МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

І.О.Ластівка, В.К.Репета, О.Д.Глухов

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

Київ 2020

УДК 512. 64 (075.8)
ББК В11.Я7
Д 332

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

В. К. Репета – канд. фіз.–мат. наук, доц.

О. Д. Глухов – канд. фіз.–мат. наук, доц.;

Рецензент:

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол № _ від __________).

Вища математика. Числові методи: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, В. К. Репета, О. Д. Глухов. – К.: НАУ, 2020.– 56 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика» та «Числові методи». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Числові методи», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

Тема 1.2.1. Математичні моделі та числові методи.

Зміст. *Предмет обчислювальної математики. Моделі, методи, алгоритми.*
"Колесо Самарського". Наближені числа і машинна арифметика. Джерела і класифікація похибок. Оцінки абсолютної та відносної похибок. Поняття коректності та обумовленості . Складність алгоритмів.

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов’язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисциплін «Вища математика» та «Числові методи» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов’язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв’язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальних дисциплін «Вища математика» та «Числові методи» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв’язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв’язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» та «Числові методи» для студентів технічних спеціальностей.

У пропонованій методичній роботі наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим навчальним програмам дисциплін «Вища математика», «Числові методи». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв’язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Числові методи відіграють важливу роль при розв’язанні багатьох прикладних задач, зокрема, у сучасній автоматиці, електротехніці, технічній фізиці тощо.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

План

1. Предмет обчислювальної математики. Моделі, методи, алгоритми.
2. Наближені числа і машинна арифметика. Джерела і класифікація похибок.
3. Оцінки абсолютної та відносної похибок.
4. Поняття коректності та обумовленості . Складність алгоритмів.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** поняття математичної моделі, методів, алгоритмів, джерела і класифікацію похибок, означення абсолютної та відносної похибок, правила оцінювання абсолютної та відносної похибок, поняття коректності та обумовленості; ***уміти:*** наближувати числа, оцінювати абсолютну та відносну похибки.

Основні теоретичні відомості

Числові методи є основним апаратом розв'язання математичних задач.

Чисельні методи бувають двох типів: *прямі* та *ітераційні*. В прямих методах розв'язок задачі досягається за скінченну кількість кроків. В ітераційних методах виконується певна кількість ітерацій до отримання наближеного розв'язку із заданою точністю.

У цілому числові методи є ітераційними.

Ітерація – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі.

Важливим елементом ітераційного процесу є перевірка критерію його зупинки. Здебільшого вимагають, щоб наближені розв’язки, отримані на двох послідовних ітераціях були достатньо близькими.

Для оцінювання числових методів розв'язання певної задачі вводять такі їх основні характеристики:

трудомісткість;

порядок методу;

збіжність;

швидкість збіжності;

стійкість до похибок обчислень;

стійкість до похибок вихідних даних.

Чисельний метод називається збіжним, якщо наближений розв'язок $x_k \to x^*$ зі збільшенням *k*.

Однією з основних вимог до числового методу є формулювання умов, за яких метод гарантовано збігається.

Розв'язок, отриманий за допомогою числового методу, зазвичай є наближеним, тобто містить деяку похибку.

Похибки обчислень за типом їх походження можна подати у вигляді трьох груп.

1. Неусувні похибки. До цього типу належить похибки вихідних даних, значення яких використовуються у подальших обчисленнях.

2. Похибки методу. Цей тип похибок породжений вибраним методом наближеного розв'язання поставленої задачі.

3. Похибки заокруглень.

Абсолютною похибкою Δa числа a називається абсолютне значення різниці між даним числом та його наближеним значенням $\tilde{a}$, тобто: $\Delta a = |a - \tilde{a}|$. *Відносною* похибкою δa числа $a \neq 0$ називається відношення абсолютної похибки Δa до абсолютного значення числа a, тобто $\delta a = \dfrac{\Delta a}{a}$.

На практиці здебільшого точне значення величини є невідомим. Тому замість теоретичних понять абсолютної та відносної похибок використовують практичні поняття граничної абсолютної та граничної відносної похибок.

Під граничною абсолютною похибкою наближеного значення $\tilde{a}$ розуміють будь-яке значення Δ_a таке, що виконується нерівність

$$\Delta a = |a - \tilde{a}| \leq \Delta_a .$$

Граничною відносною похибкою δ_a наближеного значення $\tilde{a}$ називають будь-яке значення Δ_a таке, що виконується нерівність

$$\delta \leq \delta_a .$$

Граничні абсолютна та відносна похибки пов'язані рівністю

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}.$$

Похибки арифметичних операцій

1. Абсолютна гранична похибка суми наближених чисел дорівнює сумі абсолютних граничних похибок цих чисел, тобто якщо $u = x + y$, то $\Delta u = \Delta x + \Delta y$.

2. Гранична відносна похибка суми чисел, що мають однакові знаки, не перевищує найбільшої з граничних відносних похибок цих чисел, тобто якщо $u = x_1 + x_2 + ... + x_n$, то $\delta u \le \max(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n})$.

3. Якщо $u = x + y$, де $x > 0,\ y > 0$, то $\Delta u = \Delta x + \Delta y$, $\delta u = \dfrac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|}$.

4. Гранична відносна похибка добутку $u = xy$ наближених ненульових чисел x та y дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел, тобто $\delta_u = \delta_x + \delta_y$.

5. Гранична відносна похибка частки $u = \dfrac{x}{y}$ наближених ненульових чисел x та y дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел, тобто $\delta_u = \delta_x + \delta_y$.

Похибка довільної функції

Якщо довільна функція $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ — наближені величини, має частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то гранична абсолютна похибка результуючого значення функції *u* в точці $(x_1, x_2, ..., x_n)$ обчислюють за формулою

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F(M)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i},$$

в якій Δ_{x_i} — граничні абсолютні похибки значень x_i $(i = 1, 2, ..., n)$

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні групи методів розв'язання математичних задач та їх характеристики.
2. Назвіть основні характеристики чисельних методів. Розкрийте їх суть.
3. Назвіть та охарактеризуйте основні етапи розв'язання практичних задач на комп'ютері.
4. Що називають "ітерацією"? Наведіть загальну схему ітераційного методу.
5. Які методи розв'язання математичних задач називають ітераційними?
6. Які методи розв'язання математичних задач називають числовими?
7. Дайте означення абсолютної та відносної похибок; граничної абсолютної та відносної похибок.
8. Сформулюйте правила оцінювання абсолютної та відносної похибок.
9. Назвіть причини появи похибок в процесі обчислень на комп'ютері?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1.

Відповіді: 1.1

Тема 2. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ЛІНІЙНІЙ АЛГЕБРІ

План

1. Методи обчислення визначників та обернених матриць. Порівняльний аналіз методів і алгоритмів.

2. Метод Гаусса розв’язання СЛАР та його модифікації. Метод прогонки. LU – розклад та метод Холецького.

3. Метод простої ітерації. Метод Гаусса-Зейделя. Оцінка похибок обчислення.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** методи обчислення визначників та обернених матриць, суть класичного методу Гаусса, методу Гаусса з вибором головного елемента, методів прогонки, LU – розкладання, простої ітерації та Гаусса-Зейделя; ***уміти:*** обчислювати визначники та обернені матриці різними методами, розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами.

Основні теоретичні відомості

Систему n рівнянь з n невідомими вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Тут $x_1, x_2, ...,$ x_n — невідомі; a_{ij} — задані коефіцієнти ($i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$), $b_1, b_2, ..., b_n$ — вільні члени системи.

Уведемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — матриця системи, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$,

$b=(b_1,b_2,...,b_n)^{\mathrm{T}}$. Тоді у матричній формі система (2.1) має вигляд

$$Ax=b\,.$$

Відомі методи Крамера, Гаусса та матричний метод детально розглянуті під час вивчення лінійної алгебри у курсі вищої математики.

Методом прогонки розв'язують системи лінійних рівнянь з трьохдіагональною (стрічковою) матрицею. Таку систему записують так:

$$a_i x_{i-1}+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i\,,\quad i=1,2,...,n\,, \tag{2.2}$$
$$a_1=c_n=0\,.$$

Цей метод є окремим випадком методу Гаусса і складається з *прямого* та *зворотного* ходу. Розв'язки системи (2.2) визначають за формулами

$$x_i=u_i x_{i+1}+v_i\,,\quad i=n,n-1,...,1\,; \tag{2.3}$$

$$u_i=-\frac{c_i}{a_i u_{i-1}+b_i}\,,\quad v_i=\frac{d_i-a_i v_{i-1}}{a_i u_{i-1}+b_i}\,,\quad i=1,2,...,n\,, \tag{2.4}$$

причому $u_1=-\dfrac{c_1}{b_1}$, $v_1=\dfrac{d_1}{b_1}$, $u_n=0$.

За формулами (2.4) здійснюють прямий хід прогонки, а за формулами (2.3) — зворотний хід прогонки.

Метод *LU*-розкладання матриці. За цим методом невироджену матрицю A системи (2.1) спочатку подають у вигляді добутку невироджених матриць L та U:

$$A=LU,$$

де L— нижньотрикутна матриця, U— верхньотрикутна матриця,

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язання системи (2.1) зводиться до послідовного розв'язання двох систем $Ly = b$ та $Ux = y$.

Коментар. Якщо $LUx = b$, то $x = L^{-1}U^{-1}b = L^{-1}(U^{-1}b) = L^{-1}y$.

Елементи матриць L та U можна визначити за формулами:

$$l_{i1} = a_{i1},\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}a_{kj},\ i \ge j > 1; \tag{2.5}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}},\ u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}a_{kj}\right),\ 1 < i < j. \tag{2.6}$$

Тоді розв'язки проміжної системи $Ly = b$ мають вигляд

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}},\ y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k\right),\ i = 2,3,\ldots,n,$$

а розв'язки системи $Ux = y$, отже, й (2.1), такі:

$$x_n = y_n,\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k,\ i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Нехай A — знакостала симетрична матриця. Тоді матрицю A можна подати у вигляді

$$A = U^{\mathrm{T}}DU, \tag{2.7}$$

де U– верхньотрикутна матриця, U^{T} – нижньотрикутна матриця, транспонована до матриці U, D – діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи d_{ii} мають однаковий знак.

Застосування розкладання (2.7) для розв'язання системи (2.1) має назву методу Холецького.

Метод простої ітерації. За великої кількості невідомих у системі (2.1) застосування методу Гаусса, який дає точний розв'язок, стає досить складним. Часто використовують наближені числові методи, зокрема метод простої ітерації (метод послідовних наближень) та метод Гаусса-Зейделя.

Систему (2.1) зводять до рівносильного вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2 - \ldots - \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - \ldots - \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \ldots - \alpha_{nn}x_n, \end{cases} \tag{2.8}$$

яка у матричній формі має вигляд

$$x = \beta - \alpha x,$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Тоді (k+1)-ше наближення визначають за формулою

$$x^{(k+1)} = \beta - \alpha x^{(k)} \ (k = 0, 1, \dots). \qquad (2.9)$$

За нульове наближення можна взяти будь-які значення, наприклад, $x_1^{\ 0} = 0$, $x_2^{\ 0} = 0$, ..., $x_n^{\ 0} = 0$.

Достатня умова збіжності процесу ітерацій наступна: якщо для системи (2.8) виконується хоча б одна з умов:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1 \ (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1 \ (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (2.10)$$

то ітераційний процес за формулами (2.9) збігається до єдиного розв'язку цієї системи, незалежно від початкового наближення.

Критерій зупинки процесу: $\max\limits_{j} \left| x_j^{\ (k+1)} - x_j^{\ (k)} \right| < \varepsilon$, де ε — задана точність.

Метод Гаусса-Зейделя є модифікацією методу простої ітерації. Основна відмінність полягає в тому, що при обчисленні (k +1)-го наближення невідомої змінної x_i враховують (k +1)-ші наближення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$. Ітераційний процес здійснюють за формулами

$$\begin{cases} x_1^{\ (k+1)} = c_{12} x_2^{\ (k)} + c_{13} x_3^{\ (k)} + c_{14} x_4^{\ (k)} + \dots + c_{1n} x_n^{\ (k)} + d_1, \\ x_2^{\ (k+1)} = c_{21} x_1^{\ (k+1)} + c_{23} x_3^{\ (k)} + c_{24} x_4^{\ (k)} + \dots + c_{2n} x_n^{\ (k)} + d_2, \\ x_3^{\ (k+1)} = c_{31} x_1^{\ (k+1)} + c_{32} x_2^{\ (k+1)} + c_{34} x_4^{\ (k)} \dots + c_{3n} x_n^{\ (k)} + d_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{\ (k+1)} = c_{n1} x_1^{\ (k+1)} + c_{n2} x_2^{\ (k+1)} + c_{n3} x_3^{\ (k+1)} \dots + c_{nn-1} x_{n-1}^{\ (k+1)} + d_n, \end{cases}$$

де $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Коментар. Достатня умова (2.10) щодо збіжності методу простої ітерації залишається актуальною і для ітераційного процесу за методом Гаусса-Зейделя.

Одна з переваг методу Гаусса-Зейделя в тому, що він здебільшого дає кращу збіжність ніж метод простої ітерації, а недоліком є більш громіздкий процес обчислень.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь методом *LU*-розкладання матриці:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 27, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи формули (2.5) та (2.6), подамо матрицю $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ у вигляді $A = LU$,

де $L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 8,4 & 0 \\ 1 & 1,8 & 3,314 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,214 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання заданої системи зводиться до розв'язання двох систем

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 8,4 & 0 \\ 1 & 1,8 & 3,314 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,214 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши першу систему, отримаємо: $y_1 = 2,\ y_2 = 2,5,\ y_3 = 2,96$, Розв'язками другої системи, отже, і заданої, є значення

$x_3 = 2,96,\ x_2 = 1,87,\ x_1 = 0,44$.

Приклад 2. Розв’яжіть систему рівнянь методом прогонки:

$$\begin{cases} 10x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\qquad = 5, \\ -2x_1 + 9x_2 + \quad x_3 \qquad\quad = -1, \\ \qquad 0,1x_2 + 4x_3 - \quad x_4 = -5, \\ \qquad\qquad\quad - x_3 + 8x_4 = 40. \end{cases}$$

Розв’язання. Записуємо коефіцієнти у вигляді таблиці 2.1

Таблиця 2.1

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0	10	1	5
2	–2	9	1	–1
3	0,1	4	–1	–5
4	–1	8	0	40

Прямий хід прогонки. За формулами (2.4) визначаємо коефіцієнти u_i та v_i $(i = 1, 2, ..., n)$, занесеними у таблицю 2.2:

Таблиця 2.2

u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3	v_4
–0,1	–0,109	0,251	0	0,5	0	–1,253	5

Зворотний хід прогонки. За формулами (2.3) визначаємо розв’язки системи:

$$x_4 = v_4 = 5;$$

$$x_3 = u_3 x_4 + v_3 = 0,251 \cdot 5 - 1,253 = 0,002 \approx 0;$$

$$x_2 = u_2 x_3 + v_2 = -1,109 \cdot 0,002 + 0 = -0,002 \approx 0;$$

$$x_1 = u_1 x_2 + v_1 = 0,1 \cdot 0,002 + 0,5 \approx 0,5.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Назвіть методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, вкажіть їх принципові відмінності.

3. У чому полягає ідея методу Гаусса?
4. У чому полягає суть методу виключення Гаусса з вибором головного елемента? В яких випадках його застосовують на практиці?
5. Що називається LU-розкладанням матриці?
6. Як застосовується LU -розкладання матриць для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
7. Як можна використати LU -розкладання матриці для обчислення її оберненої матриці?
8. При яких умовах збігається метод простої ітерації? Наведіть оцінки швидкості збіжності цього методу.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв’яжіть систему рівнянь методом LU-розкладання матриці:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20. \end{cases}$$

Завдання 2. Розв’яжіть систему рівнянь методом прогонки:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 16, \\ -4x_1 + 9x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 24, \\ -x_3 + 6x_4 = -18. \end{cases}$$

Відповіді: 1. (9,39; –2,56; –4,15). **2.** (1,25; 2,00; 3,00; - 2,50).

Тема 3. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

План

1. Відокремлення коренів. Проблема відокремлення коренів.
2. Метод бісекції та метод простих ітерацій. Умови збіжності.
3. Метод хорд і метод Ньютона. Умови збіжності.
4. Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь. Умови

збіжності.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** методи відокремлення коренів рівняння, суть методів бісекцій, хорд, Ньютона, простих ітерацій, умови збіжності; ***уміти:*** визначати проміжки ізоляції коренів, уточнювати наближені корені за допомогою названих методів до наперед заданої точності.

Основні теоретичні відомості

Часто постає задача відшукання наближених коренів рівняння

$$f(x) = 0 \qquad (3.1)$$

Рівняння (3.1) може мати:

а) порожню множину розв'язків;

б) скінченну кількість коренів;

в) нескінченну кількість коренів.

Відшукання одного кореня проводять у два етапи:

1) знаходять проміжок ізоляції кореня, тобто визначають відрізок, який містить лише один корінь x^* (такий процес називають *відокремленням кореня*);

2) корінь уточнюють до наперед заданої точності за допомогою одного з ітераційних алгоритмів.

Найпростіший метод відокремлення коренів пов'язаний з побудовою графіків функцій. Геометрично розв'язки рівняння (3.1) — це абсциси точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю *Ox*. Якщо ця функція неперервна і на кінцях відрізка $[a; b]$ набуває значень протилежних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то існує принаймні одна точка $x \in (a; b)$, яка є коренем рівняння (3.1) (рис. 3.1, *а*, *б*). Насправді при відсутності інших додаткових умов на заданому відрізку рівняння може мати більше, ніж один корінь (рис. 3.1, *в*). На практиці часто функцію $f(x)$ записують у вигляді різниці двох функцій:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

тоді рівняння (3.1) рівносильне рівнянню

$$f_1(x) = f_2(x).$$

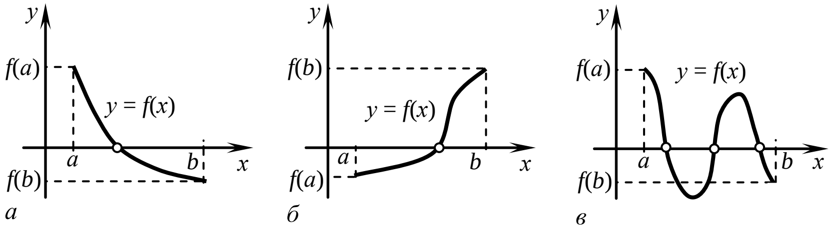

Рис. 3.1

Теорема. Нехай функція $f(x)$ є диференційовною на відрізку $[a; b]$, на якому виконуються умови:

1) $f(a)f(b) < 0$;

2) похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак.

Тоді рівняння $f(x) = 0$ має на $[a; b]$ лише один корінь.

Метод бісекцій. Нехай рівняння $f(x) = 0$ на проміжку ізоляції $[a; b]$ має лише один корінь і $f(x)$ є неперервною на $[a; b]$. Уточнення шуканого кореня можна проводити за таким алгоритмом. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ навпіл точкою $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ і обчислимо $f(x_1)$.

Можливі три випадки:

1) якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 є коренем заданого рівняння;

2) знак $f(x_1)$ протилежний знаку $f(a)$;

3) знак $f(x_1)$ протилежний знаку $f(b)$.

Якщо $f(x_1) \neq 0$, то корінь рівняння $f(x) = 0$ належить тому з відрізків $[a; x_1]$ чи $[x_1; b]$, на кінцях якого знаки функції $f(x)$ будуть протилежними. Для уточнення кореня обираємо саме такий відрізок, його довжина вдвічі менша за довжину відрізка $[a; b]$; ділимо обраний відрізок навпіл (отримуємо точку x_2) і таким чином процес продовжуємо доти, доки довжина відрізка, на кінцях якого функція набуває значень протилежних знаків, не стане меншою від заданої точності.

Умовою зупинки ітераційного процесу є виконання нерівності $\left|x_{n+1}-x_n\right|<\varepsilon$, де ε — задана точність, x_n та x_{n+1} — наближені корені рівняння.

При цьому має місце оцінка збіжності

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{b-a}{2^n},$$

де x^* — точний корінь, що належить відрізку $[a;\, b]$.

Головні переваги методу — простота і надійність. Послідовність $\{x_k\}$ збігається до кореня x^* рівняння $f(x)=0$ для будь-яких неперервних функцій $f(x)$. До недоліків відносяться:

1) невисока швидкість збігу методу (за одну ітерацію точність збільшується приблизно удвічі);

2) метод не узагальнюється на системи рівнянь.

Метод простої ітерації. Запишемо рівняння $f(x)=0$ у вигляді $x=\varphi(x)$. Якщо на проміжку ізоляції $[a;\, b]$ це рівняння має один корінь, то у разі виконання умови $\left|\varphi'(x)\right|\le r<1$ для всіх $x\in[a;\, b]$ послідовність

$$x_0\in(a;b), x_1=\varphi(x_0), x_2=\varphi(x_1), \ldots, x_{n+1}=\varphi(x_n), \ldots$$

збігається до точного кореня $x^*\in[a;\, b]$.

Коментар. Для вибору функції $\varphi(x)$ можна скористатися таким підходом. Рівняння $f(x)=0$ рівносильне рівнянню $\lambda f(x)=0$, де $\lambda\ne 0$, а також рівнянню $x+\lambda f(x)=x$. Отже, $\varphi(x)=x+\lambda f(x)$. Константу $\lambda\ne 0$ слід підібрати так, щоб виконувалась нерівність $\left|\varphi'(x)\right|<1$.

Метод хорд. Нехай на відрізку $[a;\, b]$ рівняння $f(x) = 0$ має тільки один корінь, крім цього виконуються умови:

1) $f(a)<0$, $f(b)>0$;

2) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, тобто функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ монотонно зростає і є вгнутою (рис. 3.2).

Алгоритм уточнення кореня x^* рівняння $f(x) = 0$ на проміжку ізоляції $[a; b]$ такий.

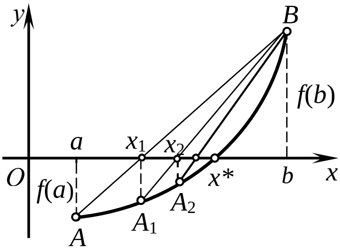

Рис. 3.2

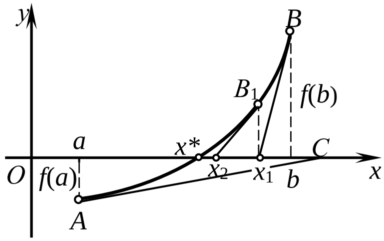

Рис. 3.3

Сполучимо точки A і B відрізком. Позначимо через x_1 точку перетину хорди AB з віссю Ox, після цього обчислимо значення $f(x_1)$ (за даних умов $f(x_1) \le 0$). Якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 — корінь рівняння і задача розв'язана. Якщо $f(x_1) < 0$, то проведемо хорду A_1B. Точку перетину цієї хорди з віссю Ox позначимо через x_2. Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовність чисел $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, яка прямує до кореня x^*. Процес зупиняють, якщо виконується нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon .$$

Розрахункова формула методу хорд:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}), \tag{3.2}$$

де $n = 1, 2, 3, ...$.

Формула (3.2) застосовна також і для випадку, коли на відрізку ізоляції $[a; b]$ виконуються нерівності $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$.

Якщо на відрізку $[a; b]$ виконуються нерівності $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ або $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$,

$f''(x) > 0$ (графічні образи цих випадків розгляньте самостійно), то корінь можна уточнити за формулою

$$x_n = x_{n-1} - \frac{a - x_{n-1}}{f(a) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}).$$

Тут $n = 1, 2, \ldots$, $x_0 = b$.

Метод Ньютона (дотичних). Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в тій із точок *A* чи *B*, в якій виконується умова $f(x) f''(x) > 0$, тобто знак функції збігається із знаком її другої похідної. На рис. 3.3 $f(b) > 0$ і $f''(b) > 0$ (функція вгнута), тому дотичну проводимо через точку *B* (дотична проведена у точці *A* може перетнути вісь абсцис поза відрізком ізоляції $[a; b]$). Знайдемо абсцису x_1 точки перетину дотичної з віссю абсцис:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Тепер обчислимо значення $f(x_1)$ і проведемо дотичну до кривої через точку $B_1(x_1, f(x_1))$, після цього знайдемо абсцису x_2 точки перетину цієї дотичної з віссю абсцис:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продовжуючи процес, дістанемо формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \tag{3.3}$$

Нехай x^* — корінь рівняння (3.1). Тоді

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*.$$

Модуль різниці між наближеним коренем x_n і точним коренем x^* задовольняє нерівність

$$|x_n - x^*| < \frac{f(x_n)}{\min\limits_{x \in [a;\, b]} f'(x)}. \tag{3.4}$$

Метод Ньютона володіє значною швидкістю збіжності. Зазвичай трьох — п’яти ітерацій достатньо для одержання високої точності.

Критерій зупинки ітераційного процесу:

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon,$$

де ε — задана точність.

Коментар. На практиці метод Ньютона часто комбінують з методом хорд.

Метод Ньютона для наближеного розв’язання нелінійних систем. Для розв’язання системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

можна скористатися формулами

$$x_{n+1} = x_n + \frac{I_x}{I}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{I_y}{I},$$

в яких визначники

$$I_x = \begin{vmatrix} -f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} \\ -f_2 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} \end{vmatrix}, \ I_x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & -f_1 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -f_2 \end{vmatrix}$$

обчислюють в точках (x_n, y_n).

Критерій зупинки ітераційного процесу, наприклад, такий:

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon \text{ та } |y_{n+1} - y_n| \le \varepsilon,$$

де ε — задана точність.

Коментар. Нульове наближення (x_0, y_0) здебільшого визначають шляхом побудови (точної або наближеної) графіків рівнянь $f_1(x, y) = 0$ та $f_2(x, y) = 0$.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Визначте корінь рівняння $\ln x + x - 3 = 0$ з точністю до 0,005, використовуючи:

а) метод бісекцій;

б) метод Ньютона;

в) метод простих ітерацій.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\ln x = 3 - x.$$

Побудувавши графіки функцій $y = 3 - x$ та $y = \ln x$ (рис. 3.4), дійдемо висновку, що задане рівняння має єдиний корінь $x = x^*$, який належить проміжку $(1; 3)$. Позначимо $f(x) = \ln x + x - 3$ і обчислимо, наприклад, значення функції $f(x)$ у точках $x = 2$ та $x = 2,5$. Дістанемо

$$f(2) = -0,3068528 < 0, \ f(2,5) = 0,4162907 > 0.$$

Отже, корінь заданого рівняння належить проміжку ізоляції $[2; 2,5]$. Уточнимо корінь до точності 0,005:

а) Метод бісекцій (половинного поділу). Розділивши відрізок $[2; 2,5]$ навпіл, дістанемо точку $x_1 = \dfrac{2 + 2,5}{2} = 2,25$. Обчислимо значення $f(x_1) = f(2,25) = 0,0609 > 0$. Отже, шуканий корінь належить проміжку $[2; 2,25]$. Візьмемо $x_2 = \dfrac{2 + 2,25}{2} = 2,125,$ тоді $f(x_2) = f(2,125) = -0,1212 < 0$.

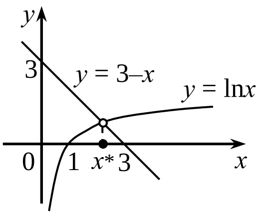

Рис. 3.4

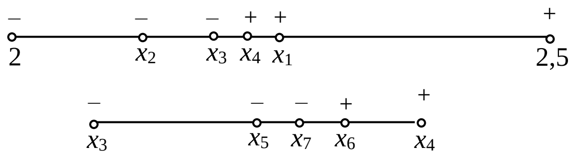

Рис. 3.5

Далі розглядаємо проміжок $[2,125; 2,25]$, на кінцях якого функція набуває протилежних знаків. Продовжимо процес доти, доки відстань між сусідніми наближеними коренями не стане меншою, ніж 0,005 (рис.3.5 і табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Обрана точка	$f(x_i)$	Відстань між сусідніми точками
$x_1 = 2,25$	0,0609302	0,25
$x_2 = 2,125$	– 0,1212282	0,125
$x_3 = 2,1875$	– 0,08125	0,0625
$x_4 = 2,2187$	0,015	0,0312
$x_5 = 2,2031$	– 0,007	0,0156
$x_6 = 2,2109$	0,004354	0,0078
$x_7 = 2,207$	– 0,00132	0,0039

Отже, $x = 2,207$ — наближений корінь заданого рівняння з точністю 0,005.

б) Метод Ньютона. Знайдемо похідні функції $f(x) = \ln x + x - 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

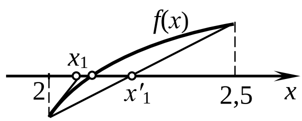

Рис.3.6

На проміжку ізоляції $[2; 2,5]$ функція $f(x)$ монотонно зростаюча й опукла (рис. 3.6).

Оскільки $f(2)$ і $f''(2)$ одночасно від'ємні, тобто виконується умова $f(2)f''(2) > 0$, то за початкове наближення можемо взяти точку $x_0 = 2$. У цій точці $f(2)$ = – 0,3068528, $f'(2) = 1,5$. За формулою (3.3) обчислимо

$$x_1 = 2 - \frac{-3068528}{1,5} = 2,2045685.$$

Застосуємо ще раз формулу (3.3):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,2045685 - \frac{f(2,2045685)}{1 + \dfrac{1}{2,2045685}} = 2,207939.$$

Оцінимо різницю між наближеним коренем x_2 та точним коренем x^* формулою (3.4). На проміжку $[2;\, 2,5]$ найменше значення похідної $f'(x)$ досягається у точці $x = 2,5$ і дорівнює 1,4. Оскільки $|f(x_2)| = 1,2 \cdot 10^{-6}$, то

$$|x_2 - x^*| < \frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{1,4} < 10^{-6}.$$

в) Метод простих ітерацій. Запишемо рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = 3 - \ln x$. Похідна $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x}$ задовольняє умову $|\varphi'(x)| < 1$ для всіх $x > 1$. За початкове наближення візьмемо значення $x_0 = 2$.

Обчислюємо значення:

$x_1 = \varphi(x_0) = 3 - \ln 2 = 2,3068$,

$x_2 = \varphi(x_1) = 3 - \ln 2,3068 = 2,1641$,

$x_3 = \varphi(x_2) = 3 - \ln 2,1641 = 2,228$,

$x_4 = \varphi(x_3) = 3 - \ln 2,228 = 2,199$,

$x_5 = \varphi(x_4) = 3 - \ln 2,199 = 2,212$,

$x_6 = \varphi(x_5) = 3 - \ln 2,212 = 2,2061$,

$x_7 = \varphi(x_6) = 3 - \ln 2,2061 = 2,2088$,

$|x_7 - x_6| = 2,2088 - 2,2061 = 0,0027 < 0,005$.

Отже, $x^* \approx 2,2088$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі розв'язання рівняння з одним невідомим.
2. Які умови повинен задовольняти відрізок, на якому ведеться пошук розв'язку рівняння? Як його можна знайти?
3. У чому полягає метод дихотомії для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності?
4. У чому полягає метод хорд для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності?

5. У чому полягає метод Ньютона для розв'язання рівняння з одним невідомим? Яку він має швидкість збіжності? Яку ще назву має цей метод?
6. У чому полягає метод простих ітерацій для розв'язання рівняння з одним невідомим?
7. Як застосувати метод Ньютона до розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Визначте корінь рівняння $x^3 + 2x - 7 = 0$ з точністю до 0,005, використовуючи:

1) метод половинного поділу;
2) метод хорд;
3) метод дотичних;
4) метод простих ітерацій.

Відповідь: 1. 1,569.

Тема 4. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

План

1. Проблема наближення функцій. Поліноміальна інтерполяція. Інтерполяційний поліном Лагранжа.
2. Проблема мінімізація похибки. Поліноми Чебишова та їх застосування.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** постановку задачі інтерполяції, інтерполяційний поліном Лагранжа, поліноми Чебишова; ***уміти:*** будувати інтерполяційний поліном Лагранжа та поліноми Чебишова на заданому проміжку.

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай на відрізку $[a;\ b]$ обрано деяку фіксовану сукупність точок $x_0, x_1, ..., x_n$ $(a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b)$ і в цих точках відомі значення деякої функції $f(x)$: $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n$ (див. табл. 4.1). Потрібно знайти таку функцію $\varphi(x)$, яка збігається з $f(x)$ у вказаних точках, тобто $\varphi(x_0) = f(x_0),\ \varphi(x_1) = f(x_1),\ \dots\ ,\ \varphi(x_n) = f(x_n)$, при цьому в усіх інших точках $x \in [a;\ b]$ виконується наближена рівність: $\varphi(x) \approx f(x)$.

Процес відшукання функції $\varphi(x)$ називають *інтерполюванням*; функцію $\varphi(x)$ — *інтерполяційною функцією*, точки $x_0, x_1, ..., x_n$ — *вузлами інтерполювання*.

Таблиця 4.1

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Інтерполяційний поліном Лагранжа. Нехай функцію f задано таблицею 4.1. Інтерполяційний поліном $\varphi(x) = L_n(x)$, степінь якого не більший за n і для якого виконуються умови

$$L_n(x_0) = f(x_0),\ L_n(x_1) = f(x_1),\ \dots,\ L_n(x_n) = f(x_n)$$

має вигляд

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ &+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ &+ f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Функцію $L_n(x)$, задану формулою (4.1), називають *інтерполяційним поліномом Лагранжа,* який на практиці зводять до вигляду

$$L_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Формулу (4.1) у компактнішому вигляді записують так:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)},$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Абсолютну похибку вираження функції $f(x)$ інтерполяційним поліномом $L_n(x)$ оцінюють, використовуючи нерівність

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) \right|,$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Інтерполяційна формула Лагранжа для рівновіддалених вузлів. Якщо відстань між усіма сусідніми вузлами інтерполювання є однаковою (рівновіддалені вузли), тобто

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$$

тоді формула (4.1) істотно спрощується. Введемо нову змінну

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

звідси

$$x - x_0 = th,$$
$$x - x_1 = x - x_0 - h = th - h = h(t - 1),$$
$$x - x_2 = x - x_0 - 2h = th - 2h = h(t - 2),$$
$$x - x_i = x - x_0 - ih = th - ih = h(t - i).$$

Вираз $\omega_{n+1}(x)$ набирає вигляду

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = h^{n+1} t(t-1)\ldots(t-n).$$

Тоді

$$\omega'_{n+1}(x_i) = h^n \cdot i! \cdot (n - i)!(-1)^{n-i}.$$

У результаті інтерполяційний поліном Лагранжа набуває вигляду

$$L_n(x_0+th)=\sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(t)\cdot f(x_i),$$

де коефіцієнти Лагранжа $L_i^{(n)}(t)=\dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}$ не залежать від вигляду функції $f(x)$ і величини h, а залежать лише від значень i та n. Тому таблиці, складені один раз для різних значень n, можна використовувати при розв'язуванні різноманітних задач інтерполювання для рівновіддалених вузлів.

Поліноми Чебишова $T_n(x)$ n-го степеня визначаються формулою

$$T_n(x)=\frac{2^n n!}{(2n)!}\sqrt{x^2-1}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^{n-0,5}\right).$$

Перші п'ять поліномів Чебишова такі:

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1.$$

Справджуються рівності:

$$T_n(x)=\cos\left(n\arccos x\right),\ |x|\le 1;$$
$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ n\in N.$$

Поліном $T_n(x)$ має n коренів: $x=\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}$, $m=0,1,\ldots,n-1$.

Якщо поліном Лагранжа $L_n(x)$ розглядається на проміжку $[0;1]$, то максимальне значення абсолютної похибки на цьому відрізку буде найменшим тоді, коли за вузли інтерполювання взяти корені полінома $T_n(x)$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Побудуйте інтерполяційний поліном Лагранжа для функції, заданої таблицею 4.2:

Таблиця 4.2

x	1	3	4
$f(x)$	12	4	6

Розв'язання. За умовою $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4,\quad f(x_0) = 12,\ f(x_1) = 4,$ $f(x_2) = 6.$ Крім того, з таблиці випливає, що $n = 2$, отже, степінь інтерполяційного поліному буде не вищим за два.

Використовуючи формулу (4.1), дістаємо:

$$L_2(x) = 12 \cdot \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} =$$
$$= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22.$$

2. Функцію $f(x)$ задано таблицею 4.3. Побудуйте інтерполяційний поліном Лагранжа для цієї функції.

Таблиця 4.3

x	1	2	3	5
$f(x)$	1	5	14	81

Розв'язання. Оскільки функція задається чотирма значеннями, то порядок отриманого полінома не вище третього. Підставивши вихідні дані у формулу (4.1), дістанемо:

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} +$$
$$+ 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі наближення функцій. Які постановки задачі наближення функцій ви ще знаєте?

2. Чим відрізняються задачі апроксимації, інтерполяції та екстраполяції функцій?

3. Що називається інтерполяційним поліномом Лагранжа? Коли його слід застосовувати?

4. Яку властивість мають поліноми Чебишова?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа другого порядку для функції, заданої таблицею 4.4.

Таблиця 4.4

x	1	3	5
$f(x)$	–2	4	–6

Завдання 2. Побудуйте інтерполяційний поліном Лагранжа, який збігається з функцією $f(x) = 3^x$, де $x \in [-1; 1]$, у точках $x_0 = -1,\ x_1 = -0,\ x_2 = 1$.

Завдання 3. Оцініть точність обчислення величини $\ln 1,5$ за інтерполяційною формулою Лагранжа, якщо за вузли інтерполювання вибрані значення $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

Завдання 4. Функцію $f(x)$ задано таблицею 4.5:

Таблиця 4.5

x	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$	0,56	0,72	0,84	0,93

Користуючись інтерполяційним поліномом Лагранжа, знайдіть її значення в точці x = 0,7.

Відповіді: 1. $L_2(x) = -2x^2 + 11x - 11$. 2. $3^x \approx \frac{1}{3}(2x^2 + 4x + 3)$. 3. 0,125. 4. ≈ 0,64.

Тема 5. СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

План

1. Поняття сплайна.
2. Лінійні сплайни.
3. Кубічні сплайни.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** постановку інтерполювання сплайнами, означення сплайна; ***уміти:*** будувати лінійний та кубічний сплайни на заданому проміжку.

Основні теоретичні відомості

Визначення сплайн-функції. Нехай про функцію $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ відомо лише її значення y_i у вузлах $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ ($i = 0, 1, 2, ..., n$), а в проміжних точках функція може набувати будь-яких значень. Тоді заміна функції $f(x)$ інтерполяційним поліномом навіть дуже високого степеня, крім великої обчислювальної роботи, нової інформації може і не дати. У цьому разі використовують особливий вид інтерполювання — *інтерполювання сплайнами*.

У загальному випадку відрізок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ розбивають на частини, і на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, ..., n$) будують свій інтерполяційний поліномом. Вимагаючи гладкого спряження поліномів на сусідніх відрізках, приходимо до кусково-поліномних функцій з однорідною структурою, що і називаються сплайнами або сплайн-функціями.

Сплайн — це функція, яка на кожному частинному відрізку інтерполяції є алгебраїчним полiномомом, а на всьому заданому відрізку неперервна разом із кількома своїми похідними.

Задача наближення лінійними сплайнами. Графік функції $f(x)$ на $[a, b]$ заміняють ламаною лінією, що проходить через точки (x_i, y_i) і складається з n відрізків: A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 5.1). У кожному вузлі цієї ламаної перша похідна має розрив першого роду. Ламана у нашому випадку — це сплайн.

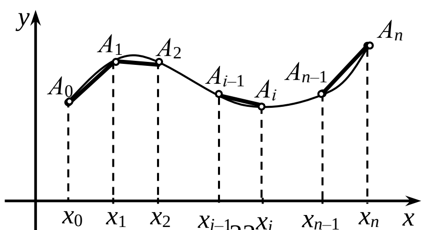

Рис. 5.1

Рівняння кожного з відрізків $A_{i-1}A_i$ ламаної $A_0A_1A_2$ ... A_n, що сполучає сусідні точки $A_{i-1}(x_{i-1};\, y_{i-1})$ та $A_i(x_i;\, y_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, має вигляд:

$$y = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \tag{5.1}$$

де $x \in [x_{i-1};\, x_i]$.

Задача наближення кубічними сплайнами. Припустимо, що у вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ відрізка $[a;\, b]$ задані значення функції $f(x)$: $y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, ... , n. Довжину частинного відрізка $[x_{i-1};\, x_i]$ позначимо через $h_i = x_i - x_{i-1}$ (i = 1, 2, ... , n). Кубічний сплайн на кожному на кожному частинному відрізку $[x_{i-1};\, x_i]$ має вигляд

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

де a_i, b_i, c_i, d_i — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного частинного відрізка $[x_{i-1};\, x_i]$. Таких відрізків усього n: $[x_0;\, x_1], [x_1;\, x_2]$, ..., $[x_{n-1};\, x_n]$. Тоді на всьому відрізку $[a;\, b]$ інтерполяційний сплайн має вигляд

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) \text{ для } x \in [x_0; x_1], \\ S_2(x) \text{ для } x \in [x_1; x_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n(x) \text{ для } x \in [x_{n-1}; x_n]. \end{cases}$$

Оскільки невідомих коефіцієнтів усього $4n$, то для однозначного визначення цих коефіцієнтів потрібно мати систему з $4n$ рівнянь.

За умовою функція $S(x)$ у вузлах повинна збігатися із заданими значеннями функції f

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i,$$

$$S_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3.$$

Кількість таких рівнянь дорівнює $2n$. Інші $2n$ рівнянь отримуємо з умови неперервності першої і другої похідних від $S(x)$ в усіх точках, включаючи і вузли, тобто враховуємо рівності:

$$S_i'(x_i - 0) = S_{i+1}'(x_i + 0), \qquad (5.2)$$

$$S_i''(x_i - 0) = S_{i+1}''(x_i + 0). \qquad (5.3)$$

Геометрично умова (5.2) означає, що графіки сусідніх кускових поліномів у вузловій точці мають спільну дотичну; умова (5.3) означає, що графіки сусідніх кускових поліномів у вузловій точці мають однаковий напрям опуклості, якщо друга похідна не рівна нулю, або точка (x_i, y_i) — точка перегину графіка функції $S(x)$, якщо $S''(x_i) = 0$.

У результаті приходимо до системи

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & (i = 1, 2, ..., n); \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} & (i = 1, 2, ..., n); \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 & (i = 1, 2, ..., n-1); \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 & (i = 1, 2, ..., n-1); \\ c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Система (5.4) складається з $4n$ рівнянь та $4n$ невідомих a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, ..., n$). Розв'язавши цю систему, наприклад методом Гаусса, дістанемо сукупність усіх формул для шуканого інтерполяційного сплайна.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Для функції, заданої на проміжку [0; 0,3] таблицею 5.1, побудуйте сплайн-функцію першого степеня.

Таблиця 5.1

x	0	0,1	0,2	0,3
$f(x)$	0	1	– 1	2

Розв'язання. Інтерполяційний сплайн має таку структуру:

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) \text{ для } x\in[0;0{,}1], \\ S_2(x) \text{ для } x\in[0{,}1;0{,}2], \\ S_3(x) \text{ для } x\in[0{,}2;0{,}3]. \end{cases}$$

За формулою (5.1) дістаємо:

$$S_1(x)=0+\frac{(x-0)(1-0)}{0{,}1-0}=10x,\ x\in[0;\ 0{,}1];$$

$$S_2(x)=1+\frac{(x-0{,}1)(-1-1)}{0{,}2-0{,}1}=3-20x,\ x\in[0{,}1;\ 0{,}2];$$

$$S_3(x)=-1+\frac{(x-0{,}2)(2+1)}{0{,}3-0{,}2}=30x-7,\ x\in[0{,}2;\ 0{,}3].$$

Отже,

$$S(x)=\begin{cases} 10x \text{ для } x\in[0;0{,}1], \\ 3-20x \text{ для } x\in[0{,}1;0{,}2], \\ 30x-7 \text{ для } x\in[0{,}2;0{,}3]. \end{cases}$$

2. Інтерполяційна функція задана таблицею 5.2. Знайдіть значення коефіцієнтів $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2, b_3, c_3, d_3$, які визначають кубічний сплайн

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) \text{ для } x\in[2;3], \\ S_2(x) \text{ для } x\in[3;5], \\ S_3(x) \text{ для } x\in[5;7]. \end{cases}$$

Таблиця 5.2

x	2	3	5	7
$f(x)$	4	–2	6	–3

Розв'язання. Записуємо вираз для $S(x)$:

$$S_1(x)=4+b_1(x-2)+c_1(x-2)^2+d_1(x-2)^3,\ x\in[2;3];$$

$$S_2(x)=-2+b_2(x-3)+c_2(x-3)^2+d_2(x-3)^3,\ x\in[3;5];$$

$$S_3(x)=6+b_3(x-5)+c_3(x-5)^2+d_3(x-5)^3,\ x\in[5;7].$$

Складаємо систему (5.4):

$$\begin{cases} 2b_1 + c_1 + d_1 = -6, \\ 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8, \\ 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9, \\ b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0, \\ b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0, \\ c_2 - c_1 - 3d_1 = 0, \\ c_3 - c_2 - 6d_2 = 0, \\ c_1 = 0, \quad c_3 + 6d_3 = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Система (5.5) складається з дев’яти лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язавши цю систему методом Гаусса, дістанемо такі значення (результати округлені до двох знаків після коми):

$$\begin{array}{lll} b_1 = -11,6, & c_1 = 5,6, & d_1 = 0, \\ b_2 = -0,4, & c_2 = 6,6, & d_2 = -1,7, \\ b_3 = 1,62, & c_3 = -4,59, & d_3 = 0,76. \end{array}$$

У таблиці 5.3 вміщено результати перевірки всіх умов, які повинен задовольняти знайдений сплайн.

Таблиця 5.3

x	2	3	5	7
$f(x)$	4	–2	6	–3
$S_1(x)$	4	–2	–	–
$S_2(x)$	–	–2	6	–
$S_3(x)$	–	–	6	–3,04
$S_1'(x)$	–11,6	– 0,4	–	–
$S_2'(x)$	–	– 0,4	1,60	–
$S_3'(x)$	–	–	1,62	–7,62

Проаналізуйте результати таблиці 5.3 самостійно.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають сплайном?
2. Які сплайни найчастіше використовують?
3. Як будують лінійний сплайн?
4. Які умови накладають при побудові кубічного сплайна?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Для функції, заданої таблицею 5.4,

Таблиця 5.4

X	0	0,2	0,6	1
$f(x)$	1	–3	– 1	5

побудуйте сплайн-функцію першого степеня.

Завдання 2. Нехай функція $f(x)$ задана на проміжку [0; 0,3] таблицею 5.5. Побудуйте кубічну сплайн-функцію.

Таблиця 5.5

x	0	0,1	0,2	0,3
$f(x)$	0,5	0,3	0,7	0,6

Відповіді: 1. $y = 1–20x$, якщо $x \in [0; 0,2]$; $y = 5x – 4$, якщо $x \in [0,2; 0,6]$; $y = 15x–10$, якщо $x \in [0,6; 1]$. 2. $S_1(x) \approx 193x^3– 3,93x + 0,5$, $x \in [0; 0,1]$; $S_2(x) \approx$ $\approx 193(0,2 – x)^3 – 173(x – 0,1)^3 + 1,07(0,2 – x) + 3,73(x – 0,1)$, $x \in [0,1; 0,2]$; $S_3(x) \approx – 173(0,3 –x)^3 + 3,73(0,3 – x) + 6(x – 0,2)$, $x \in [0,2; 0,3]$.

Тема 6. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

План

1. Лінійна задача: основні формули. Статистичні властивості.
2. Нелінійна задача: основні формули.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** сутність методу найменших квадратів; ***уміти:*** встановити функціональну залежність (лінійну та квадратичну) між заданими величинами за методом найменших квадратів.

Основні теоретичні відомості

Постановка задачі. Припустимо, що в результаті експерименту одержано набір n пар значень двох змінних величин x_i і y_i ($1 \le i \le n$), які є характеристиками деякого процесу (y — функція від x). Результати вимірювань подані у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Потрібно встановити функціональну залежність між цими величинами у вигляді неперервної функції $y = \varphi(x)$, яка б найкраще відображала характер зміни експериментальних даних.

Для побудови функції $y = \varphi(x)$ часто використовують метод найменших квадратів, який ґрунтується на мінімізації виразу

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 ,$$

де δ_k — абсолютна похибка k-го вимірювання.

Лінійна задача. Нехай пари значень (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) розміщені на координатній площині так, як зображено на рис. 6.1, тобто майже на прямій лінії. Враховуючи, що при проведенні експерименту вимірювання проводяться з похибками, природно припустити, що змінні x і y зв'язані лінійною залежністю

$$y = ax + b, \tag{6.1}$$

де a і b — невідомі параметри.

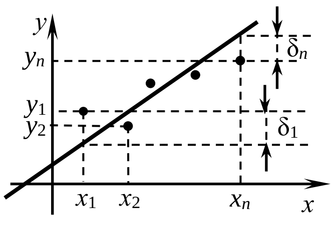

Рис. 6.1

Знайдемо модулі відхилень (похибок) точок (x_k, y_k) від прямої (6.1):

$$\delta_k = \left| ax_k + b - y_k \right|,\ k=1, 2, ..., n.$$

За методом найменших квадратів сталі a і b визначають так, щоб сума квадратів похибок

$$\Phi(a,b) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$

була мінімальною. Шукані значення a і b задовольняють систему рівнянь

$$\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = 0\,,$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\,, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} y_k\,. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Система (6.2) — це система лінійних алгебраїчних рівнянь

відносно невідомих a і b, її можна розв’язати, наприклад, використовуючи метод Гаусса або метод Крамера.

Якщо між x і y припустити лінійну залежність $y = ax$, то

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$$

Нелінійна задача. Нехай тепер функція, що наближує експериментальні дані, має три невідомі параметри a, b, c, тобто $y = \varphi(x, a, b, c)$.

Візьмемо за $\varphi(x)$ квадратичну функцію: $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

Необхідна умова екстремуму функції

$$\Phi\,(a,\, b,\, c) = \sum_{i=1}^{n} (\,f\,(x_i) - a{x_i}^2 - bx_i - c))^2$$

задається системою рівнянь

$$\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial c} = 0\,,$$

яка після перетворень набуває вигляду

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot x_i^2), \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot x_i), \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Результати вимірювань величин x і y подано у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

x	–2	–1	0	1	2	3
y	3,4	2,3	1,9	1,7	1,2	0,6

Установіть залежність між величинами x і y і визначте параметри емпіричної формули.

Розв'язання. Зобразимо на координатній площині точки (–2; 3,4), (–1; 2,3), (0; 1,9), (1; 1,7), (2; 1,2), (3; 0,6) (рис. 6.2). З рисунка видно, що ці точки розміщені приблизно на деякій прямій $y = ax + b$, отже, можемо припустити, що між x і y існує лінійна залежність $y = ax + b$.

Результати вимірювань величин x і y та підсумки їх оброблення занесемо в таблицю 6.3.

Таблиця 6.3

k	x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2
1	–2	3,4	–6,8	4
2	–1	2,3	–2,3	1
3	0	1,9	0	0
4	1	1,7	1,7	1
5	2	1,2	2,4	4
6	3	0,6	1,8	9
Σ	3	11,1	–4,2	19

Система рівнянь (6.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} 19a + 3b = -42, \\ 3a + 6b = 11{,}1, \end{cases}$$

розв'язок якої $a = -0{,}5$, $b = 2{,}1$.

Отже, залежність між x і y виражається наближеною формулою

$$y = -0{,}5x + 2{,}1.$$

Приклад 2. Результати вимірювань величин x і y подано в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	0	1	2	3	5	8

Установіть залежність між величинами x і y і визначте параметри емпіричної формули.

Розв'язання. Зобразимо на координатній площині Oxy точки (–3; 0), (–2; 0), (–1; 1), (0; 2), (1; 3), (2; 5), (3; 8). Помічаємо, що ці точки незначно відхиляються від точок дуги деякої параболи (рис. 6.3).

Отже, припускаємо, що між x і y існує квадратична залежність $y = ax^2 + bx + c$.

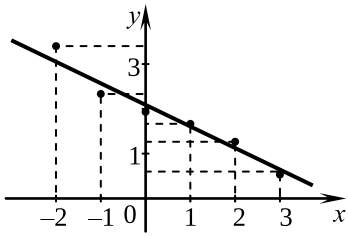

Рис. 6.2

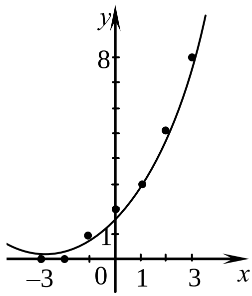

Рис. 6.3

Результати вимірювань величин x і y та підсумки їх обробки занесемо в таблицю 6.5.

Таблиця 6.5

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	$x_k y_k$	$y_k x_k^2$
1	–3	9	–27	81	0	0	0

2	–2	4	–8	16	0	0	0
3	–1	1	–1	1	1	–1	1
4	0	0	0	0	2	0	0
5	1	1	1	1	3	3	3
6	2	4	8	16	5	10	20
7	3	9	27	81	8	24	72
Σ	0	28	0	196	19	36	96

Система (6.3) набуває вигляду

$$\begin{cases} 196a + 28c = 96, \\ 28b = 36, \\ 28a + 7c = 19. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо

$$a = \frac{5}{21}, \; b = \frac{9}{7}, \quad c = \frac{37}{21}.$$

Отже,

$$y = \frac{5}{21}x^2 + \frac{9}{7}x + \frac{37}{21}.$$

Запитання для самоперевірки

1. В чому суть методу найменших квадратів?
2. Що таке відхилення точки від прямої?
3. Яка необхідна умова екстремуму функції двох (трьох) змінних?
4. Як визначають невідомі коефіцієнти у випадку, коли між x і y припускають лінійний зв’язок $y = ax + b$; квадратичний зв’язок $y = ax^2 + bx + c$?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Для значень аргументу $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$ $x_5 = 5,$ $x_6 = 6$ здобуті значення функції $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ (табл.

6.6). Установіть методом найменших квадратів функціональну залежність між x та y і визначте параметри емпіричної формули.

Таблиця 6.6

Номер задачі	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	2,2	4,5	6,7	9	11	13,5
2	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17
3	0	–2	–6	–11	–18	–26,5

Відповіді: 1. $y = 2,23x.$ **2.** $y = 3,023x - 1,081.$ **3.** $y = -0,75x^2 + 0,85.$

Тема 7. ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

План

1. Задача числового інтегрування. Поняття про квадратурні формули. Формули прямокутників, трапецій, парабол.

2. Квадратурні формули Гаусса. Оцінка похибки квадратурних формул.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 7 студент повинен ***знати:*** суть задачі числового інтегрування, принцип побудови квадратурних формул, формули прямокутників, трапецій та парабол наближеного обчислення визначених інтегралів; ***уміти:*** обчислювати наближене значення визначених інтегралів за допомогою названих квадратурних формул, охінювати похибку обчислень.

Основні теоретичні відомості

Задача числового інтегрування. Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$. Якщо можна знайти первісну $F(x)$ від підінтегральної функції $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Якщо ж підінтегральну функцію $f(x)$ не можна проінтегрувати аналітично, то можна користуватися чисельними методами, які дають можливість обчислити визначений інтеграл за числовими значеннями підінтегральної функції в окремих точках відрізка $[a;b]$. Формули, за допомогою яких проводять чисельне інтегрування, дістали назву *квадратурних* формул. З них найпоширенішими і найзручнішими є формули прямокутників, трапецій та формула парабол (або Сімпсона).

Виведення цих формул ґрунтується на понятті визначеного інтеграла як границі інтегральної суми та геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ та $x = b$.

Формули прямокутників. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\ \ (k = 0, 1, ..., n),$$

після чого обчислимо значення функції у цих точках:
$f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \ldots,$ $f(x_n) = y_n$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}), \tag{7.1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{7.2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \ldots + \right.$$

$$+ f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\Bigg) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \qquad (7.3)$$

Формули (7.1) — (7.3) називаються *формулами прямокутників*.

Формула трапецій. Замінимо криву $y = f(x)$ ламаною лінією, сполучивши послідовно точки (x_k, y_k) ($k = 0, 1, ..., n$). Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n). \qquad (7.4)$$

Формула парабол (Сімпсона). Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на $2n$ рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2n} = b$ та обчислимо значення функції у цих точках: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, …, $f(x_{2n}) = y_{2n}$.

Замінимо криву $y = f(x)$ дугами парабол (рис. 7.1). Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + \qquad (7.5)$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}))\ .$$

Формулу (7.5) називають *формулою Сімпсона*.

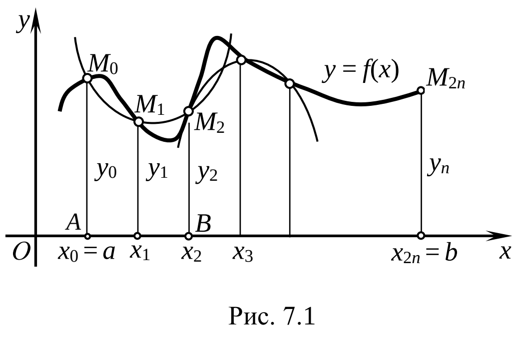

Рис. 7.1

Абсолютні похибки для квадратурних формул. Різницю між лівою і правою частинами квадратурної формули називають її *залишковим членом* і позначають $R_n(f)$. Величина $|R_n(f)|$

визначає абсолютну похибку квадратурної формули, яка залежить від числа n — кількості відрізків, на які розбивають відрізок інтегрування $[a; b]$ (зі збільшенням n абсолютна похибка зменшується).

Оцінювання абсолютних похибок квадратурних формул проводять за формулами, що вміщені у табл. 7.1. Використовуючи ці формули, можна визначити число n так, щоб обчислити заданий інтеграл із наперед заданою точністю.

Таблиця 7.1

№	Назва формули	Оцінка абсолютної похибки	M_i
1	прямокутників (7.1), (7.2)	$\lvert R_n(f)\rvert_{\text{пр1}} \le \dfrac{(b-a)^2 M_1}{2n}$	$M_1 = \max\limits_{x\in[a;\,b]} \lvert f'(x)\rvert$
2	прямокутників (7.3)	$\lvert R_n(f)\rvert_{\text{пр2}} \le \dfrac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$	$M_2 = \max\limits_{x\in[a;\,b]} \lvert f''(x)\rvert$
3	трапецій	$\lvert R_n(f)\rvert_{\text{тр}} \le \dfrac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$	$M_2 = \max\limits_{x\in[a;\,b]} \lvert f''(x)\rvert$
4	Сімпсона	$\lvert R_{2n}(f)\rvert_{\text{пар}} \le \dfrac{(b-a)^5 M_3}{180\cdot(2n)^4}$	$M_3 = \max\limits_{x\in[a;\,b]} \lvert f^{(4)}(x)\rvert$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона. Оцініть похибку кожної формули.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0; 1]$ на 10 рівних частин точками $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2,\ ...,\ x_{10} = 1$ і обчислимо значення підінтегральної функції $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ у цих точках (табл. 7.2)

Таблиця 7.2

№	x_i	y_i	№	x_i	y_i

0	0	1	**6**	0,6	1,1661903
1	0,1	1,0049875	**7**	0,7	1,2206555
2	0,2	1,0198039	**8**	0,8	1,2806248
3	0,3	1,0440306	**9**	0,9	1,3453624
4	0,4	1,0770329	**10**	1	1,4142135
5	0,5	1,1180339			

Обчислимо наближено заданий інтеграл за формулами (7.1) — (7.5). Маємо:

1) за формулою (7.1)

$$I \approx \frac{1}{10}(y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 1{,}1276722;$$

2) за формулою (7.2)

$$I \approx \frac{1}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = 1{,}1690936;$$

3) за формулою (7.3)

$$I \approx \frac{1}{10}(f(0{,}5) + f(1{,}5) + \ldots + f(9{,}5)) = 1{,}1474988;$$

4) за формулою (7.4)

$$I \approx \frac{1}{20}(y_0 + y_{10} + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9)) = 1{,}1483829.$$

5) за формулою (7.5)

$$I \approx \frac{1}{30}(y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + \\ + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)) = 1{,}1477932.$$

Оцінимо точність одержаних результатів. Знайдемо похідні

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{(1+x^2)^7}}.$$

На відрізку $[0; 1]$ виконуються нерівності

$$|f'(x)|\le 1,\ |f''(x)|\le 1,\ |f^{(4)}(x)|\le 9.$$

Використовуючи формули з табл. 7.1, дістанемо такі оцінки:

$$|R_n(f)|_{\text{пр1}}\le \frac{(1-0)^2\cdot 1}{2\cdot 10}=0{,}05;\ |R_n(f)|_{\text{пр2}}\le \frac{1}{2400}<0{,}00042;$$

$$|R_n(f)|_{\text{тр}}\le \frac{1}{1200}<0{,}00084;\ |R_{2n}(f)|_{\text{пар}}\le \frac{9}{180\cdot(10)^4}=0{,}000005.$$

Порівнявши похибки, переконуємось, що найбільш точним є результат, одержаний за формулою Сімпсона (парабол)

$$I=1{,}147793\pm 0{,}000005.$$

Коментар. Заданий інтеграл можна обчислити за формулою Ньютона—Лейбніца. Отримаємо

$$I=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx\approx 1{,}1477935,$$

що підтверджує правильність проведених обчислень.

Запитання для самоперевірки

1. У чому суть задачі числового інтегрування?
2. Що таке квадратурні формули?
3. Які є формули прямокутників? Як вони будуються?
4. Чим відрізняється формула трапецій від формули прямокутників?
5. На скільки частин розбивають відрізок інтегрування за формулою Сімпсона?
6. Яка точність квадратурних формул?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграл $I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$, використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона, розбивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Перевірте результат безпосереднім інтегруванням.

Відповіді: 1. за формулою прямокутників (7.1) I≈0,32102; за формулою прямокутників (7.2) I≈0,37074; за формулою трапецій I≈0,34574; за формулою Сімпсона I≈0,34658; за формулою Ньютона-Лейбниця I≈0,346574.

Тема 8. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

План

1. Постановка задачі. Класифікація методів розв'язування задачі Коші для диференціальних рівняння першого і другого порядків. Використання формули Тейлора для розв'язування задачі Коші. Оцінки точності. Приклади.
2. Метод Ейлера. Модифікація методу Ейлера другого порядку.
3. Методи Рунге-Кутта. Стійкість і збіжність. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

Література: [1] — [9].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 8 студент повинен ***знати:*** постановку задачі наближеного розв'язання диференціальних рівнянь за заданих початкових умов (задачі Коші); ***уміти:*** знаходити наближені розв'язки задачі Коші для рівнянь першого порядку, використовуючи методи Ейлера та Рунге-Кутта.

Основні теоретичні відомості

Нехай треба розв'язати задачу Коші, тобто знайти такий розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{8.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{8.2}$$

Метод Ейлера. Розіб'ємо відрізок $[x_0; x]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + hi\,(i = 1, 2, ..., n)$, де $h = \dfrac{x - x_0}{n}$ — крок процесу. Вважатимемо, що на проміжку $[x_0; x_0 + h]$ $([x_0; x_1])$ похідна y' зберігає стале значення і дорівнює $f(x_0, y_0)$. Тоді

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0),$$

де y_1 — значення шуканої функції в точці $x_1 = x_0 + h$. Звідси

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Повторюючи операцію для наступних проміжків $[x_1; x_2], ...,$ $[x_{n-1}; x_n]$, послідовно дістають значення шуканої функції в точках $x_2, ..., x_n$:

$$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1),$$

$$y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2),$$

....

$$y_n \approx y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

У результаті обчислень дістають наближену інтегральну криву задачі Коші (8.1), (8.2) у вигляді ламаної з вершинами $M_i(x_i, y_i)\,(i = 0, 1, ..., n)$.

Порядок похибки методу Ейлера на інтервалі $[x_i; x_{i+1}]$ дорівнює h^2, а на всьому відрізку $[a; b]$ — h, тобто метод Ейлера має перший порядок точності. Отже, для підвищення точності в 10 разів (для обчислення одного додаткового десяткового знака) потрібно збільшити кількість точок розбиття також у 10 разів, що значно збільшить обсяг обчислювальної роботи. У цьому полягає основний недолік методу.

Метод Рунге—Кутта. Є кілька шляхів побудови чисельних методів розв'язання задачі Коші (8.1), (8.2) вищої за порядком точності відносно h. Один із них ґрунтується на використанні розкладання розв'язку за формулою Тейлора (інакше кажучи, розкладання в ряд). Проте на практиці перевагу надають методам, які вимагають фактичного обчислення лише значень правої частини рівняння (8.1), без використання її похідних. Саме такими і є методи Рунге–Кутта.

Найпоширенішим на практиці є метод Рунге–Кутта четвертого порядку точності. Як і в методі Ейлера відрізок $[x_0;\, x]$ розбивають на n рівних частин. Обчислення проводять за формулами:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

де

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i), \qquad k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\ k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h,\, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

Похибка на кожному кроці цього методу має порядок h^5, а сумарна похибка методу на всьому інтервалі — h^4. Таким чином, якщо число точок розбиття збільшити у 10 разів, то точність підвищиться в 10 000 разів.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Використовуючи методи Ейлера та Рунге–Кутта, проінтегруйте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -y\cos 3x \tag{8.3}$$

на проміжку $x \in [0;\, 2]$ за початкової умови $y(0) = 1$ ($x_0 = 0$, $y_0 = 1$).

Розв’язання. Задане рівняння зручне для ілюстрації тим, що воно має аналітичний розв’язок

$$y = e^{-\frac{\sin 3x}{3}}, \tag{8.4}$$

який шукається відокремленням змінних. Цей аналітичний розв’язок буде використано як точний (еталонний) для порівняння з ним результатів наближених чисельних розв’язків рівняння (8.3) методами Рунге—Кутта.

З метою чисельного інтегрування рівняння (8.3) виберемо крок інтегрування $h = 0{,}2$. При цьому значенні інтегрування на всьому інтервалі $x \in [0; 2]$ буде здійснене за $n = \frac{2-0}{0{,}2} = 10$ кроків.

Результати чисельного інтегрування заданого рівняння методами Ейлера та Рунге—Кутта подано в табл. 8.1 та 8.2.

Таблиця 8.1

n	x_i	y_i (за методом Ейлера)	n	x_i	y_i (за методом Ейлера)
0	0	1,000	6	1,2	0,890
1	0,2	0,800	7	1,4	1,050
2	0,4	0,668	8	1,6	1,153
3	0,6	0,620	9	1,8	1,133
4	0,8	0,648	10	2,0	0,989
5	1	0,743			

Таблиця 8.2

n	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i (за методом Рунге—Кутта 4-го порядку)
0	0	—	—	—	—	1,000
1	0,200	– 0,200	– 0,172	– 0,185	– 0,136	0,828
2	0,400	– 0,137	– 0,094	– 0,097	– 0,053	0,733
3	0,600	– 0,053	– 0,010	– 0,010	0,033	0,723
4	0,800	0,033	0,075	0,077	0,118	0,798
5	1,000	0,118	0,155	0,158	0,189	0,954
6	1,200	0,189	0,207	0,209	0,209	1,159
7	1,400	0,208	0,183	0,182	0,131	1,337
8	1,600	0,131	0,059	0,058	– 0,024	1,394
9	1,800	– 0,024	– 0,104	– 0,101	– 0,164	1,294
10	2,000	– 0,164	– 0,202	– 0,199	– 0,210	1,098

Порівняємо одержані результати з точним розв'язком (8.4). Як видно з табл. 8.3, наближений розв'язок, обчислений методом Рунге—Кутта практично збігається з точним розв'язком задачі Коші.

Таблиця 8.3

n	x_i	y_i (аналітичний розв'язок (6.7)	y_i (за методом Ейлера)	y_i (за методом Рунге—Кутта)
0	0	1,000	1,000	1,000
1	0,200	0,828	0,800	0,828
2	0,400	0,733	0,668	0,733
3	0,600	0.723	0,620	0,723
4	0,800	0,798	0,648	0,798
5	1,000	0,954	0,743	0,954
6	1,200	1,159	0,890	1,159
7	1,400	1,337	1,050	1,337
8	1,600	1,394	1,153	1,394
9	1,800	1,294	1,133	1,294
10	2,000	1,098	0,989	1,098

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
2. У чому полягає метод Ейлера розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?
3. Який порядок точності методу Ейлера?
4. Який порядок точності методу Рунге–Кутта?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Проінтегруйте рівняння $y' = y(1 - x)$ на проміжку $[0; 1]$ за умови $y(0) = 1$, використовуючи методи Ейлера та Рунге–Кутта (крок $h = 0{,}1$; точний розв'язок $y = e^{x-0{,}5x^2}$).

Відповіді: 1. Див. табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Метод	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ейлера	y	1,000	1,105	1,208	1,309	1,404	1,491	1,567	1,631	1,681	1,715	1,732
Рунге–Кутта		1,000	1,099	1,197	1,290	1,377	1,455	1,522	1,576	1,616	1,640	1,648
Точний розв’язок		1,000	1,099	1,197	1,290	1,377	1,455	1,522	1,576	1,616	1,640	1,648

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Задачин В.М.* Чисельні методи: навч. посібник/ Конюшенко І. Г.– Х., Вид. ХНЕУ ім. С.Кузнеця, 2014. – 180 с.

2. *Клешня Н. О.* Чисельні методи в інженерних задачах: Методичні вказівки/ Шквар Є. О., Коробова М. В.— К.: КМУЦА, 2002. — 40 с.

3. *Мамчук В.І.* Числові методи: навч. посібник. – К.: НАУ, 2015. — 388 с.

4. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.- М.: Наука, 1989.

5. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2 / Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2000, – 792 с.

6. *Попов В.В.* Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету. – Видавничо-поліграфічний центр ‘‘Київський університет’’, 2012 – 303 с.

7. *Репета В.К.* Вища математика: підручник: у 2 ч. – Ч. 2. – 2-е вид. виправ. – К.: НАУ, 2017. – 504 с.

8. *Турчак Л.И.* Основы численных методов. -М.: Наука,1987.

9. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи: підручник. — Л.: Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004. — 408 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
РЕПЕТА Віктор Кузьмич
ГЛУХОВ Олександр Дмитрович