієї причини, що білий гауссівський шум володіє рівномірною спектральною щільністю на всій осі частот, дисперсії квадратурних складових спектральних коефіцієнтів рівні між собою і не залежать від номера коефіцієнта k . Позначимо реальні і уявні квадратурні складові спектральних коефіцієнтів $\dot{\Omega}(k)$ через $A(k)$ та $B(k)$ відповідно:

$$\dot{\Omega}(k) = A(k) + jB(k) .$$

Дисперсію k -й квадратурної складової позначимо через ψ_k :

$$\psi_k = N\psi, k = \overline{0 \dots N-1} ,$$

де ψ – дисперсія величин $a(l), b(l)$; N – обсяг вибірки, що дорівнює порядку узагальнених ШПФ.

Відповідно, розподіл значень величин $A(k)$ і $B(k)$ при будь-яких можливих k описується виразом:

$$p_{A,B}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\psi}} e^{-\frac{\tau^2}{2N\psi}} . \quad (4.5)$$

Амплітуда k -го спектрального коефіцієнта визначається наступним виразом:

$$|\dot{X}(k)| = \sqrt{A(k)^2 + B(k)^2} .$$

З цього випливає, що розподіл амплітуд $|\dot{X}(k)|$ описується законом Релея [68, 72]:

$$p_{|\dot{\Omega}(k)|}(\tau) = \frac{\tau}{\psi_k} e^{-\frac{\tau^2}{2\psi_k}} . \quad (4.6)$$

У всіх подальших розрахунках прийемо значення дисперсії квадратур відгуків шуму $a(l)$ і $b(l)$, що дорівнює одиниці:

$$\psi = 1.$$

З огляду на це, спростимо вираз (4.5):

$$p_{|\dot{\Omega}(k)|}(\tau) = \frac{\tau}{N} e^{-\frac{\tau^2}{2N}}. \quad (4.7)$$

Цей вислів описує розподіл амплітуд $|\dot{X}(k)|$ будь-якого з k спектральних коефіцієнтів спектра білого гауссівського шуму в будь-якому з розглянутих базисів: ДЕФ і функцій Віленкіна-Крестенсона.

Порогом рішення V_k будемо називати деяке число, при перевищенні якого амплітудою k -го спектрального коефіцієнта $|\dot{X}(k)|$ буде прийнято рішення про наявність в прийнятій послідовності сигналу.

Згідно (4.7), ймовірність того, що амплітуда $|\dot{X}(k)|$ кожного з k спектральних коефіцієнтів спектра при ДПФ послідовності, що представляє собою білий гауссівський шум, перевищить деяке число α , визначається виразом

$$Q(\alpha) = P(|\dot{\Omega}(k)| > \alpha) = 1 - \int_0^\alpha p_{|\dot{\Omega}(k)|}(\tau) d\tau = e^{-\frac{\alpha^2}{2N}}, \quad k = \overline{0 \dots N-1}.$$

Якщо через P_f позначити максимально допустиму ймовірність перевищення порога відгуком одного з каналів, то буде правильною наступна рівність:

$$P_f = Q(V) = e^{-\frac{V_k^2}{2N}}. \quad (4.8)$$

З (4.8) приходимо до виразу для визначення порогу рішення:

$$V_k = \sqrt{-2N \ln(P_f)}.$$

Позначимо через $P(F)$ – максимально допустиме значення ймовірності помилкової тривоги. Якщо врахувати, що перевищення порога амплітудою відгуку одного з k вихідних каналів процесора узагальнених ДПФ є випадковою подією, що не залежить від перевищення межі амплітудою

відгуку на іншому каналі, то приходимо до наступного виразу:

$$P(F) = 1 - (1 - P_f)^N. \quad (4.9)$$

Рівність (4.9) дозволяє висловити P_f через $P(F)$:

$$P_f = 1 - \sqrt[N]{1 - P(F)}.$$

З урахуванням (4.8) кінцевий вираз для межі рішення при прийомі сигналу на тлі адитивного білого гауссівського шуму в будь-якому базисі приймає наступний вигляд [77]:

$$V_k = \sqrt{-2N \ln \left(1 - \sqrt[N]{1 - P(F)} \right)}. \quad (4.10)$$

4.1.2 Оцінка частоти. Базис ДЕФ

При ДПФ дискретній послідовності, що являє собою суміш білого гауссівського шуму і сигналу $\dot{s}_g(l)$ або тільки шум, в базисі ДЕФ можливі дві ситуації:

- 1) жодна з амплітуд спектральних коефіцієнтів не перевищує свого порога;
- 2) одна або більше амплітуд спектральних коефіцієнтів перевищують свій поріг.

У першому випадку буде прийнято рішення про відсутність сигналу в аналізованій послідовності. При цьому, якщо в прийнятій послідовності дійсно не був присутній сигнал, відбудеться правильне невиявлення сигналу. Якщо в послідовності присутній сигнал, таку подію слід трактувати, як пропуск сигналу.

У другому випадку буде прийнято рішення про наявність сигналу в дискретній послідовності і проведена оцінка його частоти. Якщо сигнал в послідовності присутній, відбудеться вірне виявлення. Якщо сигналу не було – ми маємо справу з помилковою тривоною, максимально допустиме

значення ймовірності якої регулюється вибором межі рішення (4.10).

Знайдемо закон, якому підпорядковується розподіл амплітуд $|\dot{X}(k)|$ спектральних коефіцієнтів при ДПФ адитивної суміші сигналу (4.1) і шуму (4.2). У цьому випадку квадратурні компоненти кожного з k коефіцієнтів будуть складатися з двох складових:

$$A(k) = A'(k) + \varepsilon_1(k), \quad B(k) = B'(k) + \varepsilon_2(k), \quad k = 0 \dots N - 1,$$

де $\varepsilon_1(k)$ і $\varepsilon_2(k)$, незалежні випадкові величини, розподіл яких описується виразом (4.5), $A'(k)$ і $B'(k)$ – відповідно реальний і уявний компоненти спектрального коефіцієнта, які були б отримані при ДПФ сигналу за відсутності шуму.

Оскільки $\varepsilon_1(k)$ і $\varepsilon_2(k)$ мають нульові МО, МО компонент $A(k)$ і $B(k)$ дорівнюватимуть $A'(k)$ і $B'(k)$ відповідно:

$$\langle A(k) \rangle = A'(k), \quad \langle B(k) \rangle = B'(k), \quad k = 0 \dots N - 1.$$

Амплітуда відгуку визначається як

$$|\dot{X}(k)| = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}.$$

Таким чином, $|\dot{X}(k)|$ є амплітудою двовимірного вектора, компоненти якого не залежать один від одного і підкоряються нормальному закону розподілу з рівними дисперсіями, але різними МО. Значить, розподіл $|\dot{X}(k)|$ підпорядкований узагальненому закону Релея [68, 72]. Враховуючи те, що дисперсії компонент всіх спектральних коефіцієнтів рівні N , запишемо вираз, що описує розподіл амплітуд спектральних коефіцієнтів:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{N} e^{-\frac{\tau^2 + u_k^2}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_k}{N}\right), \quad (4.11)$$

де $u_k = \sqrt{A'(k)^2 + B'(k)^2}$ – амплітуда, яку мав би коефіцієнт $|\dot{X}(k)|$ за відсутності шуму, $I_0(x)$ – модифікована функція Бьоссея нульового

порядку.

Відповідно, ймовірність перевищення межі V_k амплітудою відгуку $|\dot{X}(k)|$ на k -тому каналі процесора ДПФ при аналізі адитивної суміші білого гауссівського шуму $\dot{\omega}(l)$ і сигналу $\dot{s}_g(l)$ визначається виразом

$$P(|\dot{X}(k)| > V_k) = 1 - \frac{1}{N} \int_0^{V_k} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_k^2}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_k}{N}\right) d\tau. \quad (4.12)$$

Певний інтеграл з виразу (4.12) може бути обчислений за допомогою чисельних методів.

Якщо нормована частота сигналу лежить в межах

$$g \in [G; G + 1], \quad (4.13)$$

де G – довільне натуральне число, що лежить в межах $G \in [0; N - 2]$, то для її правильної оцінки необхідно, щоб межа вирішення перевищила або амплітуда $|\dot{X}(G)|$, або амплітуда $|\dot{X}(G + 1)|$, або обидві ці амплітуди. У першому випадку нормована частота буде оцінена як $g' = G$, у другому – як $g' = G + 1$, в третьому оцінка буде залежати від співвідношення між амплітудами $|\dot{X}(G)|$ і $|\dot{X}(G + 1)|$. Крім того, можлива ситуація, коли при ДПФ адитивної суміші сигналу $\dot{s}_g(l)$ і шуму $\dot{\omega}(l)$ амплітуда довільної гармоніки $|\dot{X}(k)|, k \neq G, G + 1$ перевищить свою межу, а також значення амплітуд $|\dot{X}(G)|$ і $|\dot{X}(G + 1)|$. При цьому буде прийнято рішення про наявність в прийнятій суміші сигналу $\dot{s}_k(l)$ із нормованою частотою k . Тобто відбудеться невірна оцінка частоти. Однак при виборі межі, яка відповідає ймовірності помилкової тривоги $P(F) = 0,001$ ймовірність такої події можна вважати незначною.

Значить, ймовірність $P(D)$ правильної оцінки нормованої частоти g

можна з великою точністю визначити виразом

$$P(D) = 1 - \left(1 - P(|\dot{X}(G)| > V_G)\right) \left(1 - P(|\dot{X}(G+1)| > V_{G+1})\right);$$

$$P(D) = 1 -$$

$$\frac{1}{N^2} \left(\int_0^{V_G} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_G^2(g)}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_G(g)}{N}\right) d\tau \right) \left(\int_0^{V_{G+1}} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_{G+1}^2(g)}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_{G+1}(g)}{N}\right) d\tau \right)$$

.

Враховуючи рівномірний характер розподілу величини g , знайдемо середню ймовірність правильної оцінки нормованої частоти за умови, що її значення лежить в межах (4.13):

$$P(D|g \in (G; G+1)) =$$

$$= 1 -$$

$$\frac{1}{N^2} \int_G^{G+1} \left(\int_0^{V_G} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_G^2(g)}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_G(g)}{N}\right) d\tau \right) \left(\int_0^{V_{G+1}} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_{G+1}^2(g)}{2N}} I_0\left(\frac{\tau u_{G+1}(g)}{N}\right) d\tau \right) dg \quad (4.14)$$

Всього існує $N - 1$ інтервалів (4.13). Тому остаточний вираз для аналітичного обчислення ймовірності правильної оцінки нормованої частоти гармонійного сигналу $\dot{s}_g(l)$, що приймається на тлі адитивного білого шуму $\dot{\omega}(l)$, визначається, як середнє значення ймовірності правильного виявлення на всіх можливих інтервалах (4.13):

$$P(D) = \frac{1}{N-1} \sum_{G=0}^{N-2} P(D|g \in (G; G+1)). \quad (4.15)$$

Розглянемо докладніше величину $u_G(g)$. Як було сказано раніше, вона являє собою амплітуду відгуку на G -му вихідному каналі процесора БПФ при подачі на вхід послідовності, що представляє собою незашумлений сигнал $\dot{s}_g(l)$:

$$u_G(g) = |\dot{S}(G)| = \left| \sum_{l=0}^{N-1} f_G(l) \dot{s}_g(l) \right|, \quad (4.16)$$

де $f_G(l)$ – G -а функція дискретного базису Фур'є.

При нормованій частоті сигналу $\dot{s}_g(l)$, що лежить в інтервалі (4.13), значення (4.16) не залежить від G , а залежить лише від різниці $g - G$ і амплітуди сигналу $\dot{s}_g(l)$. Крім того, коли сигнал приймається на тлі адитивного білого гауссівського шуму $\dot{\omega}(l)$, значення межі рішення V_G також не залежить від G і є постійним для всіх вихідних каналів процесора БПФ. Тому вираз (4.14) також не залежить від G і є лише функцією амплітуди U сигналу $\dot{s}_g(l)$. Відповідно, всі члени суми (4.15) за умови, що шум є білим, дорівнюють один одному. Це означає, що середня імовірність правильної оцінки нормованої частоти сигналу може бути обчислена за допомогою виразу (4.14):

$$P(D) = P(D|g \in (G; G + 1)), \quad (4.17)$$

де G – довільне натуральне число від 0 до $N - 2$.

В даному підрозділі наведені результати розрахунків мінімальної потужності сигналу, яка задовольнить вимоги, пред'явленим в підрозділі 4.1.

Відношення сигнал/шум за потужністю у разі прийому гармонійного сигналу, описаного формулою (4.1), визначається як

$$b = \frac{U^2}{2\psi},$$

де U – амплітуда сигналу, ψ – дисперсія квадратурної складової відліків шуму.

Враховуючи допущення про те, що дисперсія шуму дорівнює одиниці, в даному випадку можна вважати відношення сигнал/шум за потужністю рівним половині квадрата амплітуди сигналу:

$$b = \frac{U^2}{2}.$$

Оскільки це відношення прийнято виражати в дБ, запишемо остаточний вираз для визначення параметра b :

$$b = 10 \log_{10} \left(\frac{U^2}{2} \right). \quad (4.18)$$

При $N = 16$ для забезпечення максимальної ймовірності помилкової тривоги не більше $P(F) = 0,001$ згідно (4.10) межа рішення повинна скласти:

$$V_k = \sqrt{-2 \cdot 16 \ln(1 - \sqrt[16]{1 - 0,001})} \approx 17,6.$$

З огляду на отримане значення межі і вираз (4.16), визначимо ймовірності правильної оцінки частоти сигналу при різних амплітудах U за допомогою виразу (4.15). Результат представимо, як графік залежності $P(D)$ від b (рис. 4.1).

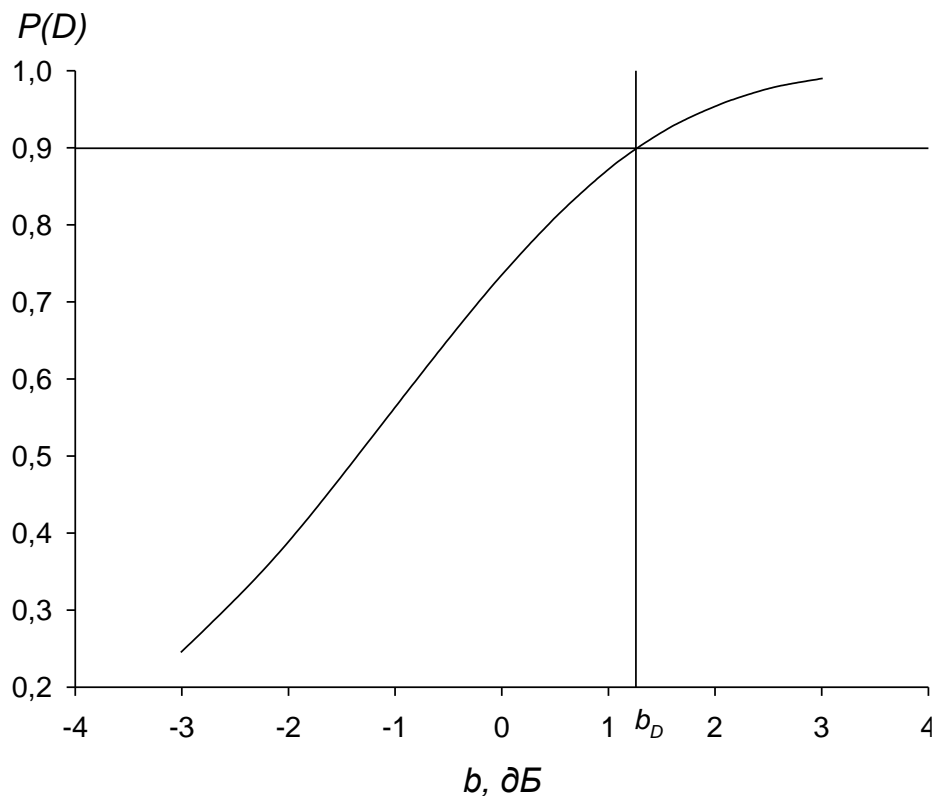


Рис. 4.1 – Залежність ймовірності вірної оцінки сигналу від відношення сигнал/шум за потужністю

Точка b_D на осі b графіка (рис. 4.1) відповідає тому відношенню сигнал/шум за потужністю b , при якому дотримується необхідна ймовірність

$P(D) = 0,9$ вірної оцінки нормованої частоти сигналу.

Аналізуючи графік, приходимо до того, що $b_D \approx 1,3\text{дБ}$. Точне значення величини b_D можна знайти, якщо вирішити рівняння (4.15) щодо U , прийнявши $P(D) = 0,9$, і скористатися формулою (4.18). Таким чином, приходимо до більш точного значення для відношення сигнал/шум за потужністю $b_D = 1,276\text{дБ}$.

При $N = 64$ поріг вирішення складе

$$V_k = \sqrt{-2 \cdot 16 \ln(1 - \sqrt[64]{1 - 0,001})} \approx 37,6.$$

Вирішивши рівняння (4.15) щодо U , прийнявши $P(D) = 0,9$, одержимо $U \approx 0,871$. Що відповідає відношенню сигнал/шум за потужністю

$$b_D = 10 \log_{10} \left(\frac{0,871^2}{2} \right) \approx -4,205\text{дБ}.$$

Експеримент. Для перевірки аналітично отриманих результатів був проведений статистичний експеримент методом комп'ютерного моделювання. Для цього була складена програма, яка працює за наступним алгоритмом:

- 1) формується N -мірний вектор $\dot{\omega}(l)$, що представляє собою білий гауссівський шум із дисперсією, яка дорівнює $\psi = 1$;
- 2) обирається випадкове дійсне число g з діапазону $[0, N - 1]$;
- 3) формується вектор $\dot{s}_g(l)$, що представляє собою дискретно-експонентний сигнал з нормованою частотою g і заданою амплітудою U , і складається з вектором $\dot{\omega}(l)$;
- 4) над отриманою послідовністю $\dot{x}(l) = \dot{\omega}(l) + \dot{s}_g(l)$ проводиться БПФ, результатом яких є дискретний спектр $\dot{X}(k)$;

- 5) з усіх спектральних коефіцієнтів, які перевищили поріг рішення, вибирається максимальний за амплітудою коефіцієнт $\hat{X}(g')$. Якщо жоден з коефіцієнтів не перевищив межу, приймається невірне рішення про відсутність у прийнятій послідовності сигналу (пропуск сигналу);
- 6) номер g' обраного коефіцієнта порівнюється з частотою g сигналу $\hat{s}_g(l)$. Якщо $|g' - g| < 1$, вважається, що сталася вірна оцінка нормованої частоти g' сигналу $\hat{s}_g(l)$.

Обсяг експерименту склав 10^6 . При БПФ 16-точкових послідовностей амплітуда сигналу складала $U = 1,638$, що відповідає відношенню сигнал/шум за потужністю $b_D \approx 1,276$ дБ. Правильна оцінка нормованої частоти g' сталася 899328 разів, що відповідає ймовірності правильної оцінки $P(D) \approx 0.899$.

При $N = 64$ амплітуда сигналу була обрана рівною $U = 0,871$. Таким чином, було забезпечено відношення сигнал/шум за потужністю $b_D \approx -4,205$ дБ. Правильна оцінка нормованої частоти сигналу g' сталася 899237 разів, що відповідає ймовірності правильної оцінки $P(D) \approx 0.899$.

Таким чином, оцінка (4.15) була підтверджена експериментально.

4.1.3 Оцінка частоти. базис ВКФ

Якщо при оцінці нормованої частоти g сигналу $\hat{s}_g(l)$ в базисі ДЕФ існує лінійна зв'язаність між номером k каналу, на якому спостерігається максимальний за амплітудою відгук, і нормованою частотою g сигналу [30], то при оцінці в базисі ВКФ такої відповідності немає. При подачі на вхід процесора БПФ в базисі ВКФ «чистого» сигналу $\hat{s}_g(l)$ з відомою цілою

нормованою частотою g , максимальний за амплітудою відгук не обов'язково буде присутній на вихідному каналі з номером $k = g$.

Більше того, при БПФ в базисі ВКФ дискретно-експоненційних сигналів при деяких цілих значеннях нормованої частоти g максимальні за амплітудою відгуки спостерігаються відразу на двох каналах. А така ситуація призводить до того, що перевищення порогового значення амплітудою відгуку на одному з каналів при прийомі адитивної суміші $\dot{x}_g(l)$ сигналу $\dot{s}_g(l)$ і білого гауссівського шуму $\dot{\omega}(l)$ не дозволяє з повною впевненістю робити висновок про нормовану частоту сигналу. Проілюструємо подібний випадок.

Спектр в базисі ВКФ-Пелі сигналу $\dot{s}_2(l)$ містить однакові за амплітудою відгуки на 8-му та 9-му вихідних каналах. У той же час спектр в цьому ж базисі сигналу $\dot{s}_6(l)$ містить відгуки з такими ж амплітудами на 9-му і 10-му вихідних каналах. Це означає, що при БПФ в базисі ВКФ-Пелі суміші $\dot{x}_g(l)$ сигналу $\dot{s}_g(l)$ і білого гауссівського шуму $\dot{\omega}(l)$ перевищення порогового значення амплітудою $|\dot{X}(9)|$ відгуку на 9-му каналі може означати, що значення нормованої частоти g близько або до $g \approx 2$, або до $g \approx 6$. Щоб зробити остаточний висновок щодо нормованої частоти g сигналу $\dot{s}_g(l)$ в цьому випадку необхідно порівняти значення амплітуд на 8-м і 10-м вихідних каналах. Якщо $|\dot{X}(8)| > |\dot{X}(10)|$, значення нормованої частоти будемо вважати рівним $g' = 2$; в іншому випадку оцінюємо нормовану частоту, як $g' = 6$.

Тому оцінка частоти сигналу в базисі ВКФ вимагає складання попереднього масиву відповідності номерів каналів з максимальним за амплітудою відгуком і частотою вхідного сигналу.

Зважаючи на складність описаного алгоритму знайдемо ймовірність правильної оцінки нормованої частоти сигналу за допомогою статистичного експерименту.

Експеримент. Програма, моделююча оцінку сигналу, що приймається на тлі білого гауссівського шуму, працює за наступним алгоритмом:

- 1) формується N -мірний вектор $\hat{\omega}(l)$, що представляє собою білий гауссівський шум з дисперсією, що дорівнює $\psi = 1$;
- 2) обирається випадкове дійсне число g із діапазону $[0, N - 1]$;
- 3) формується вектор $\hat{s}_g(l)$, що представляє собою дискретно-експонентний сигнал з нормованою частотою g і заданою амплітудою U , і складається з вектором $\hat{\omega}(l)$;
- 4) над отриманою послідовністю $\hat{x}(l) = \hat{\omega}(l) + \hat{s}_g(l)$ проводиться БПФ в базисі ВКФ, результатом яких є спектр $\hat{X}(k)$;
- 5) з усіх спектральних коефіцієнтів, які перевищили поріг рішення, вибирається максимальний за амплітудою коефіцієнт $\hat{X}(K)$. Якщо жоден з коефіцієнтів не перевищив межу, приймається невірне рішення про відсутність у прийнятій послідовності сигналу (пропуск сигналу);
- 6) якщо номер K максимального за амплітудою спектрального коефіцієнта відповідає лише одній нормованій частоті g' вхідного сигналу, то приймається рішення про те, що нормована частота вхідного сигналу дорівнює g' . Якщо за номером K неможливо однозначно визначити нормовану частоту, то для визначення g' між собою порівнюються амплітуди відгуків на двох інших каналах і оцінка g' частоти проводиться за результатом порівняння;
- 7) оцінка g' нормованої частоти порівнюється з частотою g сигналу $\hat{s}_g(l)$.

Якщо $|g' - g| < 1$, вважається, що відбулася вірна оцінка нормованої частоти g' сигналу $\hat{s}_g(l)$.

Граничні значення V_k амплітуд $|\hat{X}(k)|$ спектральних коефіцієнтів обчислюються за формулою (4.10), яка підходить і для базису ВКФ.

На рис. 4.2 показані результати експериментів для $N = 16$. Кожна точка графіка була отримана за допомогою окремого статистичного експерименту, обсяг кожного з яких склав 10^6 .

За графіком визначаємо значення відносини сигнал/шум потужності, що забезпечує ймовірність вірної оцінки нормованої частоти сигналу $P(D) = 0.9$, як $b_D \approx 2,74\text{дБ}$.

Для перевірки отриманого результату проводимо статистичний експеримент з об'ємом 10^6 , встановивши амплітуду сигналу $U = 1,939$, яка забезпечує необхідні співвідношення сигнал/шум за потужністю $b_D = 2,74\text{дБ}$. Правильна оцінка нормованої частоти сигналу сталася 901807 разів, що відповідає ймовірності вірної оцінки частоти $P(D) \approx 0.902$.

Графік залежності ймовірності вірної оцінки від співвідношення сигнал/шум за потужністю при $N = 64$ представлений на рис. 4.3.

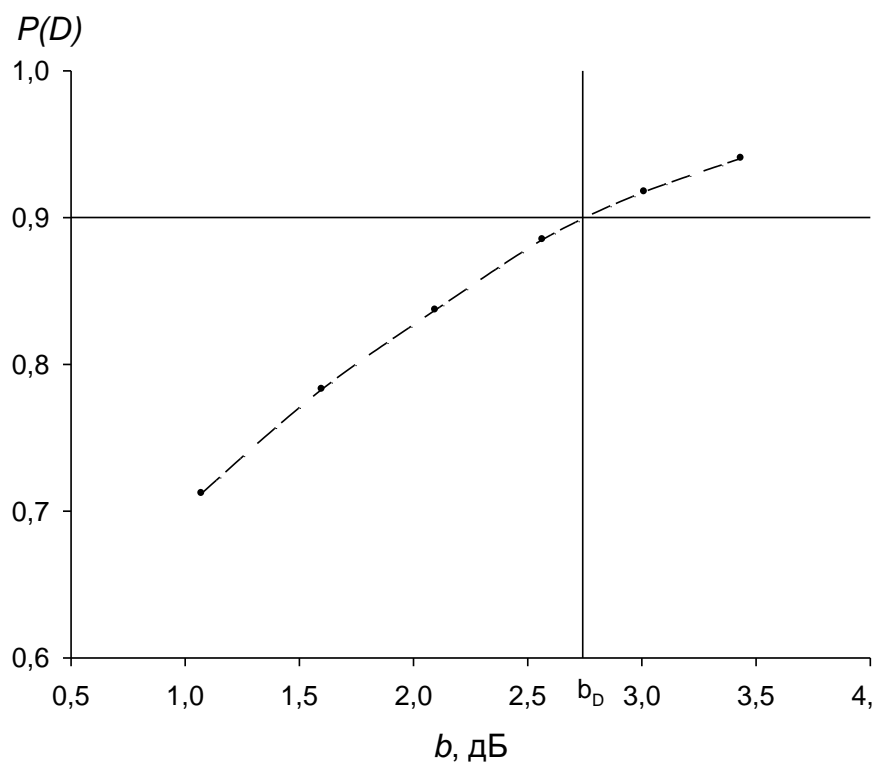


Рис. 4.2 – Результати експерименту з визначення залежності ймовірності вірної оцінки сигналу від співвідношення сигнал/шум за потужністю, $N = 16$

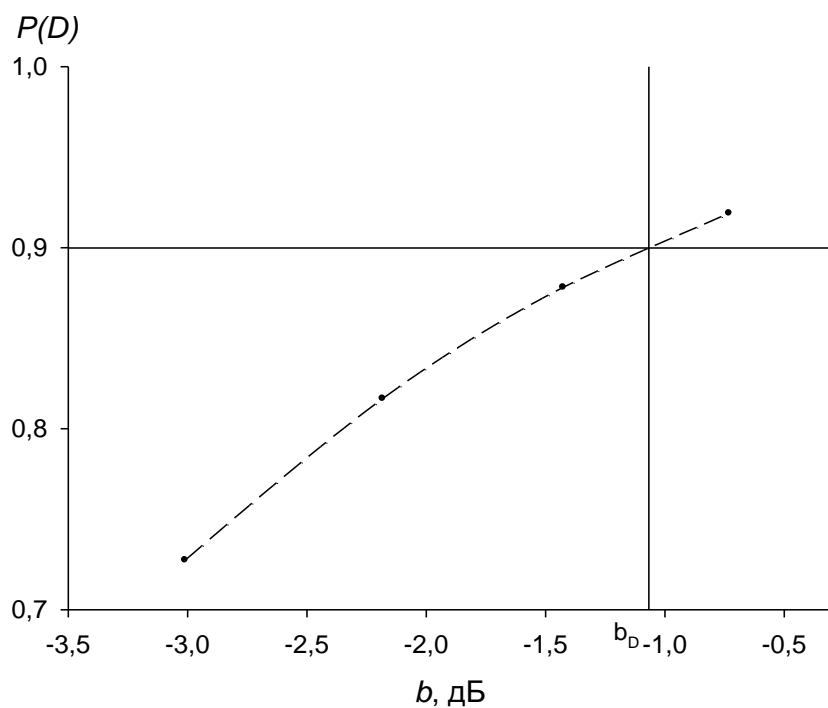


Рис. 4.3 – Результати експерименту з визначення залежності ймовірності вірної оцінки сигналу від співвідношення сигнал/шум за потужністю, $N = 64$ За графіком визначаємо значення співвідношення

сигнал/шум за потужністю, що забезпечує ймовірність вірної оцінки нормованої частоти сигналу $P(D) = 0.9$, як $b_D \approx -1,07\text{дБ}$.

Статистичний експеримент, який перевіряє отриманий результат, проводимо, встановивши амплітуду сигналу, що дорівнює $U = \sqrt{2 \cdot 10^{\frac{b_D}{10}}} \approx 1,250$. При обсязі експерименту, рівному 10^6 , правильна оцінка нормованої частоти сигналу сталася 901373 разів, відповідає ймовірності вірної оцінки $P(D) \approx 0.901$ і підтверджує вірність отриманого результату.

4.1.4 Оцінка частоти. Базис Уолша

При БПФ послідовності, що представляє собою чистий сигнал $\dot{s}_g(l)$, в базисах Уолша можлива ситуація, при якій, як і в випадку з базисами ДЕФ, одній цілій нормованій частоті сигналу відповідають однакові за амплітудою максимуми на двох вихідних каналах процесора БПФ. Розглянемо БПФ в базисі Уолша-Кулі.

При подачі на вхід процесора БПФ в базисі Уолша-Кулі послідовності, що представляє собою чистий сигнал

$$\dot{s}_1(l) = e^{j\frac{\pi l}{8}}, \quad l = \overline{0 \dots 15},$$

максимальні за амплітудою відгуки будуть спостерігатися на 1-му і 15-му частотних каналах:

$$|\dot{X}(1)| = |X(15)| \approx 10,252.$$

При цьому такі ж за амплітудою відгуки на тих же самих каналах будуть спостерігатися і при подачі на вхід процесора сигналу

$$\dot{s}_{15}(l) = e^{j\frac{15\pi l}{8}}, \quad l = \overline{0 \dots 15}.$$

Відповідно, перевищення межі амплітудою відгуку на одному з цих двох каналів не дає однозначної відповіді на питання «якою нормованою частотою володіє сигнал?».

Значить, спосіб оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, що заснований на аналізі максимального за амплітудою спектрального

коефіцієнта, не може бути застосований навіть у незашумленому каналі зв'язку.

4.2 Оцінка частоти сигналу, що приймається на тлі корельованого шуму

Розглянемо випадок, коли адитивний шум $\dot{\omega}_M(l)$, що впливає на сигнал $\dot{s}_g(l)$, описується виразом (4.2), тобто являє собою однозв'язний марківський ланцюг гауссівських випадкових величин. Причому параметр R може приймати будь-яке значення в межах $R \in (0; 1)$. Граничний випадок був розглянутий в попередньому підрозділі. При $R = 1$ відліки шуму не відрізняються один від одного, а сам шум впливає лише на нульовий відлік дискретного спектра при БПФ в будь-якому базисі. Квадратурні компоненти відліків $\dot{\omega}_M(l)$, сформованих за допомогою (4.2) підпорядковуються гауссівському закону розподілу, їх МО дорівнює нулю [75–78]. Однак оскільки коефіцієнт кореляції $R \neq 0$ вони не виступають незалежними.

З огляду на прийняте раніше припущення про те, що дисперсія квадратурних компонент відліків шуму $\dot{\omega}_M(l)$ дорівнює $\psi = 1$, вираз (4.6), що описує розподіл амплітуд спектральних коефіцієнтів при БПФ білого шуму $\dot{\omega}(l)$ в будь-якому базисі, залишається вірним і для корельованого шуму $\dot{\omega}_M(l)$. При цьому значення дисперсій ψ_k квадратур спектральних коефіцієнтів не рівні один одному і залежать від k і від R . Відповідно, для визначення порогу рішення необхідно оцінити дисперсії квадратурних складових спектральних коефіцієнтів при БПФ послідовності, що представляє собою шум $\dot{\omega}_M(l)$.

4.2.1 Оцінка частоти. Базис ДЕФ

Визначимо пороги рішення, попередньо оцінивши дисперсії квадратурних компонент спектральних коефіцієнтів, які виходять при БПФ однозв'язного марківського гауссівського процесу.

Позначимо квадратурні складові шуму $\dot{\omega}_M(l)$ через $a'(l)$ та $b'(l)$:

$$\dot{\omega}_M(l) = a'(l) + jb'(l) . \quad (4.19)$$

Розглянемо операцію БПФ послідовності $\dot{\omega}_M(l)$ в базисі ДЕФ:

$$\dot{\Omega}_M(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{\omega}_M(l) W^{kl}, k = \overline{0, \dots, N-1}, \quad (4.20)$$

де $\dot{\Omega}_M(k)$ – дискретний спектр послідовності $\dot{\omega}_M(l)$, N – обсяг вибірки послідовності, $\dot{\omega}_M(l)$, $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – фазообертаючий множник

Позначимо квадратурні складові спектральних коефіцієнтів $\dot{\Omega}_M(k)$ через $A(k)$ та $B(k)$:

$$\dot{\Omega}_M(k) = A(k) + jB(k). \quad (4.21)$$

Скористаємося формулою Ейлера, щоб розкласти множник W^{kl} на складові:

$$W^{kl} = c_{kl} - js_{kl}, \quad (4.22)$$

де

$$c_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kl\right), s_{kl} = \sin\left(\frac{2\pi}{N}kl\right). \quad (4.23)$$

Відповідно до (4.19) – (4.23)

$$A(k) = \sum_{l=0}^{N-1} a_{kl}, B(k) = \sum_{l=0}^{N-1} b_{kl}, k = \overline{0, \dots, N-1}, \quad (4.24)$$

де

$$a_{kl} = c_{kl}a'(l) + s_{kl}b'(l), b_{kl} = c_{kl}b'(l) - s_{kl}a'(l). \quad (4.25)$$

Очевидно, математичні очікування величин a_{kl} і b_{kl} дорівнюють нулю:

$$\langle a_{kl} \rangle = \langle b_{kl} \rangle = 0,$$

а самі ці величини є незалежними:

$$\langle a_{kl}b_{kl} \rangle = 0.$$

Відповідно, $\langle A(k) \rangle = \langle B(k) \rangle = 0$. Отже, дисперсія квадратури $A(k)$ спектрального коефіцієнта $\dot{\Omega}_M(k)$ може бути знайдена, як

$$\psi_k = \langle A(k)^2 \rangle. \quad (4.26)$$

Згідно (4.25), вираз (4.26) набирає вигляду

$$\psi_k = \langle (\sum_{l=0}^{N-1} a_{kl})^2 \rangle. \quad (4.27)$$

Щоб наочно продемонструвати операцію зведення в квадрат ряду (4.27), складемо таблицю розміром $N \times N$, в осередку, розташованому в i -му рядку j -го стовпчика розташовується елемент (i, j) рівний (табл. 4.1) [79–86].

До визначення ψ_k за формулою (4.26)

Номер відліку	0	1	...	j	...	$N - 1$
0	(0,0)	(0,1)	...	(0, j)	...	(0, $N - 1$)
1	(1,0)	(1,1)	...	(1, j)	...	(1, $N - 1$)
...
i	($i, 0$)	($i, 1$)	...	(i, j)	...	($i, N - 1$)
...
$N - 1$	($N - 1, 0$)	($N - 1, 1$)	...	($N - 1, j$)	...	($N - 1, N - 1$)

Відповідно до (4.27) дисперсія ψ_k може бути знайдена, як сума дисперсій всіх елементів табл. 4.1:

$$\psi_k = \sum_{i,j=0}^{N-1} \psi_{ij}^{(k)}, \quad (4.28)$$

де

$$\psi_{ij}^{(k)} = \langle a_{ki} a_{kj} \rangle. \quad (4.29)$$

Підставимо в (4.29) значення із (4.25):

$$\psi_{ij}^{(k)} = \left\langle \left(c_{ki} a'(i) + s_{ki} b'(i) \right) \left(c_{kj} a'(j) + s_{kj} b'(j) \right) \right\rangle.$$

Оскільки величини $a'(i)$ і $b'(i)$ незалежні і $\langle a'(i) b'(i) \rangle = 0$, розкривши дужки в останньому виразі, отримуємо

$$\psi_{ij}^{(k)} = c_{ki} c_{kj} \langle a'(i) a'(j) \rangle + s_{ki} s_{kj} \langle b'(i) b'(j) \rangle. \quad (4.30)$$

Для однозв'язного марківського процесу правильно

$$R_{ij} = R^{|i-j|}, \quad (4.31)$$

де $R_{ij} = \frac{\langle a'_i a'_j \rangle}{\psi}$ – коефіцієнт кореляції між i -м і j -м елементами марківського ланцюга.

Беручи до уваги (4.23) і (4.31), перетворимо вираз (4.30):

$$\psi_{ij}^{(k)} = \psi R^{|i-j|} \cos \left(\frac{2\pi}{N} k(i-j) \right). \quad (4.32)$$

Спростимо вираз (4.32), позначивши через d модуль різниці $|i - j|$:

$$\psi_{ij}^{(k)} = \psi R^d \cos\left(\frac{2\pi}{N} kd\right).$$

Уздовж головної діагоналі матриці табл. 4.1 розташовуються N елементів, для яких число $d = 0$. До головної діагоналі примикають діагоналі, що містять в сумі $2(N - 1)$ елементів, для яких $d = 1$. Продовжуючи аналіз табл. 4.1 приходимо до остаточного вираження для дисперсії ψ_k квадратурних компонент $A(k)$ спектральних коефіцієнтів $\dot{\Omega}(k)$, отриманих при БПФ в базисі ДЕФ корельованого шуму $\omega_M(l)$ [77, 90–105]:

$$\psi_k = \psi \left(N + 2 \sum_{d=0}^{N-1} (N - d) R^d \cos\left(\frac{2\pi}{N} kd\right) \right). \quad (4.33)$$

Беручи до уваги допущення про те, що $\psi = 1$, спрощуємо вираз (4.33):

$$\psi_k = N + 2 \sum_{d=0}^{N-1} (N - d) R^d \cos\left(\frac{2\pi}{N} kd\right) \quad (4.34)$$

Окремим випадком формули (4.34) при $R = 0$ є рівність

$$\psi_k = N, \quad k = \overline{0, \dots, N - 1},$$

отримане в підрозділі 4.1.1.

Як було вище зазначено, амплітуди $|\dot{\Omega}(k)|$ спектральних коефіцієнтів при БПФ однозв'язного марківського гауссівського процесу підкоряються розподілу Релея, тобто залишається правильною формула (4.6), у якій ψ_k визначається за допомогою (4.34). Відповідно, пороги рішення для різних вихідних каналів процесора БПФ в базисі ДЕФ можуть бути знайдені за допомогою виразу

$$V_k = \sqrt{-2\psi_k \ln\left(1 - \sqrt[N]{1 - P(F)}\right)}. \quad (4.35)$$

4.2.1.2 Алгоритм оцінки частоти. Базис ДЕФ. Розподіл амплітуд спектральних коефіцієнтів $\dot{X}(k)$ при БПФ в базисі ДЕФ послідовності, що представляє собою адитивну суміш сигналу $\dot{s}_g(l)$ і шуму $\dot{\omega}_M(l)$, підпорядковується, як і у випадку з білим шумом, закону Релея-Райса:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{N} e^{-\frac{\tau^2 + u_k^2}{2\psi_k}} I_0\left(\frac{\tau u_k}{\psi_k}\right) \quad (4.36)$$

де u_k – амплітуда, яку мав би відгук $|\dot{X}(k)|$ при відсутності шуму (4.16), $I_0(x)$ – модифікована функція Бьосселя нульового порядку.

Здійснюючи елементарні перетворення за аналогією з підрозділом 4.1.2, приходимо до виразу для середньої ймовірності вірної оцінки нормованої частоти сигналу $\dot{s}_g(l)$ за умови, що її значення g знаходиться в

$$\begin{aligned} \text{межах} \quad (4.13): P(D|g \in (G; G+1)) = \\ = 1 - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\psi_G \psi_{G+1}} \int_G^{G+1} \left(\int_0^{V_G} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_G^2(g)}{2\psi_G}} I_0\left(\frac{\tau u_G(g)}{\psi_G}\right) d\tau \right) \left(\int_0^{V_{G+1}} \tau e^{-\frac{\tau^2 + u_{G+1}^2(g)}{2\psi_{G+1}}} I_0\left(\frac{\tau u_{G+1}(g)}{\psi_{G+1}}\right) d\tau \right) d\tau, \quad (4.37)$$

З урахуванням (4.37) формула (4.15) для визначення середньої ймовірності вірної оцінки частоти сигналу:

$$P(D) = \frac{1}{N} \sum_{G=0}^{N-1} P(D|g \in (G; G+1)).$$

Розв'язавши рівняння (4.15) щодо U при різних значеннях R , прийнявши $P(D) = 0,9$ і перетворивши коріння рівняння за допомогою формули (4.18) отримаємо графік залежності необхідного для забезпечення вимагаючої ймовірності вірної оцінки сигналу відношення сигнал/шум при потужності b від коефіцієнта кореляції R між сусідніми відліками шуму.

На рис. 4.4 показаний такий графік для 16-точкового БПФ в базисі ДЕФ, на рис. 4.5 – для 64-точкового.

Для перевірки отриманих даних було проведено статистичний експеримент. Програма, що моделює прийом сигналу $\dot{s}_g(l)$ з невідомою нормованою частотою g на тлі шуму $\dot{\omega}_M(l)$ працює за алгоритмом, описаним в підрозділі 4.1.2.1. Кожна з точок, за якими були побудовані графіки (рис. 4.4, 4.5) була перевірена експериментально. При цьому значення ймовірностей правильної оцінки частоти сигналу лежали в межах $(0,898; 0,902)$, що приблизно відповідає необхідній ймовірності вірної оцінки $P(D) = 0,9$.

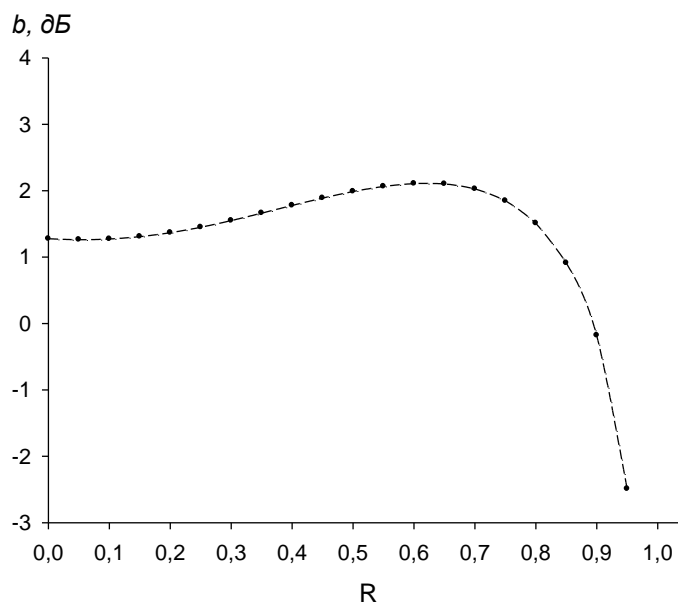


Рис. 4.4 – Графік залежності необхідного відношення сигнал/шум за потужністю від коефіцієнта кореляції, базис ДЕФ, $N = 16$

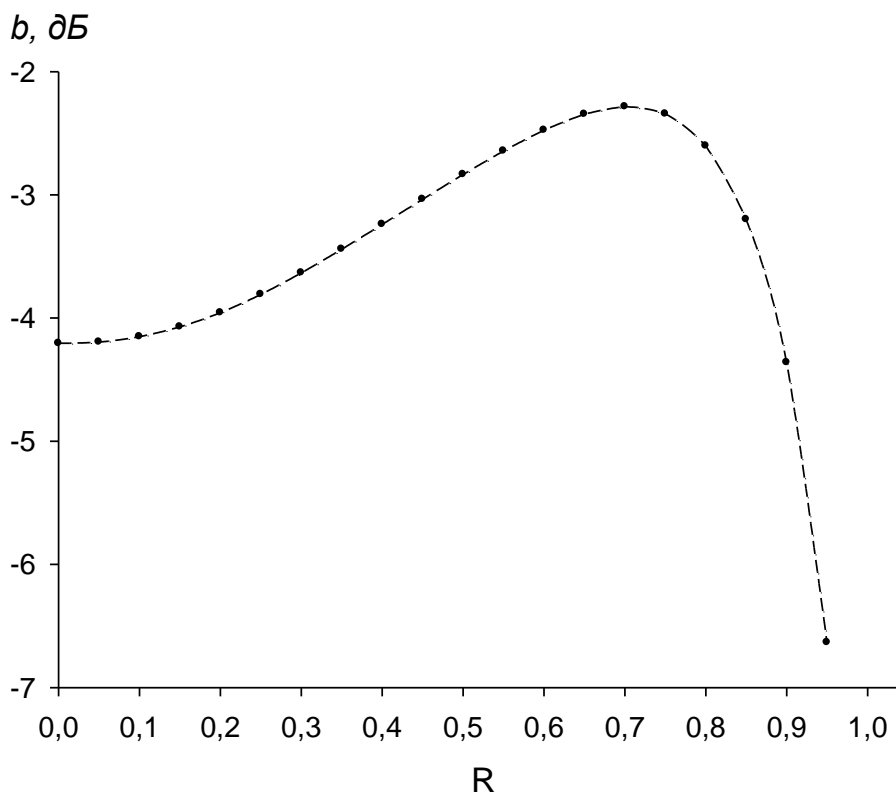


Рис. 4.5 – Графік залежності необхідного відношення сигнал/шум за потужністю від коефіцієнта кореляції, базис ДЕФ, $N = 64$

4.2.2 Оцінка частоти. Базис ДЕФ. Метод одноразової черезперіодної компенсації Як видно з графіка рис. 4.4, при наближенні значення

коефіцієнта кореляції між сусідніми відліками шуму до $R \approx 0,7$, щоб підтримувати ймовірність вірної оцінки частоти сигналу на рівні $P(D) = 0,9$ потрібно збільшувати потужність сигналу.

Метод одноразової ЧПК здатний знизити необхідну для забезпечення ймовірності $P(D) = 0,9$ вірної оцінки частоти сигналу відношення сигнал/шум за потужністю b при великих значеннях R . Полягає цей метод в тому, що БПФ піддається послідовність $\dot{x}'(l)$, отримана з прийнятої послідовності $\dot{x}(l)$ за допомогою наступного перетворення [64, 67, 79, 80]:

$$\dot{x}'(l) = \dot{x}(l) - \dot{x}(l + 1), l = \overline{0, \dots, N - 1}. \quad (4.38)$$

4.2.2.1 Визначення порога рішення. Базис ДЕФ. Метод ЧПК. При деяких, досить великих, значних R наступні один за одним відліки шуму $\dot{\omega}_M(l)$ будуть мало відрізнятися один від одного, відповідно, різниця між ними буде прагнути до нуля. Тому метод ЧПК буде знижувати вплив адитивного шуму на форму сигналу. Чистий же сигнал $\dot{s}_g(l)$, підданий ЧПК, буде зберігати свою форму, змінюватися буде лише амплітуда, оцінки якої дана робота не стосується.

Розглянемо послідовність $\dot{\omega}'_M(l)$, отриману із $\dot{\omega}_M(l)$ методом ЧПК:

$$\dot{\omega}'_M(l) = \dot{\omega}_M(l) - \dot{\omega}_M(l + 1).$$

Знайдемо ψ' – дисперсію елементів отриманої послідовності:

$$\psi' = \left\langle \left(\dot{\omega}'_M(l) \right)^2 \right\rangle;$$

$$\psi' = \left\langle \left(\dot{\omega}_M(l) - \dot{\omega}_M(l + 1) \right)^2 \right\rangle;$$

$$\psi' = \langle \dot{\omega}_M^2(l) - 2\dot{\omega}_M(l)\dot{\omega}_M(l + 1) + \dot{\omega}_M^2(l + 1) \rangle;$$

$$\psi' = \psi(1 - 2R + 1);$$

$$\psi' = 2\psi(1 - R).$$

Враховуючи, що в даній роботі $\psi = 1$ знаходимо остаточний вираз для ψ' :

$$\psi' = 2(1 - R). \quad (4.39)$$

Тепер знайдемо R'_1 — коефіцієнт кореляції між сусідніми відліками послідовності $\dot{\omega}'_M(l)$:

$$R'_1 = \frac{\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle}{\psi'};$$

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle = \langle (\dot{\omega}_M(l) - \dot{\omega}_M(l+1))(\dot{\omega}_M(l+1) - \dot{\omega}_M(l+2)) \rangle;$$

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle = \langle \dot{\omega}_M(l)\dot{\omega}_M(l+1) - \dot{\omega}_M(l)\dot{\omega}_M(l+2) - \dot{\omega}_M^2(l+1) + \dot{\omega}_M(l+1)\dot{\omega}_M(l+2) \rangle$$

;

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle = \psi \langle R - R^2 - 1 + R \rangle;$$

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle = -\psi(1 - R)^2.$$

Враховуючи, що $\psi = 1$, і (4.39), приходимо до остаточного вираження для

$$R'_1:$$

$$R'_1 = \frac{R-1}{2}.$$

Знайдемо R'_2 коефіцієнт кореляції між відліками шуму $\dot{\omega}'_M(l)$, віддаленими одна від одної на два періоди дискретизації: періода дискретизації:

$$R'_2 = \frac{\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+2) \rangle}{\psi'};$$

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+2) \rangle = \langle (\dot{\omega}_M(l) - \dot{\omega}_M(l+1))(\dot{\omega}_M(l+2) - \dot{\omega}_M(l+3)) \rangle;$$

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+1) \rangle =$$

$$= \langle \dot{\omega}_M(l)\dot{\omega}_M(l+2) - \dot{\omega}_M(l)\dot{\omega}_M(l+3) - \dot{\omega}_M(l+1)\dot{\omega}_M(l+2) + \dot{\omega}_M(l+1)\dot{\omega}_M(l+3) \rangle$$

;

$$\langle \dot{\omega}'_M(l)\dot{\omega}'_M(l+2) \rangle = \psi \langle R^2 - R^3 - R + R^2 \rangle;$$

$$R'_2 = R \frac{R-1}{2}.$$

Остаточний вираз для коефіцієнта кореляції R'_d між відліками шуму, віддаленими один від одного на довільне число d періодів дискретизації, виглядає наступним чином:

$$R'_d = R^{d-1} \frac{R-1}{2}. \quad (4.40)$$

Відповідно, ψ'_k – дисперсія квадратури k -го спектрального коефіцієнта, отриманого при БПФ в базисі ДЕФ послідовності $\dot{\omega}'_M(l)$, буде дорівнювати

$$\psi'_k = 2(1-R) \left(N - (1-R) \sum_{d=0}^{N-1} (N-d) R^{d-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} kd\right) \right) \quad (4.41)$$

Граничні значення визначаються за аналогією із (4.35):

$$V'_k = \sqrt{-2\psi'_k \ln\left(1 - \sqrt[N]{1 - P(F)}\right)}. \quad (4.42)$$

4.2.2.2 Алгоритм оцінки частоти. Базис ДЕФ. Метод ЧПК. Тепер розглянемо застосування ЧПК до чистого сигналу $\dot{s}_g(l)$:

$$\dot{s}'_g(l) = \dot{s}_g(l) - \dot{s}_g(l+1), \quad l = \overline{0, \dots, N-1}.$$

$$\dot{s}'_g(l) = U e^{j\frac{2\pi}{N}gl} - U e^{j\frac{2\pi}{N}g(l+1)};$$

$$\dot{s}'_g(l) = U e^{j\frac{2\pi}{N}gl} \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{N}g}\right).$$

Позначимо через \dot{c} коефіцієнт, що пов'язує $\dot{s}'_g(l)$ і $\dot{s}_g(l)$:

$$\dot{c} = 1 - e^{j\frac{2\pi}{N}g}.$$

\dot{c} не залежить від дискретного часу l , будучи функцією лише нормованої частоти g . Це підтверджує твердження про те, що ЧПК не змінює форми сигналу $\dot{s}_g(l)$, впливаючи лише на його амплітуду. Визначимо цей вплив.

$$|\dot{c}| = \left|1 - e^{j\frac{2\pi}{N}g}\right|;$$

$$|\dot{c}| = \left|1 - \cos\frac{2\pi}{N}g - j \sin\frac{2\pi}{N}g\right|;$$

$$|\dot{c}| = \sqrt{\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}g\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{N}g};$$

$$|\dot{c}| = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}g\right)}. \quad (4.43)$$

Формула (4.16) для випадку ЧПК набуде наступного вигляду:

$$u'_G(g) = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N} g\right) \left| \sum_{l=0}^{N-1} f_G(l) \dot{s}_g(l) \right|}. \quad (4.44)$$

Враховуючи (4.42) і (4.44) можна застосувати формулу (4.37) для середньої ймовірності правильної оцінки нормованої частоти g сигналу $\dot{s}_g(l)$ за умови, що вона лежить в межах (4.13), до випадку ЧПК:

$$\begin{aligned} & P(D|g \in (G; G + 1)) = \\ & = 1 - \\ & \frac{1}{\psi'_G \psi'_{G+1}} \int_G^{G+1} \left(\int_0^{V'_G} \tau e^{-\frac{\tau^2 + (u'_G(g))^2}{2\psi'_G}} I_0\left(\frac{\tau u'_G(g)}{\psi'_G}\right) d\tau \right) \left(\int_0^{V'_{G+1}} \tau e^{-\frac{\tau^2 + (u'_{G+1}(g))^2}{2\psi'_{G+1}}} I_0\left(\frac{\tau u'_{G+1}(g)}{\psi'_{G+1}}\right) d\tau \right) \\ & (4.45) \end{aligned}$$

З урахуванням (4.45) формула (4.15) для визначення середньої ймовірності вірної оцінки нормованої частоти сигналу залишається вірною і для випадку ЧПК:

$$P(D) = \frac{1}{N} \sum_{G=0}^{N-1} P(D|g \in (G; G + 1)).$$

Побудуємо графіки залежності відношення сигнал/шум при потужності b , яке забезпечує можливість виявлення сигналу, рівну $P(D) = 0,9$, при ймовірності помилкової тривоги, що не перевищує $P(F) = 0,001$, від коефіцієнта кореляції R між сусідніми відліками шуму $\dot{\omega}_M(l)$ (рис. 4.6, 4.7).

Якщо накласти графік рис. 4.4 на графік рис. 4.6, а графік рис. 4.5 на графік рис. 4.7, то можна побачити, при яких значеннях R більш ефективним є метод ЧПК (рис. 4.8, 4.9). Крапку R_C на осі R назовемо точкою комутації режиму роботи вирішального пристрою. Вона вказує на значенні коефіцієнта кореляції R , при перевищенні якого стає вигідним застосування методу ЧПК для оцінки частоти сигналу.

З графіків (рис. 4.8, 4.9) видно, що розташування точки комутації залежить від розмірності БПФ. Так, при $N = 16 R_C \approx 0,59$, при $N = 64 R_C \approx 0,74$.

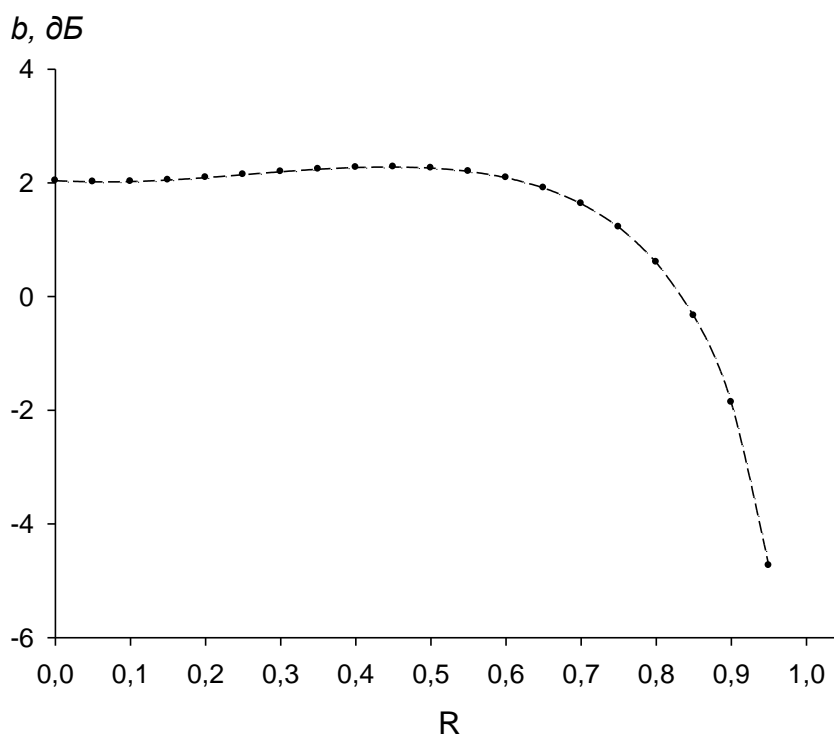


Рис. 4.6 – Графік залежності необхідного відношення сигнал/шум за потужністю від коефіцієнта кореляції, базис ДЕФ, $N = 16$, ЧПК

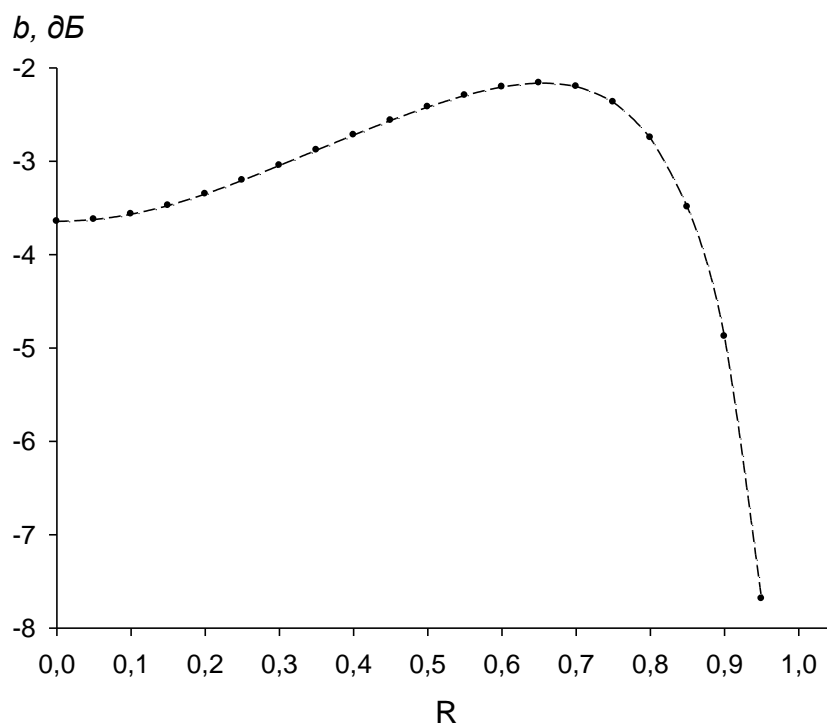


Рис. 4.7 – Графік залежності необхідного відношення сигнал/шум за потужністю від коефіцієнта кореляції, базис ДЕФ, $N = 64$, ЧПК

Експеримент. Для перевірки правильності отриманих оцінок точок комутації було проведено статистичний експеримент. За графіками (рис. 4.8, 4.9) були знайдені точки комутації R_C , а також значення відношення

сигнал/шум за потужністю для випадків $N = 16$ і $N = 64$.

Для шістнадцятиточкового БПФ коефіцієнт кореляції R був обраний $R_C = 0,59$, відношення сигнал/шум за потужністю було встановлено згідно з графіком (рис.4.8) $b = 2,1$ дБ. Обсяг експерименту дорівнював 10^6 . Правильна оцінка частоти сигналу при використанні методу без ЧПК сталася 900704 разів, при ЧПК – 898753 разів. Тобто в обох випадках ймовірність правильної оцінки склала $P(D) \approx 0,9$, що підтверджує правильність вибору точки комутації.

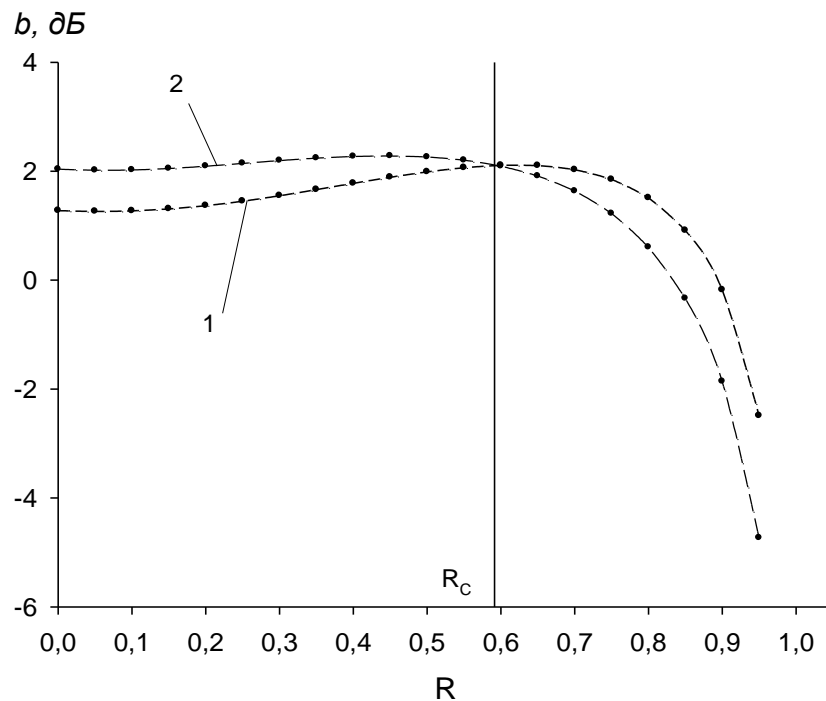


Рис. 4.8 – Пошук точки комутації R_C , базис ДЕФ, $N = 16$ (1 – оцінка без ЧПК, 2 – оцінка з ЧПК)

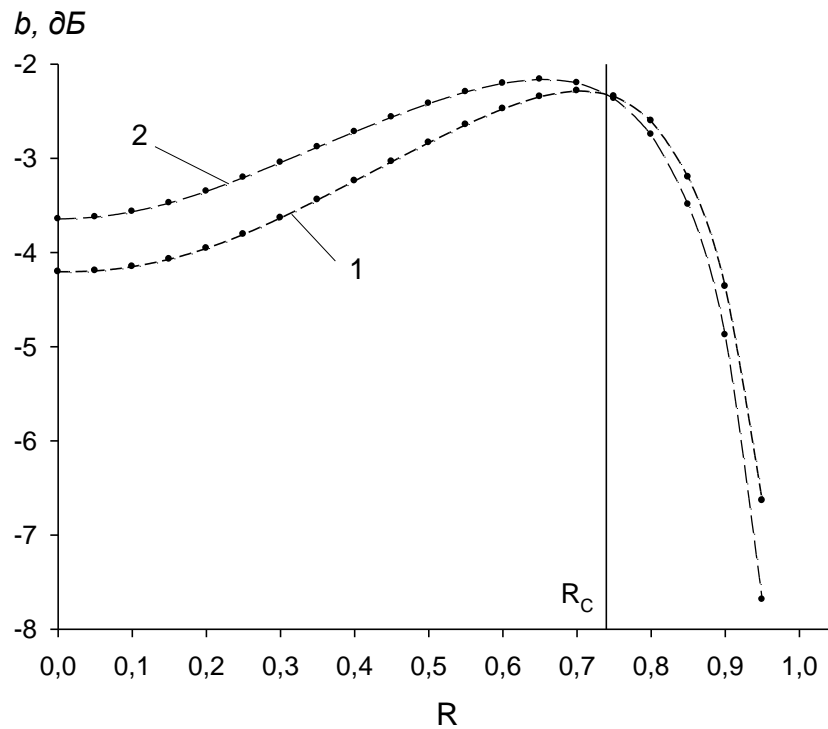


Рис. 4.9 – Пошук точки комутації R_C , базис ДЕФ, $N = 64$ (1 – оцінка без ЧПК, 2 – оцінка з ЧПК)

При $N = 64$ коефіцієнт кореляції R був встановлений $R_C = 0,74$, відношення сигнал/шум за потужності $b = -2,3$ дБ. Правильна оцінка частоти сигналу сталася без використання методу ЧПК 901270 разів, при ЧПК – 900686 разів при обсязі експерименту 10^6 . А це також відповідає ймовірності вірної оцінки частоти $P(D) \approx 0,9$ і підтверджує правильність оцінки точки комутації.

4.2.3 Оцінка частоти. Базис ВКФ

Для визначення меж рішення обчислимо дисперсії квадратурних компонентів спектральних коефіцієнтів при БПФ однозв'язного марківського гауссівського шуму в базисі ДЕФ.

4.2.3.1 Визначення порога рішення. Базис ВКФ. При пошуку дисперсій ψ_k квадратур $A(k)$ спектральних коефіцієнтів $\hat{\Omega}(k)$, які виходять при БПФ послідовності $\omega_M(l)$ в базисі ВКФ, звернемося до тієї ж методики, яка була використана при розгляді базису ДЕФ.

Як було зазначено в розділі 2, аналітично базис функцій ВКФ-Кронекера з параметрами m і n описується виразом

$$had_k(l) = W^{\sum_{i=0}^{n-1} k_z l_z}, \quad (4.46)$$

де k_z і l_z – z -е розрядні коефіцієнти m -ічних уявлень чисел k і l відповідно, $W = e^{-j\frac{2\pi}{m}}$ – фазообертаючий множник.

За допомогою формули Ейлера перетворимо вираз (4.46). Отримаємо

$$had_k(l) = c_{kl} - s_{kl}, \quad (4.47)$$

де

$$s_{kl} = \sin\left(\frac{2\pi}{m} \sum_{z=0}^{n-1} k_z l_z\right) c_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi}{m} \sum_{z=0}^{n-1} k_z l_z\right), \quad (4.48)$$

Беручи до уваги ці значення коефіцієнтів c_{kl} і s_{kl} , можна стверджувати, що формули (4.25) – (4.30) справедливі і для випадку ШПФ в ВКФ.

Підставляючи (4.30) в (4.28) з урахуванням (4.23), беручи до уваги, що $\psi = 1$ отримуємо остаточну формулу для обчислення дисперсії ψ_k в базисі ВКФ:

$$\psi_k = \sum_{i,j=0}^{N-1} R^{|i-j|} \cos\left(\frac{2\pi}{m} (\sum_{z=0}^{n-1} k_z i_z - \sum_{z=0}^{n-1} k_z j_z)\right). \quad (4.49)$$

Уявімо вираз (4.49) у формі, аналогічній (4.34)

$$\psi_k = \psi(N + 2 \sum_{d=0}^{N-1} \beta_{kd} R^d). \quad (4.50)$$

Вагові коефіцієнти β_{kd} залежать від параметрів базової системи ВКФ і можуть бути легко обчислені.

Граничні значення амплітуд спектральних коефіцієнтів можуть бути знайдені за допомогою формули (4.35):

$$V_k = \sqrt{-2\psi_k \ln\left(1 - \sqrt[N]{1 - P(F)}\right)}.$$

4.2.3.2 Алгоритм оцінки частоти. базис ВКФ. З причин, що описані в підрозділі 4.1.3, залежність необхідного відношення сигнал/шум при потужності b від коефіцієнта кореляції R між сусідніми відліками шуму $\omega_M(l)$ буде знайдена експериментально. На рис. 4.10 представлені графіки залежності необхідного відношення сигнал/шум при потужності b , яке забезпечить можливість правильної оцінки нормованої частоти сигналу рівну $P(D) = 0,9$ при ймовірності помилкової тривоги, що не перевищує

$P(F) = 0,001$, від коефіцієнта кореляції R марківського гауссівського шуму $\omega_M(l)$ при обробці сигналу за допомогою шістнадцятиточкового БПФ в базисі ВКФ. На. рис 4.11 розглянуто випадок з об'ємом вибірки $N = 64$.

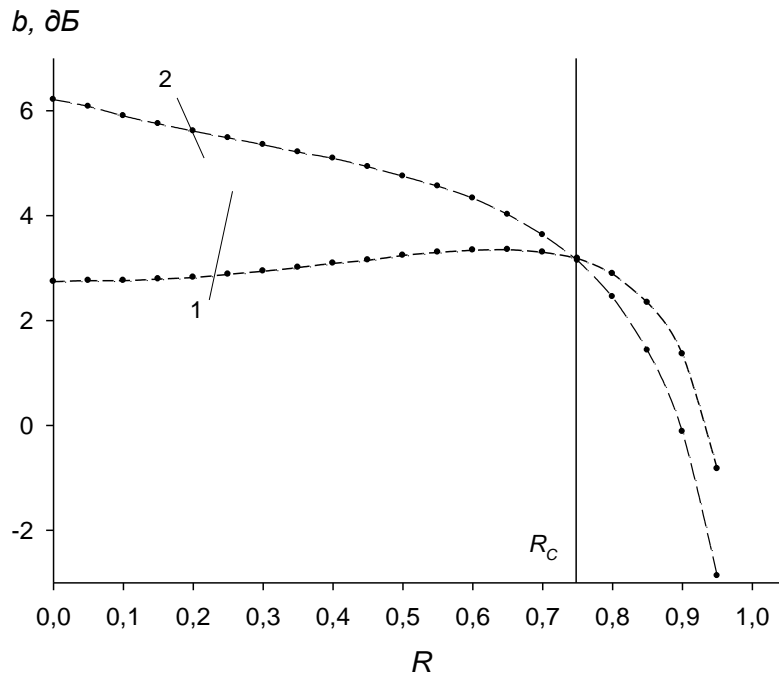


Рис. 4.10 – Пошук точки комутації R_C , базис ВКФ, $N = 16$ (1 - оцінка без ЧПК, 2 - оцінка з ЧПК)

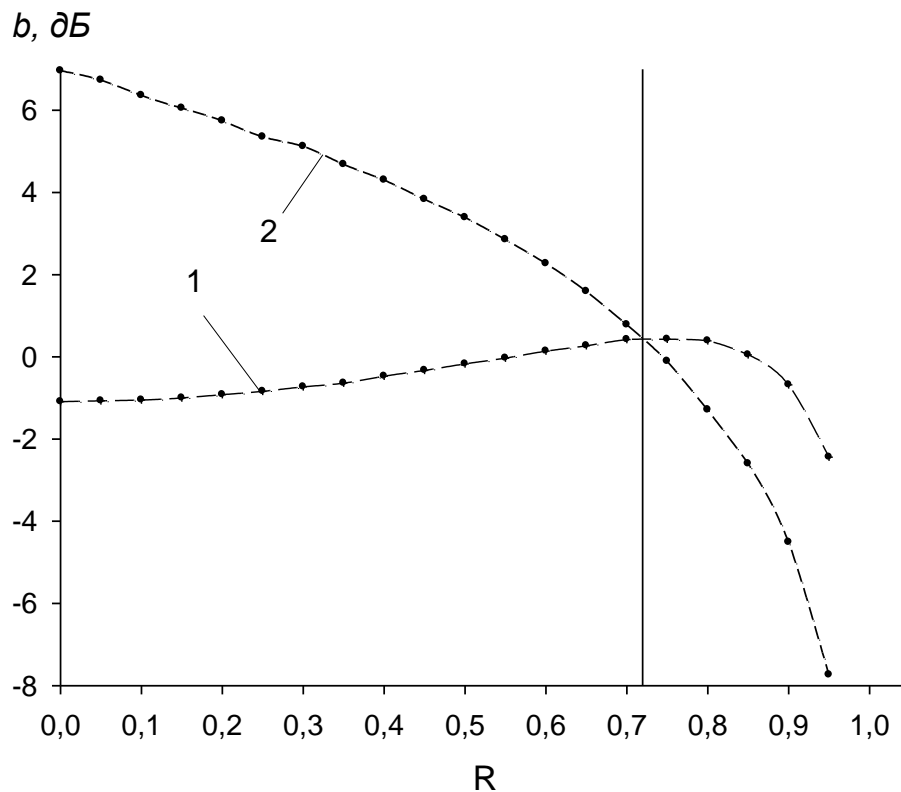


Рис. 4.11 – Пошук точки комутації R_C , базис ВКФ, $N = 64$ (1 – оцінка без ЧПК, 2 – оцінка з ЧПК)

Для пошуку кожної точки графіків (рис. 4.10, 4.11) були побудовані графіки залежності ймовірності $P(D)$ правильної оцінки сигналу від відношення сигнал/шум потужності b , аналогічні графіку (рис. 4.2).

Аналізуючи графіки (рис. 4.10, 4.11), приходимо до висновку про те, що значення коефіцієнта кореляції R , при якому найвигідніше здійснювати перемикання між методами оцінки нормованої частоти сигналу з ЧПК і без ЧПК дорівнюватиме $R_C \approx 0,75$ при $N = 16$ і $R_C \approx 0,72$ при $N = 64$.

Експеримент. Для перевірки отриманих значень точок комутації режимів був проведений експеримент. Для обсягу вибірки $N = 16$ відповідно до графіка (рис. 4.10) коефіцієнт кореляції між сусідніми відліками шуму був обраний рівним $R_C = 0,75$, а відношення сигнал/шум потужності дорівнювало $b = 3,18$ дБ. При прийомі без методу ЧПК правильна оцінка нормованої частоти сигналу сталася 900416 разів, з методом ЧПК – 900967 разів. Обсяг експерименту в обох випадках становив 10^6 . Тобто в обох випадках ймовірність вірної оцінки склала величину $P(D) \approx 0,9$, що підтверджує вірність вибору точки комутації режиму.

При $N = 64$ коефіцієнт кореляції був обраний згідно з графіком (рис. 4.11) $R_C = 0,72$, відношення сигнал/шум потужності $b = 0,44$ дБ. Без ЧПК відбулося 900471 вірних оцінок, з ЧПК – 900108 при обсязі експерименту, рівному 10^6 . А це також відповідає ймовірності правильної оцінки $P(D) \approx 0,9$ і підтверджує правильність вибору точки комутації режиму.

4.3 Висновки по розділу

Показано, що базиси ВКФ можуть бути використані для оцінки параметрів дискретно-експоненціального сигналу.

Також показано, що базиси Уолша не можуть бути використані для оцінки частоти сигналу способом оцінки, який передбачає те, що аналіз

перевищив поріг вирішення відліку дискретного спектра прийнятої послідовності.

Запропоновано алгоритм оцінки нормованої частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на тлі адитивного шуму, який може бути описаний за допомогою однозв'язного марківського гауссівського процесу, в базисах ВКФ.

Для запропонованого алгоритму знайдені вирази для визначення меж рішення, які забезпечують вірогідність помилкової тривоги, що не перевищує задане максимально допустиме значення.

Експериментально підтверджена вірність запропонованих алгоритмів оцінки.

ВИСНОВКИ

У процесі теоретичних і експериментальних досліджень у дисертаційній роботі отримано наступні науково-практичні результати.

Головним результатом проведеного наукового дослідження стала розробка методу оцінки частоти доплерівсько – імпульсного сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисах Віленкіна-Крестенсона функцій.

Доведено, що оцінка частоти зашумленого сигналу здійснюється на підставі перевищення порогового значення амплітудою одного або декількох спектральних коефіцієнтів.

1. Проведений аналіз існуючих методів обробки інформації, що передається доплерівсько - імпульсним сигналом показав що існуючі методи оцінки частоти вхідного сигналу доплерівським вимірювачем швидкості мають ряд недоліків та невідповідностей.

До таких в роботі віднесено: наявність перешкод, що впливають на кількість переходу частоти гармонійного сигналу через «0»; вузька смуга прийому вхідного сигналу при використанні частотних та амплітудних детекторів; при спектральному аналізі широкосмугового сигналу перешкоди приводять до перерозподілу енергії між спектральними коефіцієнтами та до зміщення центру ваги енергетичного спектру.

Відмічено, що загальним завданням оцінки параметрів сигналу є оцінка амплітуди, фази та частоти сигналу на фоні дії перешкод та завад

2. Розроблено метод. формування дочірніх симетричних базисних систем. Даний метод дозволяє за рахунок формування повного ансамблю забезпечити більше чим в три рази підвищення швидкодії оцінки частоти вхідного сигналу при здійсненні операції ШПФ на основі базису ВКФ в порівнянні з базисом ДЕФ.

3. Удосконалений в роботі метод обчислення значень порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марківського

шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, дозволяє забезпечити необхідні імовірнісні характеристики оцінки частоти доплерівсько – імпульсного сигналу при заданих значення співвідношень сигнал/шум.

Встановлено, що базиси ВКФ для досягнення тієї ж ймовірності вірної оцінки частоти, що і базиси ДЕФ, вимагають більшого на 2 – 3 дБ відношення сигнал/шум, ніж базиси ДЕФ.

4. Представлений в роботі метод індикаторних матриць за рахунок виключення процедур факторизації матриць ВКФ і Уолша при синтезі алгоритмів ШПФ, дозволяє синтезувати повну безліч базисів ВКФ (в тому числі і базисів Уолша) із заданими параметрами. Це обґрунтовує успішну заміну базису ДЕФ базисом ВКФ, коли є можливість підвищити потужність зондуючого випромінювання. При цьому значно зростає швидкість обробки радіолокаційних даних.

Для пошуку порогових значень, що забезпечують допустиму ймовірність помилкової тривоги був розроблений метод оцінки дисперсій спектральних коефіцієнтів послідовності, що представляє собою шум. Для моделювання шуму було використано однозв'язний марківський ланцюг нормальних випадкових величин із заданою дисперсією.

Отримані в дисертаційні роботи результати носять самостійне, вагоме значення і можуть бути використані при модернізації існуючих та в процесі розробки, проектування будівництва і експлуатації нових радіолокаційних систем, заснованих на використанні доплерівсько - імпульсних сигналів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шамшур В.И. Радиолокация. — М.: Госэнергоиздат, 1949. — 82 с.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции Т.1. Перевод с английского. — М.: Советское радио, 1972 г. — 744 с.
3. Мановцев А.П. Основы теории радиотелеметрии. М.: Энергия, 1973. — 354 с.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.— М.: Высшая школа, 1983. — 448 с.
5. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986 г. – 512 с.
7. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учеб. пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 1992. — 304 с.
8. Садомовский А.С. Радиосистемы передачи информации: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2001 г. – 104 с.
9. Richrd G. Lyons Understanding Digital Signal Processing, 2rd Edition. - Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2004. - 688 p.
10. Гришин Ю.П., Ипатов В.П., Казаринов Ю.М. и др. Радиотехнические системы. — М.: Высшая школа, 1990. — 496 с.
11. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math., 1923, v. 45, pp. 5 -24.
12. Paley R. E., Zygmund A., On some series of functions // Proc. of the Camb. Phil. Soc, 1930, №26, pp. 337—357
13. Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортонормальных систем // Известия Академии наук СССР, 1947, №11, с. 363 - 400.
14. Виленкин Н. Я. К теории лакунарных ортогональных систем // Известия Академии наук СССР, 1949, №13, с. 245 - 252.
15. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5. No. 1. P. 17-31.

16. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // *Math. Comput.*, 1965, v. 19, pp. 297–301.
17. Cooley J. W., Lewis P. A.; Welch P. D. Historical notes on the fast Fourier transform // *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 1967, v.15 (2), pp. 76–79.
18. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Перевод с английского. – М.: Мир, 1968 г. – 276 с.
19. Cooley J. W., Lewis P. A.; Welch P. D. The Fast Fourier Transform and its Applications // *IEEE Trans on Education*, 1969, v. 12, pp. 28-34.
20. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. Перевод с английского. – М.: Физматгиз, 1963 г. – 264 с.
21. А. Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Часний алгоритм упорядкування базисних функцій Уолша». Вісник Національного Авіаційного Університету, № 2(1), С. 173–178, 1999. <https://doi.org/10.18372/2306-1472.2.8985>
22. А.Я. Білецький, Швець В.А., В.В. Клобуков, «Дослідження базисів Виленкина-Крестенсона», Актуальні проблеми автоматичних та інформаційних технологій: збірник наукових праць. Дніпропетровськ: «Навчальна книга», Том 3. С. 74-78, 2000.
23. А.Я. Білецький, Шутко В.О., В.В. Клобуков, «Синтез та аналіз трикутно-симетричних функцій», Актуальні проблеми автоматичних та інформаційних технологій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: «Навчальна книга», Том 3. С. 82-89, 2000.
24. Логинов В.П. Функции Уолша и области их применения (обзор) // *Зарубежная радиоэлектроника*, 1973, №4.
25. Мановцев А.П. Оптимальные базисы в задачах представления и фильтрации сообщений // *Радиотехника*, 1975, №7, с. 27 - 29.
26. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. — М.: Советское радио, 1975. —208 с.
27. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика. — М.: Наука, 1983. — 144 с.
28. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. — Новосибирск: Наука, 1983. — 233 с.

29. Воеводин В.В. Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
30. Белецкий А.Я., Белецкий А.А., Белецкий Е.А. Преобразования Грея. Т.2. — К.: Книжное издательство НАУ, 2007. — 644 с.
31. Калмыков И.А. Обобщённое дискретное преобразование Фурье для колец неприводимых полиномов // Успехи современного естествознания, 2007, №5
32. Тараканов А. В. Оценка возможностей по разрешению радиолокационных сигналов классическими и «современными» методами спектрального оценивания // Всероссийская научно-техническая конференция "Современные проблемы проектирования производства и эксплуатации радиотехнических систем — Ульяновск: УГТУ, 2008.
33. Білецький А.Я., Білецький О.А., Кучер О.Г. Синтез симетричних матриць Уолша по методу спрямованої перестановки базисних функцій // Вісник НАУ, 2001, №3, с. 141 - 146.
34. Белецкий А.Я. Синтез и анализ системы базисных функций Уолша-Кули // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. — Д: ДНУ, 2002, т. 6. — 12 с.
35. Белецкий А.Я. Базисные системы дискретных экспоненциальных функций // Киберн. и вычисл. техника, 2003, вып. 142, с. 45 - 62.
36. Белецкий А.Я. Структурированные коды Грея : материал технической информации // Успехи современной радиоэлектроники, 2003, №11, с. 3-22.
37. Белецкий А.Я. Синтез симметрических систем Уолша // Киберн. и вычисл. техника, 2003, вып. 141, с. 50 - 67.
38. V. Klobukov, A. Biletsky, «Comparative analysis of the computational efficiency of the fast fourier transform in the discrete exponential functions and vilenkin-crestenson functions bases», multidisciplinary international magazine «Věda a perspektivy», No 1(1), pp. 244 – 251, 2021. DOI: [https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-1\(1\)](https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-1(1)).
39. В. Клобуков, А. Білецький, А. Миколушко «Деякі аспекти синтезу базисних систем віленкіна - крестенсона функцій», multidisciplinary

international magazine «Věda a perspektivy», No 2(2), pp. 146 – 155, 2021.
DOI: [https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-2\(2\)](https://doi.org/10.52058/2695-1584-2021-2(2))..

40. Білецький А.Я., Дем'яник Д.С. Програмний синтез індикаторних матриць для систем Віленкіна-крестенсона функцій // Наукоємні технології, 2010, №1 (5), с. 43 – 46.

41. Plotkin E.I., Roytman L.M., Swamy M.N.S. Estimation of an initial phase over extremely short record-length of a sinewave signal // IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, 1985, v. IM-34, No. 4, p. 624-629.

42. Nazarov L.E. Discrete multiplicative signals and their recognition algorithms, based on Vilenkin-Krestenson functions spectral techniques // The 3rd International Symposium on Signals, Systems, and Electronics - San Francisco, 1995. — pp. 571 - 572

43. Good I.J. The interaction algorithm and practical Fourier analysis // J. Royal Stat. Soc., 1958, Vol. B-20, № 2, pp. 361 - 372.

44. Малозёмов В.Н., Третьяков А.А. Новый подход к алгоритму Кули-Тьюки // Вестн. СПбГУ, 1997, сер. 1, вып. 3 (№15), с. 57 - 60.

45. Malozemov V. N., Masharsky S. M. Haar spectra of discrete signals // Abstracts of the 2nd Int. Conf. "Tools for Mathematical Modelling", 1999, pp. 86-87.

46. Malozemov V. N., Masharsky S. M. Adaptive signal processing based on discrete Vilenkin-Chrestenson transform // Proc. Int. Conf. "Neural Networks and Artificial Intelligence", 2001. V.IW-Zft .

47. А. Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Исследование новых способов упорядочивания функций Уолша». XVIII звітна науково-технічна конференція КМУЦА, С.187-188, 1998.

48. А. Я. Белецкий, Швец В.А., В.В. Клобуков, «Модификация базиса вещественно-мнимых функций (ВМФ) с целью повышения информативности». XVIII звітна науково-технічна конференція КМУЦА, С. 92-93, 1998.

49. Машарский С. М. Быстрое преобразование Виленикина-Крестенсона на основе факторизации Гуда // Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 2002, т. 42, № 6, с. 784–790.

50. Агиевич С.Н. Сплайн-Виленикина-Крестенсона функции в

представлении сигналов // Научное прибор., 2002, том 12, №1, с. 79-89

51. Агиевич С.Н., Дворников С.В., Гусельников А.С. Описание сигналов в базисах функций сплайн-Виленкина-Крестенсона // Контроль. Диагностика, 2009, №3, с. 48 - 54.

52. Агиевич С. Н., В. Л. Беспалов. Использование функций сплайн-Виленкина-Крестенсона для построения аналитических моделей радиосигналов // Информационно-управляющие системы. - 2007. - № 3. - С. 15-22

53. Алексеев А.А., Агиевич С.Н., Желудев В.А. Применение локальных сплайнов для цифровой обработки частотно-временных функций плотности распределения сигнальной энергии // Радиотехника и радиоэлектроника, 2000, № 3, с. 296–311.

54. Агиевич С.Н., Смирнов П.Л., Желудев В.А., Красильников С.Н., Хохленко Ю.Л. Способ оценивания несущей частоты и устройство для его осуществления. Патент 2100812 РФ // Б.И. 1997. № 36; Б.И. 1999. № 26. 104 с.

55. Фарков Ю.А. Ряды Фурье и основы вейвлет-анализа. Учебное пособие. — М.: РГГРУ, 2007. — 111 с.

56. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки, 2007, т. 82:6, с. 934–952.

57. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд.2, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 352 с.

58. Farkov Yu. A. On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory, 2009, vol. 161, iss. 1, pp. 259 - 279.

59. Фарков Ю.А. Биортогональные всплески на группах Виленкина // Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа. Сборник статей, 2009, №265, с. 110–124.

60. Фарков Ю.А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина-Крестенсона // Математические заметки, 2011, т.89, с. 914 - 928.

61. Садыхов, Р. Х. Алгоритмы и вычислительные структуры генерирования стационарных случайных процессов на основе аппарата функций Виленкина-Крестенсона. - Минск. : ИТК, 1990.-24 с.

62. Шустиков О.Е. Оптимизация базиса при использовании

расширенной системы функций Виленкина-Крестенсона // Научная сессия МИФИ-1999, ч.7, с. 118-119.

63. Щетинин В. И. Связь расширенных p -ичных M -последовательностей с матрицами-системами Виленкина-Крестенсона // Естеств. и техн. науки. 2007, №6, с. 207-210.

64. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Перевод с английского. — М.: Мир, 1978. — 839 с.

65. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1980. — 224 с.

66. Марпл-младший С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1990 г. – 265 с.

67. Вайнштейн Л.А. Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Советское радио, 1960. — 448 с.

68. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960. — 468 с.

69. А.Я. Белецкий, В.В. Клобуков, «Аналитический метод измерения частоты радиолокационного доплеровско-импульсного сигнала». Матеріали II Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2000», Том 1, С. 152-156, 2001.

70. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. - М.: Наука, 1971. - 576 с.

71. Максимов М.В. и др. Защита от помех. — М.: Советское радио, 1976 г. — 496 с.

72. В.В. Клобуков, «Питання підвищення ефективності роботи радіолокаційних комплексів на етапі обробки вхідного сигналу», *Materials of the XII International Scientific and Practical Conference "Modern aspects of modernization of science: status, problems, development trends" (August 7, 2021, Lisbon (Portugal))*, pp. 77-80, 2021.

73. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 264 с.

74. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.

75. M. Fuzik, V. Klobukov, O. Zykov, «Integration technology of hybrid cloud computing infrastructure of the university to perform the tasks of scientific research and education.», *The IV world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University, Vol.1*, pp. 18.50-18.54, 2010.

76. V. Klobukov, O. Zykov, S. Volhonskyi, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, S. Ermak, «Information protection in automated information systems. Definition, threats, approaches and measures to protect information», *The seventh world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University, September 19-21*, pp. 214-218, 2016.

77. V. Klobukov, O. Nechyporuk, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, Y. Nakonechny, «Algorithm of forming the estimating method of total logistic costs based on artificial neural networks», *The seventh world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University, September 19-21*, pp. 114-118, 2016.

78. V. Klobukov, L. Klobukova, S. Dobrovolskyi, Wang Bo, M. Glivenko, «UAV flight mechanics», *The seventh world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University, September 19-21*, pp. 349-354, 2016.

79. V. Klobukov, Wang Bo, Hu Danjuan, «Model Research on Ningbo – CEEC Scientific and Technological Exchange and Cooperation», *The Eighth world congress "Aviation in the XXI-st century" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University*, pp. 179-184, 2018.

80. V. Kharchenko, V. Klobukov, O. Zykov, V. Ryabokon, «Multipurpose intelligent unmanned aircraft system (MIUAS) for detecting and tracking objects using elements of computer vision and artificial intelligence», *The Eighth World Congress "AVIATION IN THE XXI-st CENTURY" – "Safety in Aviation and Space Technologies" National Aviation University October 10-12*, pp. 129-137, 2020.

81. Корчинський А.П., Бідний М.С., В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Синтез и исследование комбинационных устройств». *XLII студентська науково-технічна конференція КМУЦА*, С. 215-217, 1994.

82. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Синтез и исследование триггеров». *XLIII студентська науково-технічна конференція КМУЦА*, С. 175-176, 1995.
83. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Разработка аппаратно-программного комплекса информационной справочной службы аэропорта». *XLIII студентська науково-технічна конференція КМУЦА*, С. 215-217, 1995.
84. Корчинський А.П., Бідний М.С., В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Методы создания и хранения информации в электронном справочнике». *XLII студентська науково-технічна конференція КМУЦА*, С. 215-217, 1995.
85. В.В. Клобуков, С.В. Лобур «Анализ статистических характеристик дельта-модулированного сигнала». *XLV студентська науково-технічна конференція КМУЦА*, С. 165-167, 1997.
86. В.В. Клобуков, С.В. Лобур, Слесарь А.Н. «Електронний довідник по цифрових інтегральних мікросхемах». *Черкаський державний Університет ім. Б. Хмельницького. Всеукраїнська конференція молодих науковців "Інформаційні технології в науці та освіті*, С. 125-129, 1997.
87. В.В. Клобуков, «Метод преобразования координат при обобщенном спектральном анализе радиотехнических сигналов». *Матеріали I Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2000»*, Том 1, С. 221-227, 2000.
88. В.В. Клобуков, О.С. Зиков «Питання створення мультисервісних телекомунікаційних мереж з застосуванням технології пасивних оптичних мереж (Passive optical networks)». *Матеріали VIII Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2007»*, Том 1, С. 453-457, 2007.
89. М.І. Фузік, В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт «Особенности застосування технології радіопередачі даних при побудові конвергентних телекомунікаційних мереж». *Матеріали VIII Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2007»*, Том 1, С. 312-317, 2007.
90. В.В. Клобуков, В.А. Швець, В.А. Рябоконт «Питання захисту інформації в мультисервісних мережах на прикладі технології Voice-Over-IP». *Матеріали II міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2009*, С. 62-63, 2009.

91. В.В. Клобуков, В.А. Швець, В.А. Рябоконт «Побудова розподіленого конвергентного інформаційного простору на базі національної науково-освітньої мережі URAN». *Матеріали III міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2010*, С. 43-44, 2010.

92. В.В. Клобуков, М.І. Фузік, О.С. Зиков «Побудова розподіленої відкритої GRID-інфраструктури ВНЗ для задач наукових досліджень і освіти». *Матеріали III міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2011*, С. 103-104, 2011.

93. В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт, С.О. Ермак, «Дослідження протоколів побудови маршрутів в мережах METRO ETHERNET». *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2011»*, Том 1, С. 5.72-5.76, 2011.

94. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, А.О. Краснопольский, «Управління продуктивністю корпоративних конвергентних мереж». *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2011»*, Том 1, С. 5.66-5.69, 2011.

95. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, С.А. Ермак, «Использование технологии виртуальной локальной сети (VLAN) для коммуникации между LPAR». *Матеріали IV міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні системи та мережні технології» CSNT-2011*, С. 39-40, 2011.

96. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, L.P. Klobukova «Integration virtual desktop infrastructure in the learning Process», *Матеріали V Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології"*, Vol. 1, pp. 156-159, 2012.

97. В.В. Клобуков, В.А. Рябоконт, Ю.В. Максименко, «Віртуалізація робочих станцій на базі програмного забезпечення з відкритим програмним кодом». *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2013»*, Том 1, С. 5.21-5.26 2013.

98. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, С.І. Волхонський, С.О. Ермак, Д.В. Самофалов, «Порівняльний аналіз сучасних інформаційних (технологічних) платформ для створення систем електронного документообігу». *Матеріали X*

Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2013», Том 1, С. 5.75-5.78 2013.

99. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, С.І. Волхонський, С.О. Єрмак, Д.В. Самофалов, «Порівняльний аналіз сучасних інформаційних (технологічних) платформ для створення систем електронного документообігу». *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2013», Том 1, С. 5.75-5.78 2013.*

100. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.А. Рябоконт, Ю.В. Максименко «Технічні аспекти розвитку бездротових широкосмугових мереж передачі даних на базі стандарту IEEE802.11». *Матеріали XI Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2013», Том 1, С. 5.81-5.84, 2013.*

101. V.V. Klobukov, O. Zykov, V.A. Ryabokon, L.Kloukova, «The basic principles of automated systems deployment Inside containers virtualization software in a project», *Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 216-220, 2014.*

102. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, S. Volhonskiy, D. Samofalov, «Basic principles of the e-government», *Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 174-178, 2014.*

103. V.V. Klobukov, V.A. Ryabokon, S. Volhonskiy, D. Samofalov, «Requirements for infrastructure electronic document management systems in higher education institutions», *Матеріали VI Всесвітнього конгресу "Авіація у XXI столітті" - "Безпека в авіації та космічні технології", Vol. 1, pp. 231-234, 2014.*

104. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.С.І. Волхонський, С.О. Єрмак, Д.В. Самофалов, «Електронний документообіг вищого навчального закладу як складова електронного урядування». *Матеріали XII Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2015», Том 1, С. 6.125-6.130., 2015.*

105. В.В. Клобуков, О.С. Зиков, В.А. Рябоконт, «Базовий аналіз стандартів безпроводної передачі даних та перспективи їх розвитку». *Матеріали XII Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2015», Том 1, С. 6.151-6.154, 2015.*

ДОДАТОК А
ПОВНИЙ СПИСОК СИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ УОЛША ВОСЬМОГО
ПОРЯДКУ

Таблиця А.1 – Повний список симетричних систем Уолша при $N = 8$

<i>M</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	1	2	3	5	4	7	6
3	0	1	3	2	6	7	5	4
4	0	1	3	2	7	6	4	5
5	0	2	4	6	1	3	5	7
6	0	2	5	7	3	1	6	4
7	0	2	6	7	1	3	7	5
8	0	2	7	5	3	1	4	6
9	0	3	4	7	5	6	1	2
10	0	3	5	6	7	4	2	1
11	0	3	6	5	4	7	2	1
12	0	3	7	4	6	5	1	2
13	0	4	1	5	2	6	3	7
14	0	4	1	5	3	7	2	6
15	0	4	2	6	1	5	3	7
16	0	4	3	7	2	6	1	5
17	0	5	1	4	6	3	7	2
18	0	5	1	4	7	2	6	3
19	0	5	2	7	4	1	6	3
20	0	5	3	6	7	2	4	1
21	0	6	4	2	1	7	5	3
22	0	6	5	3	2	4	7	1
23	0	6	7	1	2	4	5	3
24	0	6	7	1	3	5	4	2
25	0	7	4	3	5	2	1	6
26	0	7	5	2	6	1	3	4
27	0	7	6	1	4	3	2	5
28	0	7	6	1	5	2	3	4

У табл. А.1 в правій колонці вказані номери симетричних матриць, отриманих за допомогою методу спрямованої перестановки. У рядках вказані номери базисних функцій, які, будучи записані в наведеному порядку, формують відповідну симетричну матрицю.

ДОДАТОК Б
ПЕРЕСТАНОВКА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СИСТЕМИ УОЛША-ПЕЛІ ЗА

ДОПОМОГОЮ КОДІВ ГРЕЯ 212 І 414

Таблиця Б.1 – Системи, породжені складовими кодами Грея 212 і 414.

Номер функції Уолша-Пели k	Контур складеного коду Грея 212			Контур складеного коду Грея 414		
	$M_8^{(9)}$	$M_8^{(10)}$	P	$M_8^{(11)}$	$M_8^{(12)}$	P
0	0	0	0	0	0	0
1	6	7	1	2	5	1
2	5	4	2	5	1	2
3	3	3	3	7	4	3
4	2	5	4	3	7	4
5	4	2	5	1	2	5
6	7	1	6	6	6	6
7	1	6	7	4	3	7

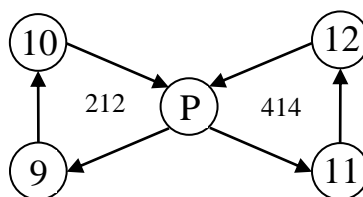


Рисунок Б.1 – Граф контурів 212 і 414 Системи, породжені перестановками Грея 212 і 414:

$$M_8^{(9)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \end{matrix}$$

$$M_8^{(10)} = \begin{matrix} 0 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_8^{(11)} = \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ k \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & l \end{matrix}$$

$$M_8^{(12)} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ДОДАТОК В
ПЕРЕСТАНОВКА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СИСТЕМИ УОЛША-ПЕЛІ ЗА
ДОПОМОГОЮ КОДІВ ГРЕЯ 242 І 424

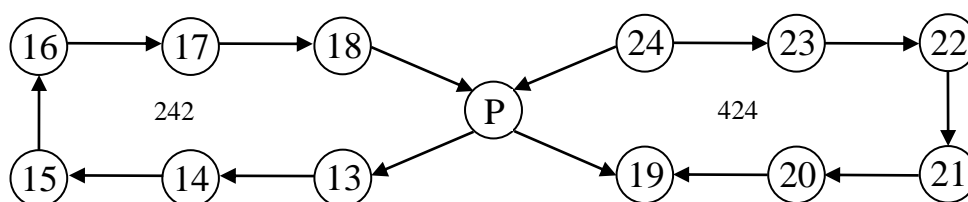


Рисунок В.1 – Граф контурів 242 і 424
Системи, породжені перестановками Грея 242 і 424:

$$M_8^{(13)} = \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ k \end{array}$$

$$M_8^{(14)} = \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} k \end{array}$$

$$M_8^{(15)} = \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ k \end{array}$$

$$M_8^{(16)} = \begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} k \end{array}$$

$$M_8^{(17)} = \begin{array}{c} 0 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7l \end{array}$$

$$M_8^{(18)} = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$M_8^{(19)} = \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7l \end{array}$$

$$M_8^{(20)} = \begin{array}{c} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_8^{(21)} = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \end{array}$$

$$M_8^{(22)} = \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ k \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_8^{(23)} = \begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ k \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ l \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7l \end{array}$$

$$M_8^{(24)} = \begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

ДОДАТОК Г
 ПЕРЕСТАНОВКА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СИСТЕМИ УОЛША-ПЕЛІ ЗА
 ДОПОМОГОЮ КОДІВ ГРЕЯ 22422 І 2425242

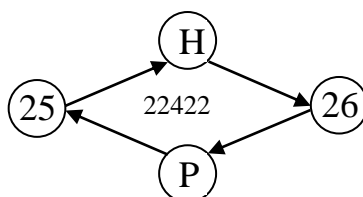


Рисунок Г.1 – Граф контура 22422

Системи, породжені перестановками Грея 22422:

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad l \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 6 \\
 7 \\
 1 \\
 M_8^{(25)} = 3 \\
 5 \\
 4 \\
 2 \\
 k
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad l
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 3 \\
 7 \\
 4 \\
 M_8^{(26)} = 6 \\
 5 \\
 1 \\
 2 \\
 k
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]$$

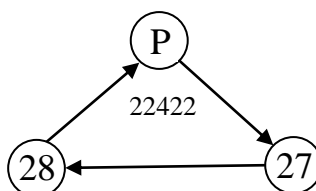


Рисунок 2.5 – Граф контуру 2425242

Системи, породжені перестановками Грея 2425242:

ДОДАТОК Д
ПОВНИЙ ГРАФ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ МАТРИЦЯМИ УОЛША ВОСЬМОГО
ПОРЯДКУ

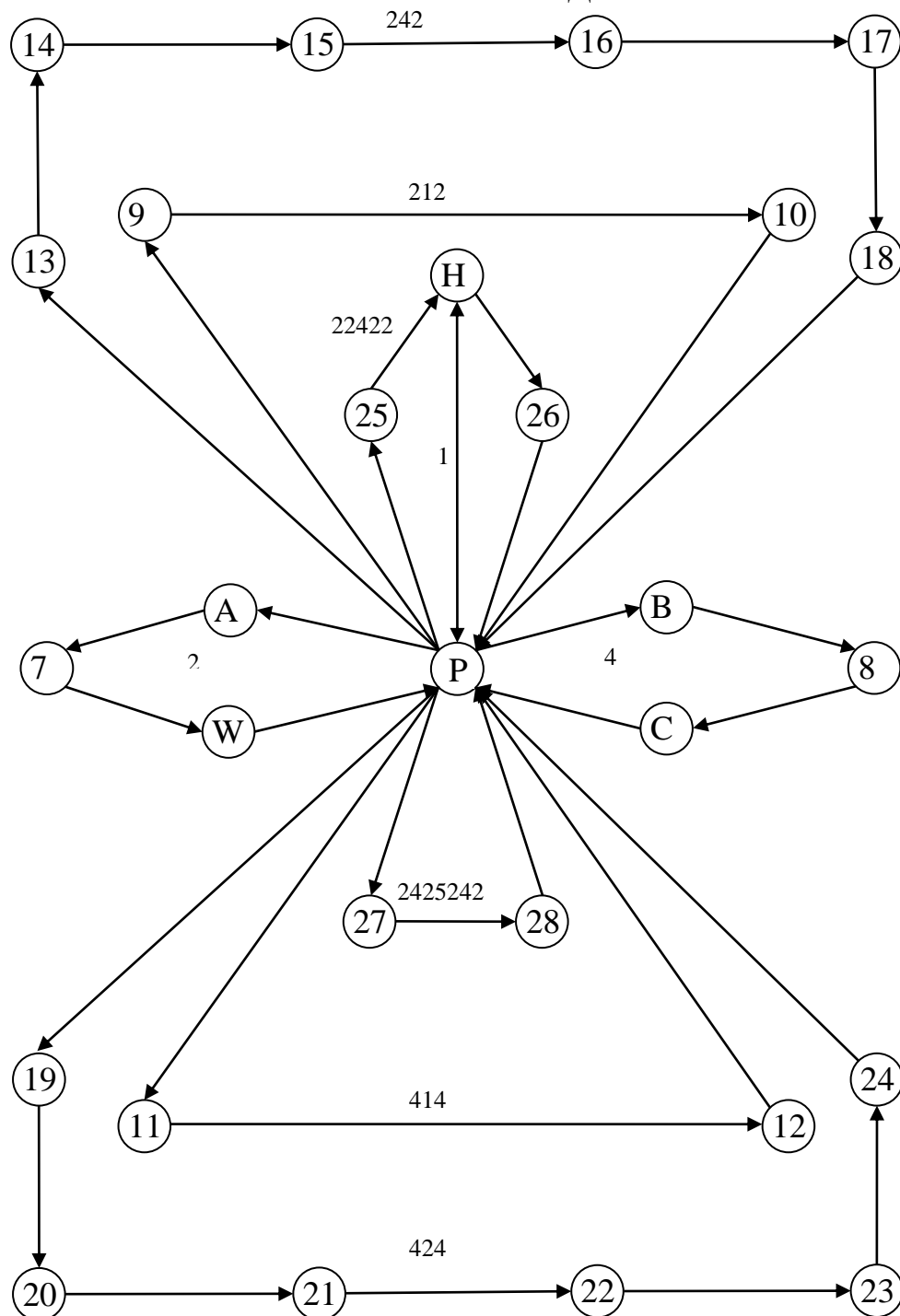


Рисунок Д.1 – Повне сімейство симетричних систем Уолша восьмого порядку

ДОДАТОК Е

АКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ

АКТ впровадження результатів дослідження Клобукова Віталія Віталійовича, що виконані у рамках дисертаційної роботи на тему «Метод підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу»

Цей акт складено на підтвердження того, що результати дисертаційних досліджень щодо розробки алгоритму оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона, впроваджено в діяльність державного підприємства «Завод 410 ЦА».

Проведено аналізування результатів оцінки частоти вхідного сигналу доплерівського вимірювача швидкості за допомогою розроблених Клобуковим В.В алгоритмів оцінки частоти доплерівського сигналу методом спектрального аналізу в базисах ВКФ.

В результаті аналізування встановлено що базиси ВКФ для досягнення тієї ж ймовірності вірної оцінки частоти, що і базиси ДЕФ, вимагають більшого на 2 – 3 дБ відношення сигнал/шум за потужності, ніж базиси ДЕФ. Базиси ВКФ вимагають значно менше машинного часу для здійснення операції ШПФ, ніж базиси ДЕФ. У зв'язку з цим базиси ДЕФ можуть успішно замінити базиси ВКФ, коли є можливість підвищити потужність зондуючого випромінювання. При цьому значно зросте швидкість обробки радіолокаційних даних

Вимірювання проводились на апаратному комплексі, що включав: сигнальний процесор з плаваючою та фіксованою комою TMS320C6657CZHA25, персональний комп'ютер, інтегроване середовище компіляції та налаштування Code Composer Studio v5 компанії-виробника Texas Instruments Incorporated.

Розроблені Клобуковим В.В. методики і створенні на їх основі алгоритми та програми можуть бути використані при удосконаленні алгоритмі обробки вхідних сигналів в ході модернізації доплерівських вимірювачів швидкості та кута зсуву з складу радіоелектронного устаткування літаків.

Виконані дослідження і впровадження виконані на безоплатній основі, без будь-яких фінансових зобов'язань.

Перший заступник Технічного
Директора Головного технолог
державного підприємства «Завод 410 ЦА»

Бушнев В.Л.





Комунальне підприємство Міжнародний аеропорт “Київ” (Жуляни)

Україна, 03036, м. Київ, Повітрофлотський пр. 79, Аеропорт “Київ” (Жуляни), телефон – (380 44) 339-29-44, факс – 243-15-96,
E-Mail: ukkk@airport.kiev.ua, IBAN: UA583004650000000260043011721 в АТ «Державний ощадний банк України»
м. Києва, МФО – 300465, ППН – 011315126653, номер свідоцтва – 200028163, код ЄДРПОУ – 01131514

АКТ

впровадження результатів дослідження

Клобукова Віталія Віталійовича,

що виконані у рамках дисертаційної роботи на тему «Метод підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу»

Розвиток сучасних радіолокаційних комплексів, направлений на підвищенню точності визначення координат і швидкостей повітряних об'єктів, вимагає підвищення продуктивності систем обробки радіолокаційних сигналів. У той же час підвищення кількості та потужності пристроїв, що працюють на високих і надвисоких частотах, створює додаткові перешкоди, що посилюють перешкоди, створювані відбитим сигналом і природними електромагнітними коливаннями. Цей факт, в свою чергу, вимагає посилення перешкодозахищеності радіолокаційних комплексів, що забезпечується не тільки збільшенням потужності інтерференційного випромінювання, удосконаленням апаратної частини радіолокаційних станцій, але і алгоритмами обробки зашумленого сигналу, що сприяє відділенню корисного сигналу від шуму.

Одним з сімейств методів фільтрації корисного сигналу є сімейство алгоритмів, заснованих на аналізі спектра прийнятого сигналу.

Розв'язання вказаного завдання передбачає розробку методу та на його основі алгоритму оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона. В свою чергу розроблений алгоритм вимагає оцінки ефективності цього методу і порівняння його з ефективністю методу, заснованого на швидкому перетворенні Фурє в базисі дискретно-експоненційних функцій.

Результати дисертаційних досліджень щодо розробки «Алгоритму оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу, заснованого на спектральному аналізі в базисі функцій Віленкіна – Крестенсона», найшли впровадження в діяльності Комунального підприємства Міжнародний аеропорт “Київ” (Жуляни).

Технічний директор
КП МА «Київ» (Жуляни)
д.т.н., проф.



А. В. Міщенко

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
Національного авіаційного університету

Є. О. Романенко

« 11 » 06 2021 р.



АКТ

про реалізацію результатів дисертаційної роботи Клобукова Віталія Віталійовича «Метод підвищення ефективності роботи доплерівського вимірювача швидкості на етапі обробки вхідного сигналу» в навчальному процесі Національного авіаційного університету

Комісія у складі: голови комісії – завідувача кафедри засобів захисту інформації факультету кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії Національного авіаційного університету доктора технічних наук, професора Козловського В.В. та членів комісії – професора кафедри засобів захисту інформації доктора технічних наук, доцента Лазаренко С.В., доцента кафедри засобів захисту інформації кандидата технічних наук Мартинюк Г.В. у період з 08 по 11 червня 2021 року провела роботу по встановленню фактичного використання в навчальному процесі на кафедрі засобів захисту інформації факультету кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії Національного авіаційного університету результатів дисертаційної роботи Клобукова Віталія Віталійовича.

На основі поданої дисертаційної роботи та наукових статей комісія встановила, що в навчальному процесі та науковій діяльності Університету реалізовано наступні результати:

- алгоритм формування дочірних симетричних базисних систем, який на відміну від існуючих пов'язує дискретно-експоненційні функції, функцій Уолша і функцій Віленкіна – Крестенсона;
- методика обчислення значень порогів рішення при прийомі сигналу, що приймається на тлі однозв'язного марковського шуму, в базисах ВКФ і ДЕФ, які забезпечують необхідні імовірнісні характеристики оцінки частоти сигналу;
- метод ізоморфного представлення дискретних базисів ВКФ, що дозволив перейти від комплексно-значних компонентів базису до їх модулярних цілочисельних еквівалентів, що істотно спростило як аналіз, так і синтез алгоритмів обробки сигналів в цих базисах;
- метод індикаторних матриць, що дозволяє синтезувати повну безліч базисів ВКФ (в тому числі і базисів Уолша) із заданими параметрами, а також виключити процедуру факторизації матриць ВКФ і Уолша при синтезі алгоритмів ШПФ в цих базисах.

Результати дисертаційної роботи використовуються:

– в рамках науково-дослідної роботи: «Інформаційна та авіаційна безпека об'єктів критичної інфраструктури» (ДР №0119U102297);

– у навчальному процесі кафедри засобів захисту інформації факультету кібербезпеки, комп'ютерної та програмної інженерії Національного авіаційного університету при проведенні лабораторних та практичних робіт згідно з програмою навчальних дисциплін «Спеціальні вимірювання» та «Засоби приймання та обробки сигналів в системах технічного захисту інформації» зі спеціальності 125 «Кібербезпека».

Голова комісії:

Завідувач кафедри

Засобів захисту інформації

д. т. н., професор



В.В. Козловський

Члени комісії:

Професор кафедри

Засобів захисту інформації

д. т. н., доцент



С.В. Лазаренко

Доцент кафедри

Засобів захисту інформації

к. т. н.



Г.В. Мартинюк