

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ АРХІТЕКТУРИ, БУДІВНИЦТВА ТА ДИЗАЙНУ

(назва факультету)

КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ БУДІВНИЦТВА
ТА РЕКОНСТРУКЦІЇ АЕРОПОРТІВ

(повна назва кафедри)

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності та пластичності»

Галузь знань	19	Архітектура та будівництво
Спеціальність:	192	Будівництво та цивільна інженерія
Освітньо-професійна програма:		Промислове і цивільне будівництво

Укладач: д.т.н., доц. Махінько Н.О.

Конспект лекцій розглянутий та схвалений
на засіданні кафедри КТБ та РА

Протокол № __ від «__» _____ 20__ р.

Завідувач кафедри Олександр ЛАПЕНКО

Лекція № 1.1

Тема лекції:

Вступ. Об'єкт вивчення. Основні гіпотези. Модельне середовище. Розрахункова схема.

План лекції

1. Вступ. Об'єкт та предмет вивчення навчальної дисципліни. Основні поняття.
2. Модельне середовище та його застосування в опорі матеріалів.
3. Основні гіпотези (допущення) і принципи теорії пружності
4. Поняття, суть та призначення розрахункової схеми.

Література

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський ; за ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
3. Александров В.М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М.И. Чебаков. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
4. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. Школа. 1982. – 264 с.

Зміст лекції

1. Теорія пружності і пластичності відноситься до розділу механіки, яка вивчає деформації в твердому тілі, що викликані фізичними впливами, а також внутрішні сили, які виникають при цьому як в стані спокою, так і в стані руху.

Теорія пластичності на відміну від теорії пружності розглядає тіла, які не підпорядковуються законам пружності або від початку прикладення до них навантаження, або починаючи з деякої стадії навантаження.

Теорія повзучості на відміну від теорії пружності та пластичності вивчає зміну з часом напружень і деформацій в твердому тілі, які виникли в результаті початкового навантаження.

Розрахунок будь-якої деталі чи споруди, тобто визначення напружень, деформацій та переміщень здійснюють з допомогою механіки твердого деформованого тіла (МТДТ).

МТДТ поділяють на такі розділи: опір матеріалів (ОМ), теорія пружності (ТП) та будівельна механіка.

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Основною метою теорії пружності (математична) є вивчення дії сил на пружні тіла та визначення тих напружень і деформацій, що при цьому виникають, як у стані рівноваги, так і у стані руху.

Прикладна теорія пружності – в ній, окрім припущення про ідеальну пружність матеріалу, вводяться додаткові гіпотези та спрощення.

Реологія – наука про рух речовини або наука, яка встановлює загальні закони утворення і розвитку в часі деформації будь-якої речовини від різних причин і в різних фізико-хімічних і термодинамічних умовах.

Якщо матеріал не відповідає закону Гука, (не має лінійної залежності між складовими деформаціями і виникаючими при цьому напруженнями) але процес розвантаження обернений - таке тіло називають нелінійно-пружним. Теорія яка встановлює закони утворення деформацій в такому тілі називається нелінійною теорією пружності.

В тому разі, коли після розвантаження тіло не повертається в початковий стан, мають місце залишкові або пластичні деформації. Наукою, яка встановлює загальні закони утворення пластичних деформацій і напружень, які виникають на всіх стадіях пластичного деформування є теорія пластичності.

2. Для того щоб охопити різноманіття матеріалів, форми, умов навантаження і руйнування, необхідно їх модельне уявлення, яке має враховувати найбільш значущі і відкидати несуттєві фактори. Врахування всіх факторів, звичайно, неможливе через їх невичерпність, тому будь-яка модель - це наближене в тій чи іншій мірі уявлення об'єкта. Таким чином, моделювання необхідно, щоб на його основі отримати розрахункові залежності, справедливі для досить широкого діапазону зміни відповідних факторів

Матеріал конструкції представляють однорідним, суцільним та ізотропним.

Модель матеріалу наділяється такими фізичними властивостями, як пружність, пластичність, крихкість і повзучість. Пружність - здатність тіла відновлювати первинну форму і розміри після зняття навантаження. Пластичність - здатність тіла зберігати значні деформації (залишкові) після розвантаження. Крихкість - здатність тіла руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій.

Повзучість - зміна в часі деформацій і напружень при дії на тіло постійної зовнішньої навантаження.

Модель форми. Для оцінки міцності і жорсткості елементів конструкцій з метою спрощення розрахунків вводять три (або чотири) типи форми тіла, залежно від співвідношення основних габаритних розмірів: стрижень; пластину (оболонку); масив.

Стрижень - тіло, що має поперечні розміри, незрівнянно малі з його довжиною. Стрижень може мати прямолінійну або криволінійну вісь, постійні або змінні по довжині розміри і форму перерізу.

Пластина (оболонка) - тіло, що має розміри в двох напрямках набагато більші, ніж в третьому, і обмежуються двома плоскими (криволінійними) поверхнями. Приклади пластин: плоскі днища й кришки резервуарів, плити перекриттів. Приклади оболонок: стінки тонкостінних резервуарів, силосів, куполи будівельних споруд.

Масив - тіло, що має розміри, співмірні в трьох напрямках. Приклади: фундаменти споруд, підпірні стінки.

3. Класична, або лінійна теорія пружності, що вивчається в цьому курсі, заснована на таких гіпотезах:

1. Матеріал конструкції є суцільним, тобто його властивості не залежать від форми і розмірів тіла і однакові у всіх його точках. (Ця гіпотеза не враховує дискретну структуру, зумовлену молекулярною будовою речовини і т.д.). Суцільність передбачає відсутність розривів і пустот у процесі деформування.

2. Матеріал конструкції є однорідним (усі механічні властивості однакові у будь-якій точці тіла).

3. Матеріал конструкції є ізотропним, тобто усі його механічні властивості у всіх напрямках однакові (виняток дерево).

4. Матеріал конструкції має властивість ідеальної лінійної пружності, тобто повністю відновлювати свою форму і розміри після зняття навантаження (підкоряється закону Гука). Або деформація матеріалу конструкції в кожній точці прямо пропорційна напруженню у цій точці. Ця гіпотеза вперше сформульована Р. Гуком (Ця гіпотеза має свої обмеження).

5. Переміщення точок тіла дуже малі порівняно з його розмірами. Деформації тіла малі порівняно з одиницею.

6. Матеріал конструкції має початковий напружений стан, тобто при відсутності зовнішніх дій відсутні напруження і деформації (початкові напруження, які виникають при виготовленні конструкції, не враховують).

4. Розрахункова схема - це реальний об'єкт, який звільнено від несуттєвих особливостей.

Для одного і того ж об'єкту може бути запропоновано кілька розрахункових схем залежно від особливостей навантаження, умов роботи, потрібної точності і від того, яка сторона вища цікавить дослідника в конкретному випадку.

Справедливо і зворотнє: одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато реальних об'єктів.

Лекція № 1.2

Тема лекції:

Теорія напружень.

План лекції

1. Напруження. Види напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами
2. Диференціальні рівняння рівноваги
3. Напруження на нахилених площадках
4. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану
5. Основи теорії напруженого стану в точці. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. - К. : Вища школа, 2002. - 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. - М: В.школа, 1982. - 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. - М: Наука, 1984. - 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: 1961. - 538 с.

Зміст лекції

1. Розглянемо деяке тіло, що перебуває у рівновазі під дією заданих навантажень. Використовуючи метод перерізів умовно розріжемо його деякою площиною і відкинемо одну з частин. Розглянемо рівновагу залишеної частини тіла.

На кожній елементарній площадці ΔA виникає внутрішня сила ΔR , інтенсивність якої p .

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR - внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;

ΔA - елементарна площа перерізу, на якій виникає зусилля ΔR .

Тобто **напруження** - це внутрішня сила, що припадає на одиницю площі перерізу.

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перерізу ΔN ; друга лежить у площині перерізу ΔQ . Напруження, що виникають у перерізі від цих складових, називають **нормальним і дотичним**.

Нормальне напруження - це інтенсивність нормальних сил у даній точці перерізу

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Дотичне напруження - це інтенсивність дотичних сил у даній точці перерізу

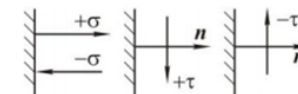
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці може бути визначено як

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н/м}^2$; $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$.

Крім величини, напруження характеризується **напрямом**. За напрям напруження беруть напрям рівнодійної R , а для складових напруження напрям визначаються наступними правилами:



✓ Нормальне напруження вважається додатним, якщо воно направлене від перерізу;

✓ Дотичне напруження вважається додатним, якщо для суміщення нормалі до перерізу з напрямком напруження її необхідно повернути за годинниковою стрілкою.

Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Сукупність напружень σ і τ , які діють на різних площадках елементарного кубика dA , створюють напружений стан

$$\sigma dA = dN; \quad \tau_Y dA = dQ_Y; \quad \tau_Z dA = dQ_Z.$$

Нормальні і дотичні напруження безпосередньо пов'язані з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перерізі

$$N = \int_A \sigma dA;$$

$$Q_Y = \int_A \tau_Y dA; \quad Q_Z = \int_A \tau_Z dA;$$

$$M_{XP} = \int_A (\tau_Y \cdot y - \tau_Z \cdot z) dA;$$

$$M_Y = \int_A \sigma \cdot z dA; \quad M_Z = \int_A \sigma \cdot y dA.$$

2. Розглянемо детально виділений з тіла елементарний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам. На гранях цього паралелепіпеда виникають

три нормальних – σ_x , σ_y , σ_z

і шість дотичних – τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy} напружень.

Напружений стан в точці характеризується дев'ятьма компонентами напруження на трьох взаємно ортогональних площадках, що проходять через задану точку тіла.

Ці напруження можна записати у вигляді таблиці (матриці)

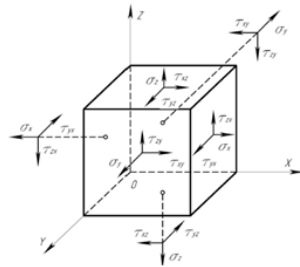
$$\{T_{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Така матриця буде симетричною, бо за законом парності дотичних напружень

$$|\tau_{yx}| = |\tau_{xy}|; \quad |\tau_{zx}| = |\tau_{xz}|; \quad |\tau_{zy}| = |\tau_{yz}|.$$

Побудовану таким чином симетричну квадратну матрицю $\{T_{\sigma}\}$ називають **тензором напружень**. Напруження, які є складовими тензора напружень, називають **компонентами тензора напружень**. Наявність тензора напружень означає, що нам відомі всі напруження, які діють на будь-яких площинах, проведених навколо точки, тобто напружений стан у точці тіла точно відомий.

Розглянемо рівновагу тіла під дією **складових напружень** на невидимих гранях і об'ємного навантаження, яке представлено складовими з інтенсивністю X , Y , Z .



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Це диференціальні рівняння рівноваги, які називають **рівняннями Нав'є**. Рівняння Нав'є встановлюють співвідношення між напруженнями і об'ємним навантаженням.

З умови рівності нулю моментів відносно координатних осей.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \right\}$$

Отримані рівняння – це **закон парності дотичних напружень**.

Так як система координат може бути вибрана довільним чином, то співвідношення дотичних напружень можуть бути віднесені до будь-яких двох взаємно перпендикулярних площадок. Тому закон парності дотичних напружень звучить так: **дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках направлені перпендикулярно до лінії їх перерізу і дорівнюють одні одним**.

3.

Розглянемо елементарний тетраедр $Oabc$.

На нахилений площадці abc з нормаллю o діють напруження, складові яких X_o , Y_o , Z_o . На площадках, що лежать на координатних площинах, напруження зобразимо їх нормальними і дотичними складовими.

Якщо площа нахиленої площадки abc дорівнює dA , то площі решти граней

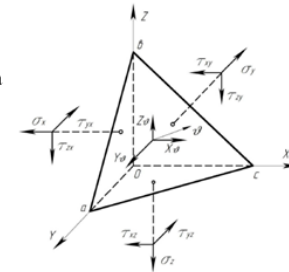
$$A_{aob} = l \cdot dA; \quad A_{cob} = m \cdot dA; \quad A_{aoc} = k \cdot dA,$$

де

$$l = \cos(\vartheta, x); \quad m = \cos(\vartheta, y); \quad k = \cos(\vartheta, z) -$$

направляючі косинуси зовнішньої нормалі o площадкі abc , які співвідносяться

$$l^2 + m^2 + k^2 = 1.$$



Спроектуючи напруження і об'ємне навантаження тетраедра на координатні вісі отримаємо вирази для напружень на нахилений площадці

$$\left. \begin{aligned} X_{\vartheta} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_{\vartheta} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_{\vartheta} &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \right\}$$

Якщо нахилена площадка знаходиться на поверхні тіла, то складові напружень X_o , Y_o , Z_o – це **складові інтенсивності поверхневого навантаження**. В такому випадку отримані рівняння встановлюють співвідношення між **поверхневим навантаженням і напруженнями у точках на поверхні тіла**. Такі співвідношення називають **умовами на поверхні або граничними умовами**, бо вони зв'язують зовнішні сили з внутрішніми.

Якщо тіло перебуває у рівновазі, то для всіх його внутрішніх точок виконуються рівняння Нав'є, а для всіх зовнішніх – умови на поверхні

4. Якщо одночасно на трьох взаємно перпендикулярних гранях паралелепіпеда діють нормальні напруження (незалежно від величини дотичних), то такий напружений стан у даній точці тіла називають **просторовим, або тривимірним**.

Разом з тим, завжди можна знайти таких три взаємно перпендикулярних напрямки, які є нормальними до площадок, де діють тільки нормальні напруження, а дотичні повністю відсутні. Такі площадки називають **головними**, а нормальні напруження, що діють на них, – **головними напруженнями**.

Доведено, що головні напруження є екстремальними у даній точці тіла.

Розглянемо в довільній точці тіла деяку площадку з нормаллю ν . Положення площадки у декартовій системі координат визначають направляючі косинуси l, m, k нормалі ν .

Якщо задані складові X_0, Y_0, Z_0 повного напруження на площадці, то **повний напружений стан** можна визначити як геометричну суму складових:

$$p_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}$$

Нормальне напруження на площадці отримаємо спроектвавши складові X_0, Y_0, Z_0 на нормалі до площадки

$$\sigma_0 = X_0 \cdot l + Y_0 \cdot m + Z_0 \cdot k$$

Дотичне напруження на розглядуваній площадці

$$\tau_0 = \sqrt{p_0^2 - \sigma_0^2}$$

Ця формула дає змогу визначити тільки величину дотичного напруження, але не показує його напрямку в просторі.

При повороті площадки нормальне і дотичне напруження змінюються.

Площадку, на якій дотичне напруження перетворюється в нуль, називають **головною**.

Повне напруження на головній площадці співпадає з нормаллю і є нормальним напруженням.

Таке напруження позначають σ (без індексів) і називають **головним напруженням**.

Якщо спроектувати головні напруження на координатні осі, використати граничні рівняння та відношення між напрямними косинусами, то отримаємо повну систему рівнянь

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k = 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot k = 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot k = 0. \end{cases}$$

Після математичних перетворень, отримаємо кубічне рівняння відносно головних напружень

$$\sigma^3 - S_1 \cdot \sigma^2 + S_2 \cdot \sigma - S_3 = 0.$$

Коефіцієнтами цього рівняння є величини які називають **лінійним, квадратичним і кубічним інваріантами тензора напружень**

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases}$$

Розв'язок рівняння дає три дійсних, суттєвих корені, які є головними напруженнями. Ці напруження нумерують в порядку спадання

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Три головні площадки, які відповідають напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ перпендикулярні одна одній.

Головні напруження не залежать від обраної системи координат, тому вони є інваріантами (величинами, що не змінюються) перетворення координат.

Величини головних напружень, а отже, і коефіцієнти S_1, S_2, S_3 рівняння не залежать від вибору системи координат. Тому S_1, S_2, S_3 називають **інваріантами напруженого стану в точці тіла**.

Інваріанти можна виразити і через головні напруження (ці співвідношення в задачах застосовують для контролю правильності рішення кубічного рівняння)

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ S_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ S_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

Можемо знайти площадки на яких значення дотичних напружень максимальні – їх називають головними дотичними напруженнями

$$\begin{cases} \tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \end{cases}$$

Також застосовують величину - **октаедричне напруження, тобто дотичне напруження на площадці, рівнонахилений до всіх головних площадок**.

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

та еквівалентну йому величину, яку називають **інтенсивністю напружень**

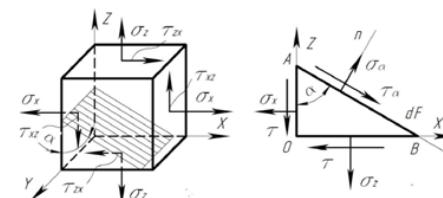
$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

5.

Залежно від наявності головних напружень, відмінних від нуля, розрізняють:

- **об'ємний напружений стан**, якщо всі три головних напруження не дорівнюють нулю;
- **плоский напружений стан**, якщо два головних напруження відмінні від нуля;
- **лінійний (одновісний) напружений стан**, якщо відмінним від нуля є тільки одне головне напруження.

Розглянемо плоский напружений стан



Для елементарного куба, виділеного навколо досліджуваної точки нормальні (σ_α) і дотичні (τ_α) напруження на довільній площадці, яка розташована під кутом α , дорівнюють

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних площинах, є величиною постійною (властивість інваріантності нормальних напружень).

Головним площинам відповідають екстремальні нормальні напруження (головні напруження).

Величини головних (екстремальних) напружень і їх напрямки визначають за формулами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_x}.$$

Нормальні і дотичні напруження на довільно орієнтованих площадках відносно до головних визначають так:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Якщо пропорційно збільшувати усі значення головних напружень ($\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$), то можна досягти небезпечного напруженого стану. Число, яке показує, у скільки разів необхідно збільшити усі компоненти напруженого стану, щоб він став небезпечним, називають **коефіцієнтом запасу міцності** і позначають n .

Якщо у двох напружених станах коефіцієнти запасу міцності дорівнюють один одному, то такі напружені стани називають **рівнонебезпечними або еквівалентними**. Напруження при одновісному напруженому стані, рівнонебезпечному заданому, називають **еквівалентним напруженням** ($\sigma_{\text{екв}}$).

Коефіцієнт запасу визначають з виразу

$$n = \frac{\sigma_{\text{неб.р.}}}{\sigma_{\text{екв}}}$$

Якщо існує залежність між двома рівнонебезпечними станами, один з яких лінійний, тобто між $\sigma_{\text{екв}}$ та $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$, то задача розрахунку на міцність у випадку складного напруженого стану буде розв'язана.

У загальному випадку, як еквівалентне напруження для пластичних матеріалів використовують інтенсивність напружень (за Мізесом), яку визначають за формулою

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

Для встановлення залежності між рівнонебезпечними станами при плоскому напруженому стані найчастіше використовують теорію, запропоновану О.Мором (1882 р.), яка ґрунтується на експерименті і дозволяє оцінювати міцність як пластичних, так і крихких матеріалів.

Згідно з цією теорією еквівалентні напруження

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - K \cdot \sigma_3.$$

У цій залежності коефіцієнт K є відношенням граничних характеристик міцності при розтягу і стиску. Для крихких матеріалів, як правило, $K < 1$, для пластичних $K = 1$.

Якщо $K=1$ і має місце спрощений плоский напружений стан ($\sigma_z = \sigma$, а $\sigma_y = 0$)

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

У випадку одновісного розтягу ($\sigma_1 = \sigma$, а $\sigma_3 = 0$) і згідно з виразом $\sigma_{\text{екв}} = \sigma$.

При чистому зсуві для матеріалів із $K=1$, $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_3 = -\tau$; еквівалентні напруження $\sigma_{\text{екв}} = 2\tau$.

Лекція № 1.3

Тема лекції:

Теорія деформацій.

План лекції

1. Поняття про переміщення та деформацію.
2. Тензор деформацій та його інваріанти. Головні деформації.
3. Зв'язок деформацій і переміщень.
4. Об'ємна деформація тіла.
5. Умови сумісності деформацій.

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. **Деформацією** називають зміну розмірів і форми тіла під дією навантажень.

Проекції вектора переміщення Δ на осі x, y і z позначають відповідно u, v і w . Називають їх компонентами переміщень або просто **переміщеннями точки**.

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}(x, y, z)$$

Переміщення не може служити однозначною характеристикою деформації.

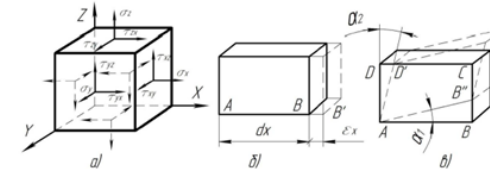
Лінійною деформацією тіла в точці у заданому напрямку r називають відношення абсолютної деформації відрізка dr до його початкової довжини

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr}$$

Зміну прямого кута між взаємно перпендикулярними до деформації напрямками називають **зсувом або відносним зсувом**.

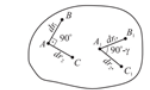
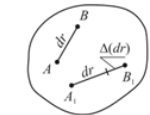
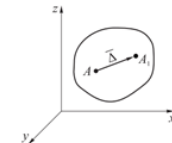
$$\gamma_{r_1 r_2} = \frac{\pi}{2} - \angle B_1 A_1 C_1$$

2. **Тензор деформацій та його інваріанти. Головні деформації.**



Деформований стан тіла у будь-якій точці навантаженого тіла буде визначається трьома лінійними і трьома кутовими деформаціями (деформаціями зсуву).

✓ Лінійна деформація – це відносне видовження (скорочення) ребер елементарного паралелепіпеда, виділеного в околі будь-якої точки навантаженого тіла (деформації першого роду)



$$\varepsilon_x = \frac{BB'}{AB}$$

✓ Кутова деформація (деформація зсуву, деформація II роду) - γ_{xy} (різниця кутів DAB і D'AB''). –

Кінцева деформація елементарного паралелепіпеда може бути поділена на складові – зміна довжини ребер внаслідок зміни об'єму, та зміна початково прямих кутів, внаслідок зміни форми.

Рівність аналогічна закону парності – **взаємність зсуву**

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \gamma_{zx} = \gamma_{xz}; \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

Деформації зводять до тензора деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Якщо тензор напружень повністю визначає напружений стан в точці, то тензор деформацій повністю визначає деформований стан в точці пружного тіла.

Таким чином при розв'язанні просторової задачі теорії пружності визначенню підлягають 15 величин, кожна з яких є функцією змінних x, y, z

У кожній точці деформованого тіла завжди можна провести три взаємні ортогональні осі, для яких деформації зсуву дорівнюють нулю. Такі осі називають **головними осями деформації**.

Видовження орієнтовані за напрямком головних осей називаються головними лінійними деформаціями.

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3.$$

Головні лінійні деформації визначають за характеристичним рівнянням

$$\varepsilon^2 - J_1(T_\varepsilon)\varepsilon + J_2(T_\varepsilon)\varepsilon - J_3(T_\varepsilon) = 0.$$

Усі три корені кубічного рівняння будуть дійсними.

Інваріанти тензора деформацій

$$\begin{aligned} J_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ J_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ J_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}). \end{aligned}$$

Через головні деформації інваріанти тензора деформацій записують так

$$\begin{aligned} J_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ J_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \\ J_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}$$

3. Переміщення, як і напруження є неперервними функціями координат. Їх записують складовими проекціями на координатні осі: u – вздовж осі X; v – вздовж осі Y; w – вздовж осі Z.

Компоненти **тензора деформацій** залежать від закону зміни компонентів вектора переміщення в околі розглядуваної точки.

Повне переміщення точки

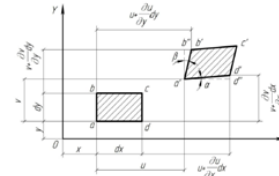
$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Виділимо з твердого тіла в околі заданої точки нескінченно малий паралелепіпед з ребрами dx, dy, dz .

При деформації твердого тіла даний паралелепіпед:

- 1) переміститься в нове положення
- 2) деформується.

Розглянемо деформації елемента в площині XOY:



Відносну деформацію у напрямку осі X визначають відношенням абсолютного видовження елемента до його початкової довжини

$$\varepsilon_x = \frac{a'd' - ad}{ad} = \frac{\left(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Аналогічно отримують деформації у напрямку інших осей.

Отже, вирази для лінійних деформацій:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Отже лінійна деформація за будь-яким напрямком дорівнює частинній похідній складової переміщення в цій площині по змінній у тому самому напрямі

Кут зсуву в площині XOY визначають кутом повороту його граней ab і ad

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

На підставі попередніх формул отримуємо вирази для кутових деформацій

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Кутова деформація у будь-якій площині дорівнює сумі частинних похідних складових переміщення в цій площині по змінних у перпендикулярних напрямках

Отримані **шість рівнянь, які виражають лінійні і кутові деформації через складові переміщення – формули (співвідношення) Коші:**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

4. **Об'ємна деформація** – це відношення приросту об'єму до початкового об'єму Об'єм елементарного паралелепіпеда у невантаженому стані

$$dV = dx dy dz$$

У результаті деформації його ребра отримають видовження і об'єм зміниться.

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz$$

Об'ємна деформація

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz}$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

або в диференційній формі

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

5. Між деформаціями встановлені співвідношення. Отримують їх виключаючи переміщення із формул Коші.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Ці вирази встановлюють зв'язок між деформаціями і е умовами сумісності деформацій.

При виконанні даних умов тіло розбите на окремі елементи можна зібрати після деформації у єдине ціле без пустот і розривів. Тому умови сумісності деформацій називають умовами суцільності або рівняннями Сен-Венана.

Лекція № 1.4

Тема лекції:

Узагальнений закон Гука.

План лекції

1. Узагальнений закон Гука.
2. Зворотна форма закону Гука.

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. При об'ємному напруженому стані поздовжня деформація, наприклад, в напрямку осі x складається з поздовжньої деформації вздовж осі x від напруження σ_x і поперечних деформацій від напружень σ_y, σ_z

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}.$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_{xy} = -\mu \cdot \varepsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_{xz} = -\mu \cdot \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E},$$

Записуючи аналогічні співвідношення для деформацій в напрямку осей Y і X , приєднаємо до них вирази для кутових деформацій. У результаті отримаємо шість рівнянь - **узагальнений закон Гука**:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

2. Перетворимо вираз об'ємної деформації (підставивши складові деформацій)

$$\begin{aligned} \Theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)] = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot S_1,$$

Ввівши величину, яку назвемо модуль об'ємного розширення (об'ємний модуль пружності), яка характеризує опір матеріалу при зміні об'єму

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

отримаємо

$$S_1 = 3K \cdot \Theta$$

Замінивши перший інваріант напруженого стану S_1 середнім напруженням в точці

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1$$

отримаємо

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta$$

Середнє напруження в точці пропорційне об'ємній деформації в околі тієї самої точки. Перетворимо першу формулу узагальненого закону Гука таким чином

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) = \\ &= \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{E} \left[(1+\mu)\sigma_x - \frac{\mu \cdot E}{1-2\mu} \cdot \Theta \right] = \\ &= \frac{1+\mu}{E} \sigma_x - \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \Theta. \\ \sigma_x &= \frac{\mu \cdot E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \Theta + \frac{E}{1+\mu} \cdot \varepsilon_x. \end{aligned}$$

Коефіцієнти Ляма для позначення

$$\lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1+\mu)} = G.$$

Отримали шість формул узагальненого закону Гука у зворотній формі:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

Склавши почленно перші три формули узагальненого закону Гука в зворотній формі, отримаємо

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda \cdot \Theta + 2\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

або

$$S_1 = (3\lambda + 2\nu) \Theta$$

Замінивши перший інваріант напруженого стану S_1 середнім напруженням σ_0

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1$$

а об'ємну деформацію Θ середньою деформацією в точці ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \Theta$$

отримаємо ще одну формулу закону Гука

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\nu) \varepsilon_0$$

З цього слідує, що середнє напруження в точці пропорційне середньому видовженню в цій точці.

Лекція № 1.5

Тема лекції:

Загальна задача теорії пружності.

План лекції

1. Постановка загальної задачі теорії пружності.
2. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у переміщеннях.
3. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у напруженнях при постійності об'ємних сил.
4. Типи граничних умов.
5. Плоска деформація.
6. Узагальнений плоский напружений стан.

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. Загальна задача теорії пружності базується на визначенні 15 невідомих з 15 рівнянь. розв'язок задачі зводиться до інтегрування 15 диференціальних рівнянь при виконанні граничних умов (умов на поверхні) і умов суцільності Сен-Венана. Залежно від того, які величини приймають за основні невідомі, розрізняють три способи розв'язування задачі:

- I. У переміщеннях;
- II. У напруженнях;
- III. Змішане розв'язування.

2. Для отримання розв'язку задачі теорії пружності у переміщеннях необхідно виразити у статичних рівняннях напруження через переміщення.

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + X = 0.$$

де вираз у дужках – це диференціальний оператор Лапласа від функції u

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \nu \cdot \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 w + Z &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Ці рівняння називають **рівняннями Ламе**.

Умови на поверхні в переміщеннях:

$$\left. \begin{aligned} X_{\vartheta} &= \lambda \Theta l + \vartheta \frac{\partial u}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} k \right); \\ Y_{\vartheta} &= \lambda \Theta m + \vartheta \frac{\partial v}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} k \right); \\ Z_{\vartheta} &= \lambda \Theta k + \vartheta \frac{\partial w}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} k \right). \end{aligned} \right\}$$

Розв'язок загальної задачі теорії пружності в переміщеннях зводиться до інтегрування трьох рівнянь Ламе при дотриманні умов на поверхні. За визначеними переміщеннями u, v, w з формул Коші визначають деформації і, далі з формул закону Гука напруження.

3. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у напруженнях при постійності об'ємних сил.

При рішенні задач теорії пружності в напруженнях рівняння Сен-Венана необхідно представити в напруженнях. Такі рівняння називаються **рівняннями Бельтрамі-Мітчела**.

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \right\}$$

При отриманні рівнянь передбачається, що об'ємні сили постійні

$$X = const, \quad Y = const, \quad Z = const.$$

Для розв'язування плоскої задачі у напруженнях необхідно проінтегрувати три рівняння Нав'є разом з шістьма рівняннями Бельтрамі-Мітчела при дотриманні умов на поверхні. Після цього за формулами закону Гука визначають деформації ϵ , за формулами Коші – переміщення.

4. Типи граничних умов.

При розв'язуванні задачі теорії пружності у всіх випадках необхідно враховувати умови на поверхні (граничні умови). Для цього має бути задано рівняння поверхні тіла і сили або переміщення її точок.

Розрізняють два типи граничних умов:

- ✓ **кінематичні** – коли задають значення переміщень точок поверхні
- ✓ **статичні** – коли задають значення напружень на поверхні
- ✓ **змішані** – коли на частині поверхні задають переміщення, а на іншій – напруження.

Відповідно до цього розрізняють три основні математичні методи розв'язування задачі теорії пружності:

- ✓ **прямий метод**, який полягає у безпосередньому інтегруванні основних рівнянь при виконанні граничних умов;
- ✓ **зворотний метод**, якщо задають функції напружень або переміщень, які задовольняють диференціальні рівняння задачі, а потім встановлюють, яким граничним умовам ці функції відповідають;

- ✓ **напівзворотний метод Сен-Венана**, коли задають частину функцій переміщень або напружень та з рівнянь задачі встановлюють, яким умовам мають відповідати решта функцій. При цьому диференціальні рівняння суттєво спрощуються.

5. Плоска деформація.

Плоска задача включає плоску деформацію (ПД) і узагальнений плоский напружений стан (УПНС).

Плоска деформація – це такий напружено-деформівний стан, коли всі переміщення точок відбуваються паралельно одній площині XOY .

Граничні умови для переміщень мають вигляд:

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0,$$

Враховуючи формули Коші отримуємо, що деформації

$$\epsilon_z = 0; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0;$$

$$\epsilon_x = \epsilon_x(x, y); \quad \epsilon_y = \epsilon_y(x, y); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y).$$

Розглянемо тіло циліндричної або призматичної форми, яке має дуже велику довжину вздовж осі Z

$$\epsilon_z = 0.$$

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$T_{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

З урахуванням закону Гука

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Решту ненульових значень з рівнянь закону Гука можна представити у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_y \right), \\ \epsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Ввівши нові пружні сталі, отримуємо узагальнений закон Гука з врахуванням пружних сталей

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \mu_1 \cdot \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \mu_1 \cdot \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Отже, для випадку плоскої деформації напруження переміщення і деформації є функціями тільки змінних x та y .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Основні рівняння теорії пружності при плоскій деформації

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Умови на поверхні

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m. \end{aligned} \right\}$$

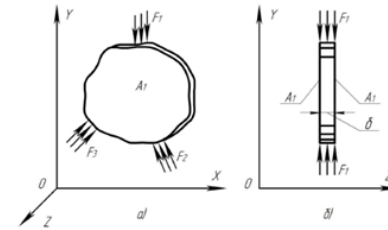
Формули Коші

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Умови суцільності Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

6. Узагальнений плоский напружений стан характеризується відсутністю нормальних напружень на площадках паралельних одній з координатних площин.



Розглянемо тіло, що має форму диска, товщина якого $\delta=l$ значно менша його розмірів у площині XOY . Зовнішнє навантаження прикладене тільки по контуру диска та розподілене рівномірно за його товщиною

На основах диску A_1 та A_2 навантаження немає, тому

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Решта напружень будуть постійні по товщині диска

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

Відповідно до закону Гука

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} = 0.$$

Для узагальненого напруженого стану тензори напружень та деформацій

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Формули закону Гука для УПНС матимуть вигляд

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Решту співвідношень плоскої деформації: умови рівноваги, умови на поверхні, формули Коші та умови суцільності залишаються такими ж і для УПНС. Це дозволяє об'єднати дві задачі в одну – плоску задачу теорії пружності.

Диск, тобто пластинку, можна розглядати і як призматичне тіло, висота якого мала порівняно з розмірами основи. У такому випадку при однакових умовах навантаження призматичних тіл для тіл з висотою значно перевищуючою розміри основи, матимемо ПД, а для тіл, з висотою, значно меншою розмірів основ, матимемо УПНС.

Лекція № 1.6

Тема лекції:

Плоска задача теорії пружності

План лекції

1. Рівняння плоскої задачі теорії пружності.
2. Граничні умови (умови на контурі).
3. Задачі теорії пружності та методи їх розрахунку.
4. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях для прямокутних областей.

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К.: Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. Щоб розв'язати задачу теорії пружності, необхідно
 1. скласти рівняння, які виражають умови рівноваги нескінченно малого елемента,
 2. рівняння, які описують його деформацію
 3. рівняння, які віддзеркалюють пружні властивості матеріалу.

У випадку плоскої задачі таких рівнянь повинно бути 8 – за числом невідомих:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u, v.$$

Рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Умови рівноваги на площині

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum m = 0.$$

$$\sigma_x dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{yx} dx \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + X dx dy = 0.$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0.$$

$$\sum Y = 0 \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0.$$

Система рівнянь рівноваги (рівняння Нав'є),

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases}$$

Геометричні рівняння (рівняння Коші)

У результаті деформації диску, нескінченно малий елемент, який виділено з його об'єму, переміститься так, що точка А займе положення А*.

Окрім того внаслідок лінійної деформації, сторони прямокутника ABCD отримують подовження, внаслідок чого вершина В переміститься не в В*, а в В***. І цей елемент також зазнає кутової деформації, внаслідок чого остаточним положенням вершини В буде В***.

Абсолютне видовження сторони АВ, дорівнює

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

відносне подовження

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

аналогічно

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

кутова деформація

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$$

Визначимо спочатку α_1 . З огляду на малість кута можна записати

$$\alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B^*B''}{A'B^*} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

На основі гіпотези про малість деформацій (це припущення, що величина деформацій набагато менша порівняно з одиницею) – ми застосовували, коли говорили про отриманні виразів для лінійної деформації.

$$\varepsilon_x \ll 1$$

можна записати

$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогічно записуючи

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким чином отримуємо систему рівнянь, що пов'язують переміщення з деформаціями, які ідентичні формулам Коші для плоскої деформації

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Фізичні рівняння (рівняння закону Гука)

Шість рівнянь закону Гука для тривимірного напруженого стану

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases}$$

Для окремих різновидів плоскої задачі ці рівняння перетворювалися по різному. Для УП-

НС

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

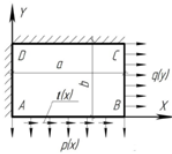
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{cases}$$

Для ПД

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{cases}$$

2. Граничні умови (умови на контурі)

Для того, щоб урахувати форму диску та навантаження, що діють по його контуру, необхідно записати умови на контурі або граничні умови. Розглянемо їх на прикладі прямокутного диску



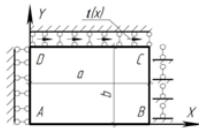
У кожній точці контуру мають бути виконані 2 граничні умови, що залежать від того, як там діє навантаження або які накладені зв'язки.

На рис. сторони диску – AD ($x = 0$) та DC ($y = b$) жорстко закріплено, тому для них граничні умови записують так:

$$x = 0 \begin{cases} u = 0, \\ v = 0; \end{cases} \quad y = b \begin{cases} u = 0, \\ v = 0. \end{cases}$$

На сторонах AB та BC задано навантаження, тобто відомі нормальні та дотичні напруження:

$$y = 0 \begin{cases} \sigma_y = p(x), \\ \tau_{yx} = -t(x); \end{cases} \quad x = a \begin{cases} \sigma_x = q(y), \\ \tau_{xy} = 0; \end{cases}$$



На цьому рис. сторону AD закріплено так, що горизонтальне переміщення відсутнє. У вертикальному напрямку відсутнє навантаження. Для сторони BC навпаки – вертикальне переміщення відсутнє, і в горизонтальному напрямку відсутнє навантаження

$$x = 0 \begin{cases} u = 0, \\ \tau_{yx} = 0; \end{cases} \quad x = a \begin{cases} v = 0, \\ \sigma_x = 0. \end{cases}$$

На стороні DC у вертикальному напрямку накладено зв'язки, а в горизонтальному напрямку діє навантаження.

Сторона AB – вільна від навантажень.

$$y = b \begin{cases} v = 0, \\ \tau_{yx} = t(x); \end{cases} \quad y = 0 \begin{cases} \sigma_y = 0, \\ \tau_{yx} = 0. \end{cases}$$

З наданих прикладів видно, що умови (перший рис) – сторона AB – містять тільки переміщення. Такі граничні умови називають геометричними, або кінематичними.

Умови для сторони BC записані тільки в напруженнях. Граничні умови такого типу називаються силовими, або статичними.

В умови для сторін AB та CD увійшло по одному напруженню та по одному переміщенню. Такі умови називають змішаними.

3.

✓ Пряма задача. Для диску заданої форми відоме зовнішнє навантаження, об'ємні сили та розташування зв'язків на контурі. Потрібно визначити напруження, деформації та переміщення в будь-якій точці всередині диску.

✓ Зворотна задача. Для диску заданої форми відомі напруження або переміщення в будь-якій внутрішній точці. Потрібно визначити зовнішні навантаження, об'ємні сили та переміщення точок контуру.

✓ Змішана задача. Задана частково інформація про напруження та переміщення всередині диску, частково інформація про умови на контурі.

Основне значення для розрахунку конструкцій має пряма задача. Вона ж і найбільш складна. Зворотна вирішується значно простіше, вона має допоміжне значення.

Методи розв'язування прямої задачі:

Рішення в напруженнях. Систему з восьми рівнянь зводять до трьох рівнянь відносно напружень; переміщення та деформації з цих рівнянь виключають, а визначають їх вже після того, як будуть знайдені всі напруження.

Рішення в переміщеннях. Виключають напруження та деформації і отримують систему 2-х рівнянь відносно переміщень u та v .

Можливий також змішаний метод.

4. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях для прямокутних областей.

Для визначення 3 невідомих складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ використовуємо два рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

і рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Для цього підставимо в дане рівняння деформації за законом Гука

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

В свою чергу продиференціюємо перше рівняння Нав'є по x , а друге по y і почленно додамо. При постійності об'ємних сил отримаємо

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{або} \quad -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Підставивши отриманий вираз в утворене рівняння сумісності, отримаємо

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Для випадку, коли з об'ємних сил діє тільки власна вага, отримаємо рівняння нерозривності деформації записане у напруженнях (рівняння Леві)

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Таке рівняння називають гармонічним, а функція, яка задовільняє це рівняння є гармонічною.

Рішення плоскої задачі можна спростити, якщо звести її до пошуку однієї функції – функції напружень Ері.

$$\varphi = \varphi(x, y)$$

Таким чином, щоб задовольнялись рівняння рівноваги, тобто щоб диференціальні рівняння рівноваги при підстановці даної функції перетворювалися в тотожність, а сама функція Ері в такому випадку буде рішенням цих рівнянь.

Ці умови будуть виконуватися, якщо напруження виразити через функцію Ері наступними відношеннями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x.$$

Якщо підставити напруження, виражені через функцію Ері в рівняння суцільності, то отримаємо

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \nabla^4 \varphi = 0.$$

Якщо представити бігармонічне рівняння в розгорнутому вигляді та продиференціювати, отримаємо

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Функцію, яка задовольняє це рівняння φ , називають бігармонічною. А саме рівняння називають – бігармонічне рівняння плоскої задачі. Якщо до нього приєднати граничні умови (виражені через функцію напружень), то розв'язування плоскої задачі зведеться до визначення однієї невідомої – φ . Знаючи її можна потім знайти напруження, далі за допомогою формул узагальненого закону Гука відшукати деформації та, нарешті, за допомогою формул Коші – переміщення.

Через функцію напружень також можна виразити граничні умови

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) m = X_\varphi$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) \cdot l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot m = Y_\varphi.$$

Отже, розв'язок плоскої задачі зводиться до відшукування бігармонічної функції φ , яка задовольняє граничні умови.

Лекція № 1.7

Тема лекції:

Розв'язування плоскої задачі.

План лекції

1. Розв'язування плоскої задачі в поліномах.
2. Розв'язування плоскої задачі в тригонометричних рядах.
3. Метод кінцевих різниць (метод сіток).

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К.: Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. Розв'язування плоскої задачі в поліномах.

При розв'язуванні плоскої задачі в напруженнях, якими б не були форми диску, закріплення та навантаження його контуру, рівняння (суцільності виражені через функцію Ері), (рівняння рівноваги виражені через цю ж функцію), (фізичні рівняння закону Гука для ПД чи УП-НС), рівняння Коші, що пов'язують переміщення з деформаціями) залишаються завжди такими, а **змінюються тільки граничні умови**. Залежно від останніх розв'язок бігармонічного рівняння може мати різну форму. Тут можуть бути різні алгебраїчні, тригонометричні та інші функції, можна застосовувати ряди Фур'є, а у випадках, коли аналітичного розв'язку не існує, використовують числові методи – наприклад, метод кінцевих різниць.

У деяких простих випадках можна знайти розв'язок плоскої задачі, надаючи $\varphi(x, y)$ вигляд алгебраїчного полінома (ступінь його, як правило, не вище 6-го – 7-го відносно змінних x та y). Поліном повинен бути підібраний таким чином, щоб він задовольняв бігармонічному рівнянню. При цьому коефіцієнти полінома не задаються, а є невідомими величинами і визначаються з граничних умов. Їх кількість повинна відповідати числу граничних умов даної задачі. Граничні умови також повинні бути записані через функцію напружень. Таким чином, інформація про функцію напружень задається частково, **така задача є змішаною задачею** (напівзворотною).

Розв'язування плоскої задачі в поліномах є одним з варіантів реалізації зворотного методу розв'язування задачі.

Дня того, щоб краще вивчити властивості поліномів різних ступенів, розглянемо декілька зворотних задач.

Розглянемо варіанти поліномів, які можна було би використовувати для вираження функції напружень.

– Поліном першої степені

$$\varphi_1 = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y.$$

Не використовують для функції напружень, так як його другі похідні перетворюються в нуль, що відповідає відсутності напружень.

– Поліном другої степені

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + b_2 \cdot x \cdot y + \frac{c_2}{2} \cdot y^2$$

дає нульові четверті похідні, і як наслідок, бігармонічне рівняння задовольняється тотожно. Другі похідні є константами, що відповідає постійності напружень, і, як наслідок, рівномірному навантаженню на контурі пластинки.

Поліном третьої степені

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} \cdot x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} \cdot x^2 \cdot y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} \cdot x \cdot y^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} \cdot y^3$$

також дає нульові четверті похідні, тобто є бігармонічним. Другі похідні цього полінома є лінійними функціями, то така функція напружень відповідає навантаженню, яке лінійно змінюється на контурі пластинки.

Поліном третього степеню можна записати у такому вигляді

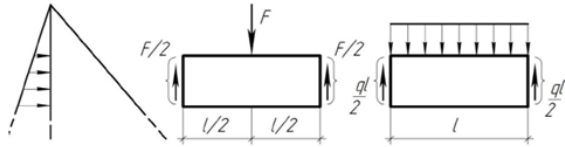
$$\varphi = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 \cdot y + c \cdot x \cdot y^2 + e \cdot y^3 + f \cdot x^2 + g \cdot x \cdot y + h \cdot y^2.$$

Підставимо в нього рівняння рівноваги виражені через функцію Ері

$$\sigma_x = 2c \cdot x + 6e \cdot y + 2h; \quad \sigma_y = 6a \cdot x + 2b \cdot y + 2f; \\ \tau_{xy} = -(2b \cdot x + 2c \cdot y + g)$$

Усі напруження виявляються лінійними функціями x та y.

Із застосуванням поліному третього степені розв'язують задачу про розрахунок трикутної греблі необмеженої висоти на гідростатичне навантаження



Поліноми другої та третьої степені, якщо їх підставити у бігармонічне рівняння, завжди тотожно задовольняють йому.

– Поліном четвертої степені

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} \cdot x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} \cdot x^3 \cdot y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} \cdot x \cdot y^3 + \frac{l_4}{3 \cdot 4} \cdot y^4$$

четверті похідні полінома

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2l_4.$$

підставляючи їх у бігармонічне рівняння граничних умов виражених через функцію напружень отримуємо

$$a_4 + c_4 + l_4 = 0.$$

Отже, поліном четвертої степені задовольняє бігармонічне рівняння при отриманій умові. Тобто будь-які чотири коефіцієнти, можуть бути взяті довільними, а п'ятий має бути виражений через них:

$$l_4 = -a_4 - c_4.$$

Поліном четвертої степені можна записати у такому вигляді:

$$\varphi = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 \cdot y + c \cdot x^2 \cdot y^2 + e \cdot y^3.$$

Підставимо в нього рівняння рівноваги виражені через функцію Ері та виразимо коеф. c

$$24a + 2 \cdot 4c + 0 = 0,$$

$$c = -3a$$

Запишемо нове значення функції

$$\varphi = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 \cdot y - 3a \cdot x^2 \cdot y^2 + e \cdot y^3 = a(x^4 - 3x^2 \cdot y^2) + b \cdot x^3 \cdot y + e \cdot y^3.$$

За бігарм. рівнянням граничних умов отримуємо

$$\sigma_x = -6a \cdot x^2 + 6ey;$$

$$\sigma_y = a(12x^2 - 6y^2) + 6b \cdot x \cdot y; \\ \tau_{xy} = 12a \cdot x \cdot y - 3b \cdot x^2.$$

– Поліном п'ятої степені

У цьому випадку епюри напружень можуть бути параболою не вище 3-ої степені.

У загальному випадку необхідно розкласти навантаження на контурі по поліномах. Далше для кожної складової навантаження прийняти відповідну функцію напружень і визначити її коефіцієнти з граничних умов. Просумувавши отримані функції напружень, отримаємо розв'язок задачі.

Самуль Основы теории упругости и пластичности стр. 63

2. Метод тригонометричних рядів Ріб'єра-Файлона. полягає в тому, що в якості функції напружень можна застосовувати тригонометричні ряди. З цією метою дослідимо тригонометричну функцію

Розглянемо функцію напружень

$$\varphi = Y \cdot \cos \alpha \cdot x,$$

де Y – функція, яка залежить тільки від координати y.

$$\alpha = n \cdot \pi / l;$$

l – довжина контуру вздовж осі X.

n – будь-яке ціле число. Якщо числу n давати різні значення, то кожного разу будуть виходити різні функції, які будуть відрізнятися значеннями параметру α та сталими

З'ясуємо при яких умовах функція φ буде бігармонічною, тобто задовільняти вимоги бігармонічного рівняння. Четверті похідні функції φ

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \cdot Y \cdot \cos \alpha \cdot x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \cdot Y'' \cdot \cos \alpha \cdot x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cdot \cos \alpha \cdot x.$$

Підставляючи ці похідні в бігармонічне рівняння

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

отримаємо

$$\alpha^4 \cdot Y \cdot \cos \alpha \cdot x - 2\alpha^2 \cdot Y'' \cdot \cos \alpha \cdot x + Y^{IV} \cdot \cos \alpha \cdot x = 0$$

або

$$(Y^{IV} - 2\alpha^2 \cdot Y'' + \alpha^4 \cdot Y) \cdot \cos \alpha \cdot x = 0.$$

Оскільки це рівняння задовільняється при будь-яких значеннях аргументу x то можемо записати,

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 \cdot Y'' + \alpha^4 \cdot Y = 0.$$

Розв'язок цього рівняння можна записати через гіперболічні функції

$$Y = A \cdot ch \alpha \cdot y + B \cdot y \cdot ch \alpha \cdot y + C \cdot sh \alpha \cdot y + D \cdot y \cdot sh \alpha \cdot y.$$

Таким чином функція напружень

$$\varphi = (A \cdot ch \alpha \cdot y + B \cdot y \cdot ch \alpha \cdot y + C \cdot sh \alpha \cdot y + D \cdot y \cdot sh \alpha \cdot y) \cdot \cos \alpha \cdot x.$$

є бігармонічною.

Загальне рішення бігармонічного рівняння може бути представлено як сума всіх його можливих часткових рішень, тобто у вигляді нескінченного тригонометричного ряду

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cdot \text{ch} \alpha_n \cdot y + B_n \cdot y \cdot \text{ch} \alpha_n \cdot y + C_n \cdot \text{sh} \alpha_n \cdot y + D_n \cdot y \cdot \text{sh} \alpha_n \cdot y) \cdot \cos \alpha_n \cdot x + A'_n \cdot \text{ch} \alpha_n \cdot y + B'_n \cdot y \cdot \text{ch} \alpha_n \cdot y + C'_n \cdot \text{sh} \alpha_n \cdot y + D'_n \cdot y \cdot \text{sh} \alpha_n \cdot y) \cdot \sin \alpha_n \cdot x].$$

Навантаження на контурі має бути розкладено в тригонометричний ряд Фур'є по синусам і косинусам.

3. Метод кінцевих різниць (метод сіток)

Метод кінцевих різниць (метод сіток) є ефективним засобом наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. Його суть у тому, що неперервну функцію замінюють набором значень у фіксованих точках. Похідні функції виражають через різниці значень функції у точках, завдяки чому диференціальне рівняння замінюють системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо деяку функцію однієї змінної $y(x)$

Виберемо на осі X точки (5 шт), які віддалені одна від одної на однакову відстань, яку назовемо кроком

$$\Delta x = h.$$

Встановимо залежності між похідними функції в довільній точці та значеннями самої функції в цій та на сусідніх точках



Значення першої похідної в точці можна наближено записати так

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Друга похідна може бути отримана використовуючи двічі вирази першої

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1} \right] = \frac{1}{4h^2}(y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}).$$

Якщо ми будемо зменшувати інтервал, ми отримаємо більш точне значення другої похідної в точці, тобто зменшивши інтервал двічі отримаємо

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}).$$

Аналогічно обчислюємо третю похідну і четверту

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_i = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}).$$

У випадку плоскої задачі функція $y(x)$ буде залежати від двох координат x та y , тому необхідно виражати через кінцеві різниці часткові похідні. Для цього плоску область, яку ми досліджуємо розбивають сіткою на чарунки з розмірами Δx та Δy . Для спрощення їх приймають квадратними рівними кроку.

Часткові похідні функції $y(x)$ в точці 0 можуть бути виражені через значення функції в 13 точках, які пронумеровані на мал.

Отже, часткові похідні в нульовій точці, за аналогією попередніх виразів (для функції $\varphi(x)$):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_3); \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_4); \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3);$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_4 \right] = \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12});$$

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4}(\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9); \quad \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4}(\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11});$$

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_4 \right] =$$

$$= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}].$$

Запишемо бігармонічне рівняння в кінцевих різницях (в записі скорочення на $1/h^4$)

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) +$$

$$+ (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.$$

Такі рівняння можуть бути записані для кожної точки всередині контура. При цьому частково в ці рівняння увійдуть також функції напружень для точок (вузлів) на контурі і для точок відстаючих на один крок за контуром (штрихові лінії на рис)

Після складання і розв'язування такої системи рівнянь, напруження визначають за формулами рівнянь рівноваги записаними у кінцевих різницях. Наприклад для точки 0:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ \sigma_y &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \right\}$$

Значення функції на контурі і за контуром визначають з граничних умов. Таким чином невідомих значень функції виявиться стільки, скільки вузлів всередині контура, але стільки ж можна буде і скласти рівнянь.

Розглядаючи верхню грань прямокутної області (контура) як балку до якої прикладене навантаження $q(x)$ направлене вниз, то для цієї грані можна скласти наступну умову

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q.$$

За відомою залежністю між згинальним моментом і інтенсивністю розподіленого навантаження при згині балок, можна записати:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

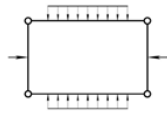
Тобто функцію напружень φ можна прийняти за значення згинального момента в даній точці балки з таким самим навантаження

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 M}{dx^2}$$

При цьому балка може мати будь-яке закріплення, так як його характер буде впливати тільки на значення сталих, які з'являться після інтегрування отриманого відношення

$$\varphi = M + C_1 \cdot x + C_2.$$

Можна прийняти



$$\varphi = M.$$

Оскільки константи інтегрування у виразі моменту залежать тільки від характеру закріплень балки, то їх можна прийняти будь-якими. Зручно визначити ці згинальні моменти вважаючи контур рамою з шарнірними закріпленнями стержнів у вузлах. Додатними при цьому є моменти, які розтягують волокна стержнів, які розташовані всередині рами.

Для визначення значення φ у законтурній точці а записують її похідну для відповідної точки b на контурі

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b = \frac{1}{24}(\varphi_a - \varphi_c).$$

звідси отримаємо

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b.$$

Значення похідної на верхній грані

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \text{або} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

звідси

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\int \tau_{xy} dx + C.$$

При відсутності дотичного напруження на контурі

$$\int \tau_{xy} dx = 0$$

похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ постійна вздовж грані.

Для лівої вертикальної грані при $x=0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dM}{dy} = Q.$$

Ця поперечна сила у вертикальному стержні рами з рівноваги вузла рами дорівнює позовжній силі у горизонтальному стержні

$$Q_{\text{верт}} = N_{\text{гор}}.$$

Для прямокутного контура при відсутності дотичного навантаження отримаємо

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \cdot N_b.$$

З урахуванням відповідності знаків між поперечними і позовжніми силами у вузлах рами, аналогічне співвідношення справедливе для законтурних точок на інших гранях. Наприклад, на лівій грані для т. k маємо

$$\varphi_k = \varphi_m - 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_l = \varphi_m + 2h \cdot N_l.$$

Метод кінцевих різниць є наближенням.

Точність розрахунку підвищується зі зменшенням кроку сітки. Метод дає можливість розв'язувати плоску задачу при складному окресленні контуру, а також при наявності вирізів всередині області.

Лекція № 1.8

Тема лекції:

Згин тонких пластинок.

План лекції

1. Визначення та гіпотези.
2. Переміщення та деформації у пластинках.
3. Напруження у пластинках.
4. Внутрішні зусилля у пластинках.
5. Диференціальне рівняння вигнутої середньої поверхні.
6. Граничні умови для прямокутних пластин.

Література

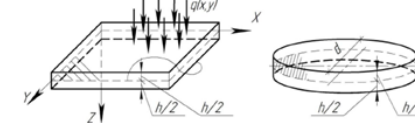
1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. Пластинка – це призматичне або циліндричне тіло, обмежене двома площинами, відстань між якими h , мала порівняно з розмірами основ.

Площину, що ділить товщину пластинки навпіл, називають **середньою площиною**

Лінія перетину середньої площини з бічними гранями утворює **контур пластинки**.



Тонкою вважають пластинку, для якої виконуються дві умови:

- ✓ відношення товщини до характерного розміру основи лежить в межах

$$\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$$

- ✓ найбільший прогин не більше чвертї товщини

$$\frac{w}{h} < \frac{1}{4}$$

Якщо товщина пластинки більше ніж зазначена умова, то пластинку відносять до **товстих плит**

$$\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$$

Коли прогин не задовольняє встановленим межах, то пластинку відносять до **гнучких мембран**.

$$\frac{w}{h} > \frac{1}{4}$$

Зазвичай тонку пластинку розраховують за наближеною теорією – технічна теорія згину тонких пластинок, яка базується на ряді гіпотез Кіргофа:

- 1) **гіпотеза прямих нормалей** (кінематична гіпотеза)

При навантаженні, паралельному осі Z, усі точки середньої площини переміщуються тільки у напрямку осі Z

$$w = f(x, y).$$

2) гіпотеза про недеформованість (неростяжність) серединної площини

Середина площини пластинки при згині не змінює своєї форми і розмірів.

Звідси виходить, що в серединній площині відсутні переміщення в напрямках X та Y

$$u = v = 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0.$$

3) гіпотеза про ненавискування між шарами пластинки, що паралельні серединній площині.

$$\varepsilon_z = 0$$

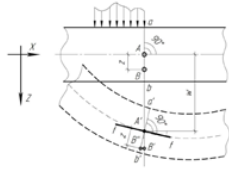
2. Переміщення та деформації у пластинках

На підставі першої гіпотези Кірхгофа переміщення w всіх точок однієї нормалі вздовж осі Z однакові і відповідають переміщенням довільно вибраної точки на серединній площині.

Ці переміщення називають **прогинами серединної площини**.

Довжина нормалі не змінюється, отже лінійна деформація теж відсутня

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$



З цього виразу слідує, що прогини пластинки w не залежать від координати Z і є функцією тільки двох змінних x та y
 $w = w(x, y)$

Виразимо горизонтальні переміщення u та v через прогин w .
 $u = -B'B''$

або

$$B'B'' = +z \sin \alpha \approx z \operatorname{tg} \alpha.$$

α – кут повороту нормалі $a'b'$ та дотичної ff ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Вирази деформацій через прогин w

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Решта деформацій відсутні. Отже, всі переміщення і деформації виражені через одну функцію прогину серединної площини.

3. Напруження у пластинках

3 гіпотеза Кірхгофа ($\sigma_z = 0$) дозволяє використати для пластинок фізичні рівняння виведені для узагальненого плоского напруженого стану.

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right.$$

Перетворимо формули узагальненого закону Гука

$$\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x, \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \text{аналогічно} \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\}$$

Таким чином отримані вирази для нормальних напружень.
 Дотичні напруження τ_{xy}

$$\tau_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Вираз для дотичних напружень

$$\tau_{xz} = \frac{E \cdot z^2}{2(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y).$$

При відсутності на основних – верхній та нижній гранях пластинки дотичного навантаження,
 $z = \pm \frac{h}{2}; \quad \tau_{xz} = 0.$

$$\frac{E \left(\frac{h}{2} \right)^2}{2(1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y) = 0 \quad f(x, y) = -\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

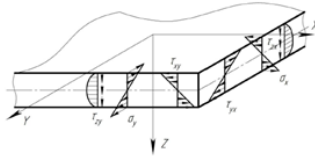
$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1 - \mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1 - \mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Таким чином, при згині тонкої пластинки в її перерізах виникають такі напруження:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1 - \mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1 - \mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\}$$

Епюри розподілу напружень по товщині пластинки



- ✓ напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} розподіляються по висоті перерізу пластинки (тобто вздовж осі Z) лінійно.
- ✓ епюри напружень τ_{xz} та τ_{yz} мають форму квадратної параболи
- ✓ всі напруження, як і деформації, виражені через одну функцію прогинів $w(x, y)$.

4. Внутрішні зусилля у пластинках

Усі напруження можна привести до внутрішніх зусиль: S_x , S_y – до згинальних моментів, S_{xy} та S_{yx} – до крутних моментів, S_{xz} та S_{yz} – до поперечних сил.

Виділимо елементи пластинки одиничної довжини уздовж осей X та Y .

У кожній точці на гранях цього елемента діють нормальні і дотичні напруження.

Рівнодіючі цих напружень на смужці висотою dz , виділений на межі з нормаллю x , зводять до таких елементарних зусиль:

$$dN_x = \sigma_x \cdot dz; \quad dS_x = \tau_{yx} \cdot dz;$$

$$dM_x = \sigma_x \cdot z \cdot dz; \quad dQ_x = \tau_{zx} \cdot dz;$$

$$dM_{yx} = \tau_{yx} \cdot z \cdot dz.$$

Підставляючи в ці формули вирази для напружень та проінтегрувавши по z , отримують наступні співвідношення для внутрішніх зусиль в перерізі, що розглядається

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0; \quad S_x = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

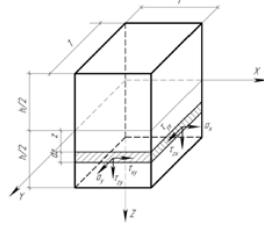
$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z^2 - z^2) dz = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w;$$

$$M_{yx} = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -(1-\mu) \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\mu) \cdot D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В виразах для моментів вводиться нова величина – циліндрична жорсткість, яка виступає фізико-геометричною характеристикою пластинки при згині.

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Аналогічно для перерізу з нормаллю y отримують



Основні рівняння згину пластинок:

- ✓ згинальні моменти

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\}$$

- ✓ поперечні сили

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \end{aligned} \right\} \text{ або } \left. \begin{aligned} Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \end{aligned} \right\}$$

крутний момент

$$H = -(1-\mu) \cdot D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$H = M_{xy} = M_{yx}.$$

Нормальні N_x , N_y і зсуваючі S_x , S_y зусилля при згині пластинки відсутні

Усі внутрішні зусилля вимірюють на одиницю ширини перерізу пластинки. Тому їхні розмірності – кНм/м та кН/м.

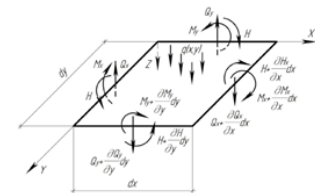
Всі зусилля виражені через функцію $w(x, y)$ прогинів серединної площини.

Порівнюючи між собою формули напружень і погонних зусиль, можна **виразити напруження через зусилля:**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x \cdot z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y \cdot z}{h^3}; \\ \tau_{xy} &= \frac{12H \cdot z}{h^3}; \\ \tau_{zx} &= 6Q_x \cdot \frac{(h^2 - z^2)}{h^3}; \quad \tau_{zy} = 6Q_y \cdot \frac{(h^2 - z^2)}{h^3} \end{aligned} \right\}$$

5. Диференціальне рівняння вигнутої серединної поверхні

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y)$$



$$D \nabla^4 w - q = 0.$$

Це диференціальне рівняння вигнутої середньої площини. Називають його також **рівнянням Софі Жермен**.

Функцію прогинів $w(x, y)$ отримують інтегруванням цього рівняння з урахуванням умов на контурі пластинки, тобто граничних умов.

6. Граничні умови для прямокутних пластин

Для пластин використовують два типи граничних умов: геометричні та статичні.

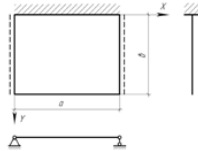
У **геометричних** умовах задають величини лінійних і кутових переміщень, зокрема для пластин – це прогини і кути повороту нормалі до середньої площини.

Статичні умови задають величини зусиль. При згині пластинки – це згинальні і крутний моменти, а також поперечні сили.

Розглянемо прямокутну пластинку з різними закріпленнями країв і покажемо який вид для них мають граничні умови.

1) На заземленому краю відсутні прогини і кути повороту нормалі до середньої площини в напрямку, перпендикулярному до краю. Якщо жорстко закріплено край, паралельний осі X , $Y=0$, то граничні умови будуть такими

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$



Якщо жорстко закріплено край, паралельний осі Y ($X=0$), то граничні умови (прогин w та кут повороту елемента в площині XOZ дорівнюють нулю):

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$



2) На шарнірно опертому краю (при $x=0$, $x=a$) відсутні прогини і згинальні моменти в напрямках, перпендикулярних до краю

$$w = 0; \quad M_x = 0.$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$



Для схеми коли шарнірно обертний край, котрий паралельний осі X , граничні умови

$$w = 0; \quad M_y = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

3) Для вільного краю відсутні всі погонні зусилля перетворюються в нуль



$$M_y = 0; \quad Q_y = 0; \quad H = 0.$$

Отже, маємо надлишок граничних умов: три, замість необхідних двох. Об'єднаємо дві останні умови в одну – для цього крутний момент і поперечну силу на контурі пластинки замінимо однією силою, яка буде їм статично еквівалентною

$$Q_y^*_{прив.} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \quad Q_y^*_{прив.} = -D \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

На вільному краю пластинки замість трьох умов можна записати дві:

Якщо вільний край паралельний осі Y , то граничні умови:

$$M_x = 0; \quad Q_x^*_{прив.} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Якщо вільний край паралельний осі X

$$M_y = 0; \quad Q_y^*_{прив.} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

4) При ковзному закріпленні пластинки вільно пересуваються у вертикальному напрямку, тому що вертикальні опорні зв'язки відсутні.

Граничні умови такі (край, паралельний осі Y)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad Q_x^*_{прив.} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$



Якщо в такий спосіб закріпити край, паралельний осі X , то граничні умови такі:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad Q_y^*_{прив.} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Лекція № 1.9

Тема лекції:

Методи рішення задач за теорією згину пластинки.

План лекції

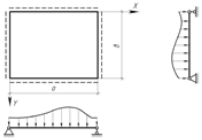
1. Рішення Нав'є
2. Метод Рітца-Тимошенко
3. Метод Бубнова-Гальоркіна.
4. Метод скінчених різниць
5. Розрахунок пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру

Література

1. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник для вузів / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
3. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: 1961. – 538 с.

Зміст лекції

1. Рішення Нав'є.



Це рішення отримано для задачі згину прямокутної пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру. Поперечне навантаження $q(x, y)$ вважаємо змінним за будь-яким законом.

Функцію прогинів $w(x, y)$ шукають у вигляді подвійного тригонометричного ряду

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$

Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів ряду A_{mn}

Перевіримо виконання граничних умов. При шарнірному закріпленні маємо

при $x=0$ і $x=a$ $w=0$ і $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$;

при $y=0$ і $y=b$ $w=0$ і $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$. При $x=0$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$ при $x=a$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0$.

при $y=0$ і $y=b$ $\sin \frac{n\pi y}{b} = 0$.

Таким чином, прогини на всіх гранях пластинки відсутні.

Другі похідні прогинів також містять множники

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \text{ і } \sin \frac{n\pi y}{b}$$

тому при $x=0$, $x=a$ і при $y=0$, $y=b$ також перетворюються в нуль. Таким чином, функція задовольняє всім граничним умовам і може бути використана для вирішення завдання.

Для визначення коефіцієнтів A_{mn} візьмемо четверті похідні функції прогинів і підставимо їх у рівняння Софі Жермен.

$$D \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y).$$

Навантаження $q(x, y)$ також можна подати у вигляді подвійного тригонометричного ряду у синусах:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Коефіцієнти цього ряду, згідно з теорією рядів Фур'є, визначають за формулою

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

З урахуванням цього отримаємо

$$D \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Рівність двох рядів виконується, якщо їх відповідні члени дорівнюють одне одному, тобт

$$D \pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}.$$

Звідси з урахуванням виразу для C_{mn}

$$A_{mn} = \frac{4}{D \pi^4 ab} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Отже, обрана функція прогинів у вигляді подвійного тригонометричного ряду синусів буде рішенням поставленої задачі

Подальша конкретизація задачі буде залежати від вигляду функції навантаження.

1. Розглянемо випадок згину пластинки під дією рівномірно розподіленого на всій поверхні навантаження.

$$q(x, y) = q = const.$$

Коефіцієнти ряду в прямокутній області визначають за формулою

$$C_{mn} = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 4q \frac{ab}{mn \cdot \pi^2}.$$

$$A_{mn} = \frac{16q}{D \pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Вираз для функції прогинів для випадку рівномірно-розподіленого навантаження на всій поверхні пластинки набуде вигляду

$$w(x, y) = \frac{16q}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Максимальний прогин в центрі пластинки при

$$\text{при } x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}$$

$$w_{\max} = \frac{16q}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Для практичного використання вираз зручно представити у такому вигляді

$$w_{\max} = \frac{\alpha q a^4}{E h^3}, \quad \alpha = \frac{192}{\pi^6} (1 - \mu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2}$$

Ряд, що входить у вираз для α , швидко сходиться.

Отриманий вираз для функції прогинів можливо підставити у вирази для згинальних моментів

$$M_x = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

Згинальні моменти досягають найбільшого значення в центрі пластинки

$$M_{x \max} = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{b};$$

$$M_{y \max} = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{b};$$

Аналогічно прогинам, отримані вирази можна записати у такому вигляді

$$M_{x \max} = \beta q a^2;$$

$$M_{y \max} = \beta_1 q a^2.$$

де коефіцієнти β та β_1 є функціями відношення сторін пластинки. Їх значення надаються у відповідних довідниках у вигляді таблиць

При знайденій функції прогинів можна визначити поперечні сили.

$$Q_x = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$Q_y = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)};$$

Найбільших значень поперечні сили досягають на серединах сторін пластинки.

$$x=0, y=\frac{b}{2}: Q_{x \max} = \frac{16q a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad Q_{x \max} = \gamma q a.$$

$$x=\frac{a}{2}, b=0: Q_{y \max} = \frac{16q a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad Q_{y \max} = \gamma_1 q a.$$

2. Метод Рітца-Тимошенко

Метод заснований на *принципі можливих переміщень* - для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума віртуальних робіт всіх прикладених до неї сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю.

$$\delta A - \delta U = 0$$

δA - робота зовнішніх сил (об'ємних чи поверхневих) на певному можливому переміщенні; δU - робота внутрішніх сил, яка являє собою приріст потенціальної енергії на тому ж можливому переміщенні з оберненим знаком

Відповідно до теореми Лагранжа-Діріхле, можна сформулювати наступний принцип мінімуму потенціальної енергії: з усіх можливих розподілів переміщень пружного тіла, переміщен-

ня, які задовольняють умови стійкої рівноваги (істинні), надають системі мінімального значення, тобто

$$U_n = U - A = \min$$

де U - робота пружної деформації тіла, що визначається за формулою

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz$$

а робота поверхневих та об'ємних сил відповідно до отриманого нами раніше виразу

$$A = \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \iint_S (X_u u + X_v v + Z_w w) ds$$

При згині пластинки об'ємними силами зневажають, а зі складових поверхневих сил, відмінною від нуля буде тільки одна $Z_w = q$

Підставимо це значення в формулу і прийемо, елемент поверхні ds у вигляді прямокутника зі сторонами dx та dy - $ds = dx dy$. Таким чином отримуємо новий вираз для роботи зовнішніх сил при згині пластинки

$$A = \iint_S q w dx dy$$

Якщо наблизити значення функції обирати у вигляді ряду $w = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \phi_{kl}$, то можемо записати вираз для потенціальної енергії системи

$$U_n = U_n(a_{kl})$$

тобто повна енергія буде являтися функцією від коефіцієнтів
Щоб знайти значення параметрів a_{ik} , скористаємося умовою мінімуму потенціальної енергії

$$\frac{\partial U}{\partial a_{ik}} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Похідна квадратичної функції параметрів це лінійна функція цих параметрів, тому дана умова буде являти собою систему n^2 лінійних рівнянь відносно шуканих параметрів a_{ik}

Таким чином, метод Рітца-Тимошенко дозволяє замінити задачу пошуку рішення диференціального рівняння згину пластинки задачею про знаходження мінімуму потенціальної енергії.

3. Метод Бубнова-Гальоркіна

Метод заснований на властивості ортогональних функцій, для яких виконується умова

$$\int_a^b \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0.$$

Якщо функцію прогинів $w(x)$ замінити її наближеним виразом у формі ряду $w_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$,

та застосувати умову, щоб вона була ортогональна хоча б до обмеженого класу функцій, які складають ряд, отримуємо систему

$$\int_L (Ew'' - q) \phi_i dx = 0$$

$$i=1, 2, 3, \dots, n$$

На основі даної системи рівнянь для визначення параметрів a_k базується метод Бубнова-Гальоркіна.

Розглянемо функцію прогинів у вигляді ряду

$$w_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \phi_{ik}.$$

Застосуємо умови, щоб ліва частина рівняння Софі Жермен була ортогональна кожній з функцій ϕ_{ik} ϕ_{lx} , y ϕ_{ly} ряду.

Ці умови призводять до такої системи рівнянь:

$$\int_0^a \int_0^b (D \nabla^4 w - q) \varphi_{ik} dx dy = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Рішення системи дає значення коефіцієнтів a_{ik} і, тим самим, функцію прогинів.

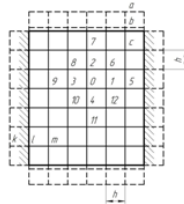
Метод Бубнова-Гальоркіна дозволяє простіше, ніж у методі Рітца-Тимошенко отримати значення коефіцієнтів ряду. Труднощі тут пов'язані з підбором функцій φ_{ik} , так як вони повинні задовольняти не тільки кінематичним, але і статичним граничним умовам.

4. Метод скінчених різниць

Суть методу скінчених різниць викладена в лекції 1.7.

З урахуванням наведених у цій темі виразів похідних диференціальне рівняння згнутої серединної поверхні, тобто рівняння Софі Жермен для точки 0 сітки прямокутної пластинки набуде такого вигляду:

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12}) + w_5 + w_7 + w_9 + w_{11} = \frac{q_0 h^4}{D}.$$



Ці рівняння складають для всіх внутрішніх точок сітки.

Значення прогинів, які входять у них, для точок на контурі і за контуром визначають з граничних умов:

Для точок на защемленому (т. l) і шарнірно опертому (т. b) контурах прогини відсутні:

$$w_b = 0; \quad w_l = 0.$$

Умова відсутності повороту нормалі на защемленому краю пластинки призводить до співвідношення

$$w_k = w_n,$$

а умова відсутності згинальних моментів на шарнірно опертому краю дає:

$$w_a = -w_c.$$

Після підстановки граничних умов рішення системи рівнянь дає значення прогинів у внутрішніх точках сітки.

Значення погонних зусиль (згинальні моменти, поперечні сили, крутний момент) визначають за відомими формулами через кінцеві різниці.

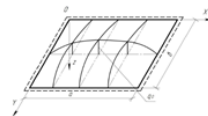
5. Розрахунок пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру

Розглянемо приклад розрахунку пластинки шарнірно-опертої по всьому контуру для різних випадків її навантаження

Синусоїдальне навантаження

До прямокутної шарнірно опертої пластинки прикладене навантаження, розподілене за законом

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$



При $x = 0$ і $x = a$

$$\sin \frac{\pi x}{a} = \sin 0 = 0$$

при $y = 0$ і $y = b$

$$\sin \frac{\pi y}{b} = \sin \pi = 0;$$

при $x = a$ і $x = 0$

при $y = b$ і $y = 0$

$$\sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Таким чином, у будь-якій точці контуру виявляється $q = (x, y) = 0$.

В центрі пластинки

$$x = a/2; \quad y = b/2;$$

$$\sin \frac{\pi x}{a} = \sin \frac{\pi y}{b} = 1$$

$$q = (x, y) = q_0$$

Потрібно знайти вираз для прогинів $w(x, y)$, що задовольнятиме рівняння Софі Жермен та граничним умовам

$$x=0 \begin{cases} w=0; \\ M_x=0; \end{cases} \quad x=a \begin{cases} w=0; \\ M_x=0; \end{cases} \quad y=0 \begin{cases} w=0; \\ M_y=0; \end{cases} \quad y=b \begin{cases} w=0; \\ M_y=0. \end{cases}$$

Приймаємо, що прогини описуються законом

$$w(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

тут A – невідома величина, тобто прогин у центрі пластинки

Якщо підставити прогини у рівняння згинальних моментів, то отримаємо

$$M_x = D A \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \mu \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$M_y = D A \left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \mu \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Всі ці вирази за рахунок синусоїдальної складової рівні нулю на всьому контурі пластинки, отже граничні умови задовольняються.

Підставляємо вираз для навантаження і прогинів у основне рівняння згину пластинок та визначимо прогин у центрі пластинки

$$A = \frac{q_0}{D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 D (1+k^2)^2},$$

$$k = a/b.$$

Отже, кінцевий вираз для визначення прогину

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 D (1+k^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Знаходимо вирази для внутрішніх зусиль (згинальних моментів)

$$M_x = \frac{q_0 a^2 (1+\mu k^2)}{\pi^2 (1+k^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{q_0 a^2 (\mu + k^2)}{\pi^2 (1+k^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

крутного моменту

$$H = \frac{q_0 a^2 k (1+\mu)}{\pi^2 (1+k^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b};$$

і поперечних сил

$$Q_x = \frac{q_0 a}{\pi (1+k^2)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$Q_y = \frac{q_0 a k}{\pi (1+k^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Довільне навантаження.

У цьому випадку навантаження потрібно представити у вигляді подвійного тригонометричного ряду

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Коефіцієнти цього ряду

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Прогин

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Кожний член цього ряду задовольняє умовам шарнірного обпирання, так само, як це було доведено

Після підстановки прогину у рівняння Софі Жермен, знаходимо

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{q_0 a^4 C_{mn}}{\pi^4 D (m^2 + k^2 n^2)}$$

Підставляючи значення прогину в центрі пластини в загальне рівняння прогину знаходимо кінцевий вираз для прогину, а після цього вирази для внутрішніх зусиль. Усі вони мають вигляд подвійних рядів.

Рівномірно розподілене навантаження.

Якщо пластинка завантажена рівномірно розподіленим навантаженням, то згідно коефіцієнти ряду можна визначити за формулою:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{4q}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ &= \frac{4q}{ab} \left(\frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{a} \right)_0^a \times \left(\frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)_0^b = \\ &= \frac{4q}{\pi^2 mn} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

При парних значеннях m та n (вирази у дужках дорівнюють нулю)
 $\cos m\pi = \cos n\pi = 1$

При непарних значеннях (вирази у дужках дорівнюють -2).
 $\cos m\pi = \cos n\pi = -1$

Зрештою

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{16q}{\pi^2 mn} \\ w(x, y) &= \frac{16q a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \bar{A}_{mn} &= \frac{1}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} \end{aligned}$$

В реальних розрахунках обмежуються кінцевою кількістю членів ряду, їх кількість обирають залежно від потрібної точності та швидкої збіжності ряду.

Чим плавніше розподілене навантаження, тим скоріше збігаються ряди.

Лекція № 1.10

Тема лекції:

Основи розрахунку тонких оболонок.

План лекції

1. Основні визначення
2. Розрахунок оболонок за безмоментною теорією.
 - 2.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні.
 - 2.2. Згин осі оболонки обертання.
3. Оболонка довільної форми.
4. Розрахунок оболонок за моментною теорією.
 - 4.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні.
 - 4.2. Крайовий ефект у оболонці обертання.

Література

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвей. – М.: Наука», 1976. –512 с.
2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1993. –232 с.
3. Пелех Б.Д. Обобщенная теория оболочек/ Б.Д. Пелех. – Львов, Вища школа, 1978. – 159 с.
4. Линейная теория тонких оболочек/В. В. Новожилков, К- Ф. Черных, Е: И. Михайловский. – Львов: Политехника, 1991. – 656 с.
5. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В.Александров, В.Д. Потапов. – М.: Вышш.шк., 1990. – 400 с.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: В.школа, 1982. – 264 с.
7. Требушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М: Наука, 1984. – 320 с.

Зміст лекції

1. Основні визначення.

Оболонка – це тіло, утворене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими – товщина h , мала порівняно з іншими розмірами.

Поверхню, що ділить товщину оболонки навпіл, називають серединною поверхнею. Зазвичай всі рівняння тонкої оболонки відносяться до серединної поверхні.

Розглянемо елемент серединної поверхні оболонки і розсічемо його двома взаємно перпендикулярними площинами, що проходять через нормаль ν у точці M .

Лінії перетину (A_1B_1 і A_2B_2) цих площин з серединною поверхнею є криві, радіуси кривизни - R_1 і R_2 .

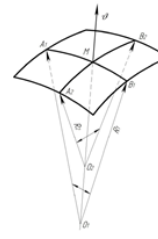
Величини, зворотні цим радіусам $K_1 = 1/R_1$ і $K_2 = 1/R_2$ називаються кривизнами серединної поверхні оболонки.

На серединній поверхні оболонки завжди можна знайти дві взаємно перпендикулярні лінії, одна з яких має найбільшу, а інша найменшу кривизну. Саме ці кривизни зазвичай позначають K_1 , K_2 і називають головними кривизнами, а відповідні їм радіуси – головними радіусами. Добуток головних кривизни називають гауссовою кривизною:

$$\Gamma = K_1 \cdot K_2$$

Залежно від величини гауссової кривизни розрізняють оболонки

- додатної $-\Gamma > 0$ (сферичні, еліптичні та параболічні),
- від'ємної – якщо поверхня випукло-увігнута, знаки кривизни різні і $\Gamma < 0$ (гіперболічні),



- нульової – якщо один з головних радіусів кривизни рівен нескінченості (кривизна рівна нулю), то $\Gamma=0$ (циліндричні, конічні)
- змішаної кривизни - гороподібні

Під дією навантаження в оболонці виникають внутрішні зусилля, які можна розділити на дві групи. До першої відносять нормальні зусилля N_1 і N_2 , а також зсувні S_1 і S_2 зусилля. У другу групу включають згинальні M_1 , M_2 та крутні M_{12} , M_{21} моменти і поперечні сили Q_1 , Q_2

Оболонки, в яких діють зусилля тільки першої групи і напруження можна вважати постійними за товщиною, зазнають безмоментного стану. Напружений стан, у якому діють також і зусилля другої групи, називають моментним.

Відповідно в залежності від виду напруженого стану розрізняють безмоментну та моментну теорію оболонок.

Розрахунок за безмоментною теорією - умови

- кривизни середньої поверхні змінюються плавно
- навантаження уздовж середньої поверхні змінюється плавно
- навантаження на краях оболонки діє в площинах, дотичних до середньої поверхні
- закріплення на краях оболонки дозволяють вільні переміщення в напрямку нормалі до середньої поверхні

Для раціонального використання матеріалів безмоментний напружений стан дуже вигідний. При проектуванні конструкцій необхідно прагнути до того щоб передбачити умови в яких може бути реалізований цей стан.

Безмоментна теорія розрахунку оболонок ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Основне допущення: оболонка не чинить опір згину, в кожній точці прямої нормалі виникають напруження паралельні до дотичної площини, які рівномірно розподілені за товщиною оболонки.

Самі напруження в такому випадку називають мембранними напруженнями.

2. Розрахунок оболонок за безмоментною теорією

Якщо середина поверхні оболонки отримується в результаті обертання певної кривої (твірна) відносно деякої осі, то оболонка становить тіло обертання. Вона має одну вісь симетрії. Криву обертання $r = r(z)$ називають меридіаном (меридіональний напрямок). Окрема взята точка цієї кривої описує коло радіусом r – паралель (кілецевий напрямок). Величину r називають радіусом паралельного кола.

При осесиметричному навантаженні в усіх перерізах оболонки обертання, які утворені площинами, що проходять через вісь симетрії і в перпендикулярних до них перерізах будуть відсутні зсувні (кососиметричні) зусилля. $S_1 = S_2 = 0$

Розглянемо рівновагу елемента. На елемент діють меридіональні погонні зусилля N_1 , кілецеві погонні зусилля N_2 Також на елемент діє навантаження, складова якого вздовж нормалі до поверхні – q_φ .

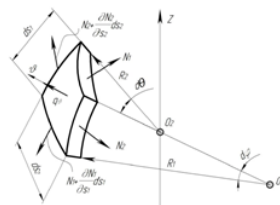
Довжини лінійних елементів пропорційні диференціалам незалежних змінних, можемо записати рівність диференціалів кутів диференціалам дуг

$$d\varphi = \frac{ds_1}{R_1}, \quad d\theta = \frac{ds_2}{R_2}$$

Проекція сил на нормаль ν до поверхні дає

$$q_\varphi ds_1 ds_2 - N_1 ds_2 \frac{d\varphi}{2} - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_2 \frac{d\varphi}{2} - N_2 ds_1 \frac{d\theta}{2} - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} ds_2 \right) ds_1 \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Нехтуючи величинами третього порядку малості і замінюючи диференціали кутів диференціалами дуг після скорочення на ds_1 , ds_2 отримаємо



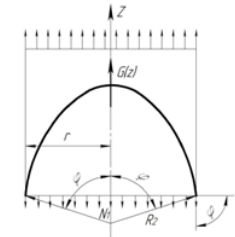
$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_\varphi.$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_m}{\rho_r} = \frac{\rho}{\delta}$$

Рівняння Лапласа, рівняння рівноваги або рівняння зони Відінемо довільну скінчену частину оболонки купола і спроjektуємо діючі на неї сили на вісь Z. Рівнодіюче навантаження $G(z)$, прикладене до відтятої частини оболонки, завдяки осесиметричності діє вертикально. У цьому випадку отримаємо

$$G(z) - N_1 \cdot 2\pi r \sin\varphi = 0,$$

$$N_1 = \frac{G(z)}{2\pi r \sin\varphi}.$$



Вісесиметричне навантаження сферичної оболонки

Меридіональні зусилля дають горизонтальні складові $H = N_1 \cos\varphi$,

На нижньому краю оболонки $H_0 = N_1^0 \cos\varphi_0$.

При навантаженні $G(z)$, спрямованому вниз, ці зусилля розтягують опорну частину, і щоб їх сприймати купол встановлюють на опорне кільце.

Розглянемо половину опорного кільця, звантаженого радіальним навантаженням H_0 .

$$2N_k - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_0 r_0 \cos\theta d\theta = 0$$

отримаємо розтягуюче зусилля в кільці $N_k = H_0 \cdot r_0$, з урахуванням $r_0 = R_2^0 \sin\varphi_0$

$$N_k = \frac{1}{2} N_1^0 R_2^0 \sin 2\varphi_0.$$

Найбільше значення зусилля N_k досягає при $\varphi_0 = 45^\circ$, а при $\varphi_0 = 90^\circ$ наближається до нуля

2.2. Згин осі оболонки обертання

Відсікаємо верхню частину оболонки:

$Q(z)$ – горизонтальна складова навантаження

$M(z)$ – момент відносно осі перетину.

N_1 – зусилля в точці перетину оболонки, що лежить на осі Y,

Закон зміни меридіонального зусилля вздовж паралелі

$$N_1 = N_1^0 \cdot \cos\theta.$$

Горизонтальна проекція цих зусиль

$$H = N_1 \cos\varphi = N_1^0 \cos\theta \cos\varphi$$

$$Q_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} H \cdot \cos\theta \cdot r d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^0 \cdot r \cdot \cos^2\theta \cdot \cos\varphi d\theta = 4\pi \cdot r \cdot N_1^0 \cdot \cos\varphi$$

Меридіональні зусилля створюють також момент відносно осі X, який зрівноважує зовнішній момент $M(z)$:

$$M(z) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1 \cdot \sin\varphi \cdot r \cdot y d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^0 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot r^2 \cdot \cos\theta d\theta = 4\pi \cdot r^2 \cdot N_1^0 \cdot \sin\varphi$$

Вважаючи, що зсувні зусилля S у горизонтальному перетині оболонки $S = S^0 \sin\theta$, знайдемо їх рівнодіючу

$$Q_2 = 2 \int_0^\pi S r \sin \theta d\theta = 2 \int_0^\pi S^0 r^2 \sin^2 \theta d\theta = \pi r S^0.$$

Рівнодіючі Q_1 і Q_2 повинні зрівноважити поперечне навантаження $Q(z)$, прикладене до відтятої частини оболонки

$$Q(z) = Q_1 + Q_2 = \pi r (N_1^0 \cos \varphi + S^0).$$

меридіональне зусилля

$$N_1^0 = \frac{M(z)}{4\pi r^2 \sin \varphi}.$$

зсувне зусилля

$$S^0 = \frac{Q(z)}{\pi r} - \frac{M(z)}{4\pi r^2 \operatorname{tg} \varphi}.$$

Ці формули дають можливість через горизонтальну складову поперечного навантаження $Q(z)$ і момент $M(z)$ визначити меридіональне зусилля і зусилля зсуву в перерізах оболонки.

3. Оболонка довільної форми

Для відображення поверхні оболонки зазвичай використовують ортогональну систему криволінійних координат α і β , які відповідають лініям головних кривизн.

Нескінченно малі дуги ds_1 і ds_2 можна вважати відрізками прямих. В теорії поверхонь їх називають лінійними елементами поверхні і вони пропорційні диференціалам координат

$$ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta.$$

Коефіцієнти пропорційності A і B (коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні).

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2.$$

Даний вираз називається першою квадратичною функцією.

Наприклад, для оболонки обертання, якщо координату α відраховувати уздовж меридіана, β – уздовж паралелі, а розташування точки на поверхні визначити координатою z на меридіані і кутом θ на паралелі маємо

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz, \quad ds_2 = r d\theta.$$

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad B = r.$$

Для дослідження внутрішніх зусиль виділимо на серединній поверхні оболонки нескінченно малий елемент CDFE.

В координатах α і β він має форму ортогонального криволінійного чотирикутника зі сторонами

$$CD = ds_1 = A d\alpha;$$

$$EF = ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \beta} d\beta = \left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha;$$

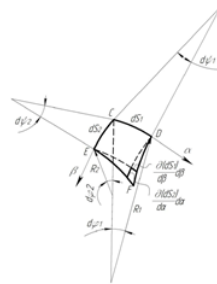
$$CE = ds_2 = B d\beta;$$

$$DF = ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha} d\alpha = \left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta.$$

Кути $d\varphi_1$ ($d\varphi_2$)

$$d\varphi_1 \approx \frac{CD}{R_1} = \frac{A d\alpha}{R_1}; \quad d\varphi_2 \approx \frac{CE}{R_2} = \frac{B d\beta}{R_2}.$$

Кути $d\varphi_1$ і $d\varphi_2$ знаходяться в дотичній площині, вони утворені напрямком суміжних дотичних до ліній кривизн, які проходять через точки C, D, E



$$d\varphi_1 \approx \frac{EF - CD}{CE} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha; \quad d\varphi_2 \approx \frac{DF - CE}{CD} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta.$$

У безмоментному стані на гранях виділеного елемента діють погонні нормальні N_1, N_2 і зсуваючі S_1, S_2 зусилля. В ортогональній системі координат XYZ поверхневе навантаження представлене складовими його інтенсивності $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$.

З рівняння моментів, отримаємо

$$S_1 = S_2 = S.$$

Це співвідношення виражає закон парності зсувних зусиль. Розглянемо умову рівноваги елемента CDFE,

$$N_1 \frac{\partial(ds_2)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha ds_2 + S_2 \frac{\partial(ds_1)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} d\beta ds_1 -$$

$$- N_2 ds_1 d\psi + S_1 ds_2 d\psi_1 + X_\alpha ds_1 ds_2 = 0.$$

Перетворивши похідні та підставивши диференціали кутів з отриманих формул, отримуємо перше рівняння рівноваги.

Проектуючи всі сили на вісь Y отримуємо аналогічно друге і на вісь Z- третє рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (S A) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} + X_\alpha A B &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (S B) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + Y_\alpha A B &= 0; \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - Z_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Ці рівняння представляють собою повну систему основних рівнянь безмоментної теорії оболонок, яка виведена в лініях головних кривизн серединної поверхні оболонки.

Сферична оболонка $R_1 = R_2 = R$.

Відраховуючи координату α уздовж меридіана і замінюючи її на φ , а координату β – в кільцевому напрямку і замінюючи її на θ , отримаємо

$$ds_1 = R d\varphi, \quad ds_2 = R \sin \varphi d\theta,$$

$$A = R, \quad B = R \sin \varphi.$$

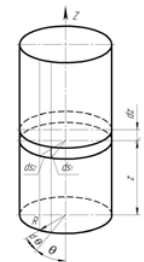
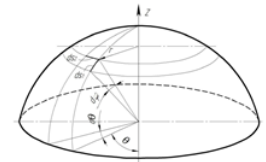
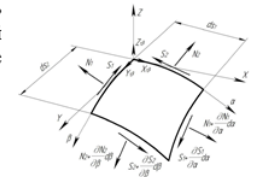
З урахуванням цього рівняння рівноваги для сферичної оболонки набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_\alpha R \sin \varphi &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (S \sin \varphi) + S \cos \varphi + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Y_\alpha R \sin \varphi &= 0; \\ N_1 + N_2 - Z_\alpha \cdot R &= 0. \end{aligned}$$

Циліндрична оболонка

$$R_1 = \infty; \quad R_2 = R; \quad ds_1 = dz; \quad ds_2 = R d\theta; \quad A = 1; \quad B = R.$$

Рівняння рівноваги для циліндричної оболонки з врахуванням залежностей набудуть вигляду



$$\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Y_\varphi = 0;$$

$$N_2 - Z_\varphi \cdot R = 0.$$

4. Розрахунок оболонок за моментною теорією

4.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні

Розглянемо рівновагу елемента abcd середньої поверхні оболонки

На його гранях, крім зусиль N_1, N_2 діють поперечні сили Q_1 і згинальні моменти M_1, M_2 .

З симетрії навантаження випливає, що зсувні зусилля, крутний момент і поперечні сили Q_2 відсутні, а зусилля N_2 і моменти M_2 будуть постійні уздовж паралелі.

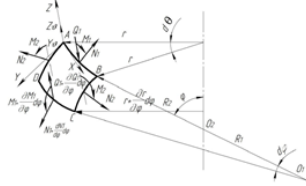
Навантаження задане складовими Y_\square і Z_\square .

Умови рівності нулю суми проекцій сил на осі Y та Z, а також моментів відносно осі X призводять до таких умов рівноваги:

$$\frac{d}{d\varphi}(N_1 r) - N_2 R_1 \cos\varphi + Q_1 r + Y_\varphi r R_1 = 0;$$

$$\frac{d}{d\varphi}(Q_1 r) - N_1 r - N_2 R_1 \sin\varphi + Z_\varphi r R_1 = 0;$$

$$\frac{d}{d\varphi}(M_1 r) - M_2 R_1 \cos\varphi - Q_1 r R_1 = 0.$$



Решта рівнянь рівноваги перетворюються у тотожності, задача є статично невизначеною і тому необхідно досліджувати деформації

При осесиметричному навантаженні переміщення точок середньої поверхні визначаються двома складовими v – уздовж дотичної до меридіана (тангенціальне переміщення) і w – вздовж нормалі до поверхні (радіальне переміщення).

Розглянемо деформацію елемента AB меридіана довжиною $R_1 d\varphi$. Після деформації довжина елемента змінюється на деяку величину, що буде дорівнювати подовженню від тангенціальних переміщень точок A і B та від радіальних

$$A'B' - AB = \frac{dv}{d\varphi} d\varphi + w d\varphi$$

Відносно подовження меридіана (лінійна деформація оболонки в меридіональному напрямку)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right).$$

Приріст радіусу паралельного кола відповідає горизонтальній проекції відстані AA'

$$r' - r = v \cos\varphi + w \sin\varphi.$$

Ця величина визначає лінійну деформацію оболонки в кільцевому напрямку

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r} \cos\varphi + \frac{w}{r} \sin\varphi = \frac{1}{R_2} (v \cos\varphi + w).$$

Окрім лінійних деформацій відбувається зміна кривизни меридіана оболонки. Поворот нормалі в точках A і B

$$\psi_A = \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi};$$

$$\psi_B = \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) d\varphi.$$

Відношення різниці кутів повороту нормалі до довжини $R_1 d\varphi$ дуги AB дає приріст кривизни меридіана:

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{1}{R_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(v - \frac{dw}{d\varphi} \right).$$

Поворот нормалі відносно вертикальної осі в кожній точці паралелі однаковий. Відповідний взаємний поворот нормалей в суміжних точках паралелі складе

$$\left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos\varphi d\theta.$$

Приріст кривизни паралелі отримаємо розподілом величини цього повороту на довжину елемента паралелі $r d\theta$

$$\chi_2 = \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{\cos\varphi d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{R_1 r} \left(v - \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos\varphi.$$

Таким чином отримуємо чотири формули, які пов'язують деформації і переміщення в оболонці обертання, яка знаходиться під дією симетричного навантаження

Співвідношення між зусиллями і деформаціями представимо спрощеними рівняннями теорії тонких оболонок

$$N_1 = \frac{E h}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2);$$

$$N_2 = \frac{E h}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1);$$

$$M_1 = D (\chi_1 + \nu \chi_2);$$

$$M_2 = D (\chi_2 + \nu \chi_1).$$

Отже, для розрахунку моментної оболонки обертання при осесиметричному навантаженні маємо 11 рівнянь:

4.2. Крайовий ефект в оболонці обертання

У тонких оболонках обертання при осесиметричному навантаженні згинальні моменти M_1, M_2 швидко спадають вздовж меридіана при віддаленні від місця появи безмоментного стану (від закріпленого краю, від місця прикладання зосередженого навантаження). Розв'язки, отримані з рівнянь моментної і безмоментної теорій, практично збігаються. Зону, в якій наявності зусиль моментного стану не можна нехтувати, називають зоною крайового ефекту.

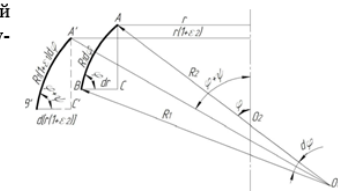
Ця зона поширюється уздовж меридіана на довжину, співрозмірну з частками радіусу його кривизни R_1 . Тому в межах цієї зони радіуси R_1, R_2 і кут φ можна вважати постійними. Зміна моментних зусиль тут має характер швидко згасаючих коливань. Тому похідні функцій зусиль і деформацій у межах зони крайового ефекту завжди більші самих зусиль і деформацій. Це дає можливість всюди, де сумуються зусилля, переміщення і деформації з їх похідними, залишити лише відповідні похідні вищого порядку.

З урахуванням того, що в задачі про крайовий ефект навантаження відсутні, рівняння рівноваги набувають вигляду:

$$R_2 \sin\varphi \frac{dN_1}{d\varphi} - N_2 R_1 \cos\varphi + Q_1 R_2 \sin\varphi = 0;$$

$$R_2 \frac{dQ_1}{d\varphi} - N_1 R_2 - N_2 R_1 = 0;$$

$$R_2 \sin\varphi \frac{dM_1}{d\varphi} - M_2 R_1 \cos\varphi - Q_1 R_1 R_2 \sin\varphi = 0.$$



Геометричні рівняння перетворимо введенням нового змінної ψ – кута повороту нормалі до меридіана після деформації

Приріст кривизни можна виразити через ψ так

$$\chi_1 = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{d\varphi}; \quad \chi_2 = \frac{\psi}{R_2} \cdot \text{ctg} \varphi.$$

Для визначення ψ розглянемо елемент меридіана. З криволінійного трикутника ABC випливає, що до деформації

$$\cos \varphi = \frac{1}{R_1} \frac{dr}{d\varphi}.$$

Відповідно, після деформації з трикутника $A \square B \square C \square \square$, знаходимо

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{d[r(1 + \varepsilon_2)]}{R_1(1 + \varepsilon_1)d\varphi}. \quad (1 + \varepsilon_1)(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) = \frac{r}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\varepsilon_2}{R_1} \frac{dr}{d\varphi}$$

або з урахуванням малості деформацій

$$\varepsilon_1 \cos \varphi - \psi \sin \varphi = \frac{R_2}{R_1} \sin \varphi \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \varepsilon_2 \cos \varphi.$$

$$\psi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{ctg} \varphi - \frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}.$$

Рівняння зміни кута дотичної до меридіана

В останньому виразі при досить великих значеннях $\varphi (\varphi > 30^\circ)$ першим доданком можна знехтувати порівняно з доданком, що містить похідну деформації. Тоді

$$\psi = -\frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}.$$

Наближене диференціальне рівняння крайового ефекту

$$\frac{R_2^4}{R_1^4} \frac{d^4 \psi}{d\varphi^4} + 4k^4 \psi = 0, \quad k^4 = 3(1 - \nu) \frac{R_2^3}{h^2}.$$

Для оболонки обергання замість кута φ введемо нову координату – дугу меридіана s
 $ds = R_1 d\varphi$.

$$\frac{d^4 \psi}{ds^4} + 4 \left(\frac{k}{R_2} \right)^4 \psi = 0.$$

Розв'язок цього рівняння записується в наступному вигляді

$$\psi = e^{-\frac{k}{R_2} s} \left(A \cos \frac{k}{R_2} s + B \sin \frac{k}{R_2} s \right).$$

Зусилля крайового ефекту біля нижнього краю оболонки можна визначити за формулами

$$Q_1 = -\frac{2Dk^2}{R_2^2} e^{-\frac{k}{R_2} s} \left(D \cos \frac{k}{R_2} s - F \sin \frac{k}{R_2} s \right);$$

$$N_1 = Q_1 \text{ctg} \varphi;$$

$$N_2 = \frac{2Dk^3}{R_1 R_2^2} e^{-\frac{k}{R_2} s} \left[(A+B) \cos \frac{k}{R_2} s + (B-A) \sin \frac{k}{R_2} s \right];$$

$$M_1 = -\frac{Dk}{R_2} e^{-\frac{k}{R_2} s} \left[(A-B) \cos \frac{k}{R_2} s + (A+B) \sin \frac{k}{R_2} s \right];$$

$$M_2 = \nu M_1.$$

Розрахунок моментної оболонки обергання на осесиметричні навантаження виконують у такій послідовності. Спочатку визначають зусилля безмоментного стану. Отримані зусилля додають до зусиль крайового ефекту і з граничних умов визначають постійні А і В спільного рішення.