МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Київ 2020

УДК 517.2 (076.5)
В 558

Укладачі:
І. О. Ластівка – д.т.н., проф., зав. каф.

О. С. Давидов – к.ф.-м.н., доц.

І. В. Шевченко – к.е.н., доц.

Т. А. Левковська – ст. викл.

Рецензент *А. С. Богатирчук*

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 1/20 від 23.06.2020 р.).

В 558 **Вища математика. Диференціальне числення функцій багатьох змінних:** методичні рекомендації до самостійної роботи студентів / уклад. : І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко, Т. А. Левковська. – К. : НАУ, 2020. – 56 с.

Укладено відповідно до програм навчальної дисципліни «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язування типових задач розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», запитання та завдання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП 4

Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 5

Тема 2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ 14

Тема 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ 26

Тема 4. ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ 37

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 56

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійно працювати з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час розв'язування задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методами дослідження та розв'язування математичних задач.

У запропонованій методичній праці підібрано задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Матеріал кожної теми даної методичної розробки відповідає робочим програмам технічних та економічних спеціальностей дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». Кожна тема містить рекомендовану літературу, основні методичні рекомендації, розв'язані типові приклади, запитання та завдання для самоперевірки та завдання для самостійного виконання, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичну та методичну підтримку навчального процесу студентів.

Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План

1. Поняття функції двох змінних.
2. Границя функції двох змінних.
3. Неперервність функції двох змінних.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати*** означення: функції двох змінних, області визначення, границі та неперервності функції двох змінних; ***уміти***: знаходити область визначення функції, обчислювати границі функції, досліджувати функції двох змінних на неперервність.

Нехай задано множину $D \in R^n$, де R^n – n-вимірний простір. Якщо кожній точці $x \in D$ за певним законом відповідає одне і тільки одне дійсне число z, то говорять, що на множині D визначено *функцію від* n *змінних* і записують $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, де $x_n \in R^n$. Множину D при цьому називають *областю визначення* або *областю існування функції*.

Поняття функції двох змінних

Розглянемо частинний випадок функції багатьох змінних – функцію двох змінних. Усі основні поняття функції двох змінних узагальнюють на випадок більшої кількості змінних. Окрім того, функція двох змінних може бути зображена геометрично.

Функція двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ *вважається заданою*, якщо кожній парі точок $\left(x; y\right)$ з області визначення D координатної площини Oxy поставлено у відповідність одне і тільки одне значення z.

Множина таких значень z у просторі визначає деяку поверхню, яка геометрично відображає задану функцію $z = f\left(x, y\right)$ (рис. 1.1).

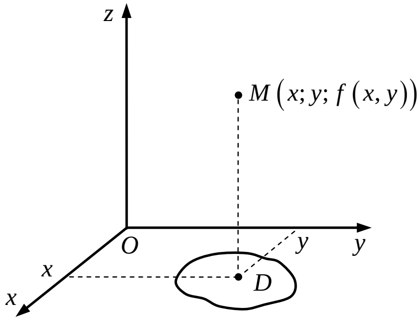

Рис. 1.1

Границя функції двох змінних

Нехай функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена в деякій області D і точка $M_0\left(x_0; y_0\right) \in D$. Множина всіх точок $M\left(x; y\right)$ площини, координати яких задовольняють нерівність $\rho\left(M, M_0\right) = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta$, називається δ-*околом точки* $M_0\left(x_0; y_0\right)$. Отже δ-окіл точки M_0 – це всі внутрішні точки круга з центром у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і радіусом δ (рис. 1.2).

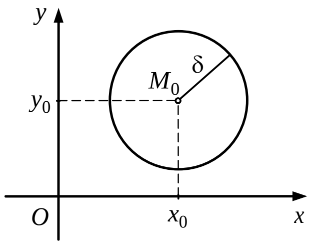

Рис. 1.2

Нехай функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена в деякому околі точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$, за винятком, можливо, самої точки. Число A називають *границею функції* $z = f\left(x, y\right)$ при наближенні точки M до точки M_0, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх точок M, які задовольняють нерівність

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ виконується нерівність $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записати це можна так:

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y)=A \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

З означення випливає, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка M наближається до точки M_0, і значення границі єдине.

Неперервність функції двох змінних

Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0;y_0)$, якщо виконуються умови:

а) функція визначена в точці $M_0(x_0;y_0)$ і деякому її δ-околі;

б) існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

в) ця границя дорівнює значенню функції в точці $M_0(x_0;y_0)$, тобто $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з умов, то функція в точці $M_0(x_0;y_0)$ має розрив.

Існує інше означення неперервності функції, яке рівносильне попередньому.

Позначимо $\Delta x=x-x_0$ і $\Delta y=y-y_0$ – прирости аргументів x і y, а $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ повний приріст функції $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$. Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0;y_0)$, якщо виконується рівність $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$.

Функція $z=f(x,y)$ називається *неперервною на множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{xy}$; в) $z=\ln\left(x+y\right)$;

г) $z=\arcsin\left(x-y\right)$; д) $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$;

е) $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\cdot\left(9-x^2-y^2\right)}$; є) $z=\ln\dfrac{x^2+y^2-2x}{4x-x^2-y^2}$.

Розв'язання.

а) Функція $z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}$ визначена в усіх точках $\left(x;y\right)$, для яких $9-x^2-y^2\geq 0$, або $x^2+y^2\leq 9$. Останню нерівність задовольняють координати всіх точок, що лежать всередині та на межі кола радіуса $R=3$ з центром у початку координат (рис. 1.3).

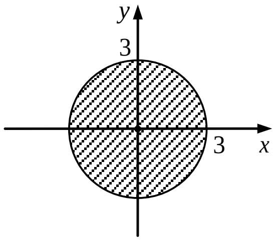

Рис. 1.3

Множиною значень функції є відрізок $\left[-3;3\right]$.

б) Функція $z=\sqrt{xy}$ визначена в усіх точках $\left(x;y\right)$, для яких $xy\geq 0$. Це можливо у двох випадках: 1) $x\geq 0,\ y\geq 0$; 2) $x\leq 0,\ y\leq 0$.

У першому випадку координати всіх точок лежать у першій чверті та на координатних осях, у другому – у третій чверті та на координатних осях (рис. 1.4).

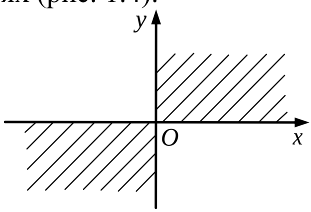

Рис. 1.4

в) Функція $z=\ln\left(x+y\right)$ визначена в усіх точках $\left(x;y\right)$, для яких

$x + y > 0$, або $y > -x$ (рис. 1.5).

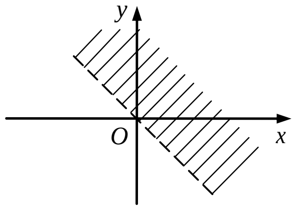

Рис. 1.5

Точки прямої $y = -x$ не включаються до області визначення.

г) Область визначення функції $z = \arcsin(x - y)$ знаходимо з системи нерівностей:

$$-1 \le x + y \le 1, \text{ або } \begin{cases} y \ge x - 1, \\ y \le x + 1. \end{cases}$$

Областю визначення є полоса, що розташована між прямими $y = x - 1$ і $y = x + 1$, включаючи й точки прямих.

д) Функція $z = \sqrt{\sin \pi \left(x^2 + y^2\right)}$ набуває дійсних значень у тих точках площини, координати яких задовольняють нерівності

$\sin \pi \left(x^2 + y^2\right) \ge 0$ або $2n \le x^2 + y^2 \le 2n + 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

тобто областю визначення даної функції є сім’я концентричних кіл (рис. 1.6).

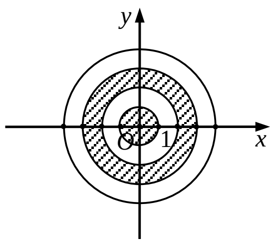

Рис. 1.6

е) Функція $z = \sqrt{\left(x^2 + y^2 - 4\right) \cdot \left(9 - x^2 - y^2\right)}$ визначена в усіх точках $(x; y)$, для яких $\left(x^2 + y^2 - 4\right) \cdot \left(9 - x^2 - y^2\right) \ge 0$. Ця нерівність має розв’язки тоді, коли виконується одна з двох систем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \ge 0, \\ 9 - x^2 - y^2 \ge 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \le 0, \\ 9 - x^2 - y^2 \le 0. \end{cases}$$

Розв'язок першої системи – це точки кільця $4 \le x^2 + y^2 \le 9$, а друга система розв'язків не має. Таким чином, множина визначення функції – це кільця радіусами $r_1 = 2, r_2 = 3$.

є) Область визначення функції $z = \ln \dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{4x - x^2 - y^2}$ знаходимо з умови існування логарифма: $\dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{4x - x^2 - y^2} > 0$.

Окрім того, $4x - x^2 - y^2 \ne 0$. Ці умови виконуються тоді, коли:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x > 0, \\ 4x - x^2 - y^2 > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x < 0, \\ 4x - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

Нерівності першої системи запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 > 1, \\ 4 > x^2 - 4x + 4 + y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 1, \\ (x-2)^2 + y^2 < 2^2. \end{cases}$$

Розв'язком системи є точки кола радіуса 2 з центром у точці (2; 0): $(x-2)^2 + y^2 < 2^2$, що не належать замкненому колу з центром у точці (1; 0) радіуса 1: $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ (рис.1.7).

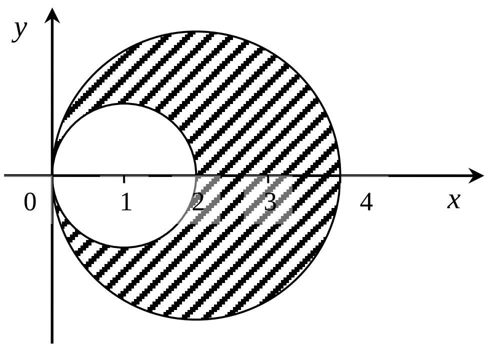

Рис. 1.7

Перетворивши аналогічно нерівності другої системи, отримуємо:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 1, \\ (x-2)^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Ця система розв'язків не має. Множиною визначення функції будуть розв'язки першої системи.

Приклад 2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \left(x^2 - y^2\right)$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{2-xy}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} \left(x^2 - y^2\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} x^2 - \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}} y^2 = 1 - 9 = -8$.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{2-xy}{x^2+y^2} = \dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (2-xy)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \left(x^2+y^2\right)} = \dfrac{2}{1} = 2$.

в) У точці $M(2;0)$ функція $\dfrac{\sin xy}{y}$ невизначена. Помножимо і поділимо її на $x \neq 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \cdot \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2,$$

оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

г) Помножимо чисельник і знаменник на спряжений до чисельника вираз:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2+9-9}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 3. Довести, що границі функції не існують:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4 y}{x^8+y^2}$.

Розв'язання.

а) У точці $M(0;0)$ функція $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ невизначена. Нехай точка $(x;y)$ наближається до точки $(0;0)$ по прямій $y=kx$, де k – деяке число. Отримуємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Границя функції залежить від вибору k, тобто від шляху наближення точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$. Отже, функція $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ не має границі в даній точці.

б) У точці $M(0;0)$ функція $\frac{x^4 y}{x^8+y^2}$ невизначена.

Нехай точка $(x;y)$ наближається до точки $(0;0)$ по прямій $y=kx^4$, де k – деяке число. Отримуємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4 y}{x^8+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^8}{x^8+k^8x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^8} = \frac{k}{1+k^8}.$$

Границя функції залежить від вибору k, тобто від шляху наближення точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$, а тому границя функції в даній точці не існує.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функції:

а) $z = xy$; б) $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання.

а) Функція $z = xy$ визначена в будь-якій точці площини Oxy . Повний приріст функції має вигляд:

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y .$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y \right) = 0 .$$

Отже, функція $z = xy$ неперервна в будь-якій точці площини Oxy .

б) Виходячи з довільних значень аргументів x та y, надамо їм відповідних приростів Δx та Δy. При цьому функція матиме приріст

$$\Delta z = \left(x + \Delta x \right)^2 + \left(y + \Delta y \right)^2 - \left(x^2 + y^2 \right) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \left(\Delta x \right)^2 + \left(\Delta y \right)^2 .$$

Перейдемо до границі функції при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(2x\Delta x + 2y\Delta y + \left(\Delta x \right)^2 + \left(\Delta y \right)^2 \right) = 0 .$$

Отже, при будь-яких значеннях аргументів x та y функція $z = x^2 + y^2$ – неперервна.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Як визначається функція n змінних?
2. Коли функція двох змінних вважається заданою?
3. Яка множина визначає область визначення функції двох змінних?
4. Дайте означення границі функції двох змінних.
5. Коли функція двох змінних неперервна в точці, на відрізку?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти область визначення функцій:

а) $z=\sqrt{y-x+2}$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$; в) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}$;

г) $z=\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}$; д) $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$;

е) $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-y}$; є) $z=\dfrac{1}{\ln x+\ln y}$.

Завдання 2. Обчислити границі функцій або довести, що їх не існує:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x}{x+y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2xy}{x^2+xy+y^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}}\dfrac{\mathrm{tg}\,xy}{y}$.

Завдання 3. Дослідити на неперервність функції:

а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Тема 2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

План

1. Поняття частинних похідних функції двох змінних та їх геометричний зміст.
2. Частинні похідні неявно заданої функції. Частинні похідні складеної функції.
3. Частинні похідні вищих порядків.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати:*** поняття частинних похідних першого та другого порядків, правила їх знаходження, теорему Шварца; ***уміти***: знаходити частинні похідні першого порядку функції двох змінних, неявно заданої та складеної функцій, частинні похідні та частинні мішані похідні другого порядку.

Поняття частинних похідних функції двох змінних та їх геометричний зміст

Нехай задана функція $z = f\left(x, y\right)$. Надамо незалежній змінній x приросту Δx при фіксованому значенні змінної y. Тоді отримуємо частинний приріст функції $f\left(x, y\right)$ по змінній x:

$$\Delta_{\acute{o}} z = f\left(x + \Delta x,\ \acute{o}\right) - f\left(x, y\right).$$

Аналогічно вводиться частинний приріст функції $f\left(x, y\right)$ по змінній y:

$$\Delta_y z = f\left(x,\ y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

Повний приріст Δz функції z визначається виразом

$$\Delta z = f\left(x + \Delta x,\ y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

У загальному випадку $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною функції* $z = f\left(x, y\right)$ *у точці* $M\left(x; y\right)$ *по змінній* x і позначається одним із таких символів: z'_x; f'_x; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Частинну похідну функції $z = f\left(x, y\right)$ у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$ по змінній x позначають так: $f'_x\left(x_0, y_0\right)$ або $f'_x\big|_{M_0}$.

Аналогічно *частинна похідна функції* $z = f\left(x, y\right)$ *у точці* $M\left(x; y\right)$ *по змінній* y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

і позначається: z'_y; f'_y; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Згідно з означенням, щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, обчислюють звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ по змінній x, вважаючи змінну y сталою. Аналогічно $\frac{\partial z}{\partial y}$ – це похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y при фіксованому значенні змінної x.

Графіком функції $z = f(x, y)$ є лінія перетину поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між прямою, паралельною осі Ox і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x, y_0)$ у точці $M_0(x_0; y_0; (x_0; y_0))$ (рис. 2.1).

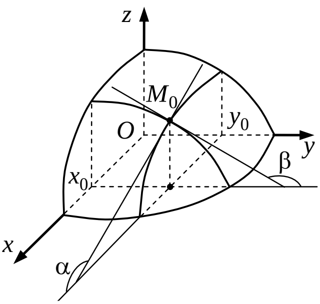

Рис. 2.1

Аналогічно $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$, де β – кут між прямою, паралельною осі Oy і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x_0, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0; (x_0; y_0))$.

Частинні похідні неявно заданої функції. Частинні похідні складеної функції

Неявно задана функція задається рівнянням $F(x; y; z) = 0$, де $z = f(x, y)$. Частинні похідні такої функції знаходять за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

Нехай задана функція $z=f\left(x,y\right)$, де $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$. Тоді функція $z=f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ є *складеною функцією* однієї змінної t. У цьому випадку похідна має вигляд:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Нехай задана функція $z=f\left(x,y\right)$, де $y=y\left(x\right)$, тобто $z=f\left(x,y\left(x\right)\right)$ є функцією однієї змінної x. Тоді маємо похідну:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \text{ або } \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Нехай задана функція $z=f\left(x,y\right)$, де $x=x\left(u,v\right)$, $y=y\left(u,v\right)$. Тоді функція $z=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$ є *складеною функцією двох незалежних змінних* u і v. У цьому випадку частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$ знаходимо за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція $z=f(x,y)$ задана в області D і має частинні похідні z_x', z_y' у кожній точці області D, то їх називають *частинними похідними першого порядку*, і ці похідні можна розглядати як функції змінних x і y, які також можуть мати частинні похідні за змінними x і y.

Частинні похідні функцій $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ називаються *частинними похідними другого порядку* функції $z=f(x,y)$ і позначаються:

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx},\quad z''_{yy}=(z'_y)'_y=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy},$$

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\quad z''_{yx}=(z'_y)'_x=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}.$$

Похідні z''_{xy}, z''_{yx} називаються *мішаними частинними похідними другого порядку.*

Теорема Шварца. Якщо мішані частинні похідні другого порядку існують у деякому околі точки $M\left(x;y\right)$ і неперервні в самій точці M, то виконується умова: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Ця теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних частинних похідних, які різняться порядком диференціювання.

Аналогічно беруться похідні третього, четвертого і так далі порядків, наприклад:

$$z'''_{xxx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad z'''_{xxy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},$$

$$z'''_{xyy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\ \text{тощо;}$$

$$z^{(4)}_{xxxy}=\frac{\partial}{\partial \text{ó}}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y},\quad z^{(4)}_{xxyy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$$

$$z^{(4)}_{xyxx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}\ \text{тощо.}$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^n z}{\partial x^2\partial y^{n-2}},\ \frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}},\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\ .$$

Кількість різних частинних похідних n-го порядку функції двох змінних дорівнює $n+1$.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = e^{x^2 - y}$; б) $z = \ln\left(x^2 + \dfrac{y}{x}\right)$; в) $z = \left(\cos x\right)^y$; г) $z = (x+y)^{\frac{x^2}{y}}$.

Розв'язання.

а) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \left(e^{x^2-y}\right)'_x = e^{x^2-y} \cdot 2x = 2xe^{x^2-y};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \left(e^{x^2-y}\right)'_y = e^{x^2-y} \cdot (-1) = -e^{x^2-y}.$$

б) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + \frac{y}{x}} \cdot \left(2x - \frac{y}{x^2}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3 + y}.$$

в) Якщо x – змінна, а y – стала, то $z(x, y)$ – степенева функція від x. Отже, скористаємося формулою похідної степеневої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(\cos x)^{y-1}(\cos x)' = -\acute{o}\sin x(\cos x)^{y-1}.$$

Якщо ж y – змінна, а x – стала, то маємо показникову функцію, її похідна:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos x)^y \cdot \ln(\cos x).$$

г) $z = (x+y)^{\frac{x^2}{y}}$ – степенево-показникова функція. Тому для знаходження її частинних похідних застосуємо метод логарифмічного диференціювання. Для цього спочатку знайдемо

$$\ln z = \frac{x^2}{y}\ln(x+y).$$

Продиференціюємо за змінною x ліву і праву частини цієї рівності, враховуючи те, що в виразі $\ln z$ змінна z – функція. Тоді

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y}\ln\left(x+y\right)+\frac{x^2}{y}\cdot\frac{1}{x+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y}(2x\ln(x+y)+\frac{x^2}{x+y})=\frac{(x+y)^{\frac{x^2}{y}}}{y}\cdot\left(2x\ln(x+y)+\frac{x^2}{x+y}\right).$$

Аналогічно диференціюємо за змінною y:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\ln(x+y)+\frac{x^2}{y}\cdot\frac{1}{x+y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y^2}z(-\ln(x+y)+\frac{y}{x+y})=\frac{x^2(x+y)^{\frac{x^2}{y}}}{y^2}\cdot(-\ln(x+y)+\frac{y}{x+y}).$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні неявно заданих функцій:

а) $z^4-5xyz=2$; б) $e^z+z-x^2y+1=0$.

Розв'язання.

а) Запишемо функцію у вигляді:

$$F\left(x;y;z\right)=z^4-5xyz-2.$$

Знайдемо F_x', F_y', F_z': $F_x'=-5yz,\ F_y'=-5xz,\ F_z'=4z^3-5xy$.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-5yz}{4z^3-5xy}=\frac{5yz}{4z^3-5xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-5xz}{4z^3-5xy}=\frac{5xz}{4z^3-5xy}.$$

б) Для функції $F\left(x;y;z\right)=e^z+z-x^2y+1$ знайдемо частинні похідні: $F_x'=-2xy,\ F_y'=-x^2,\ F_z'=e^z+1$.

Тоді $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{-2xy}{e^z+1}=\dfrac{2xy}{e^z+1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{-x^2}{e^z+1}=\dfrac{x^2}{e^z+1}$.

Приклад 3. Знайти похідні складених функцій:

а) $z=\dfrac{y^2-1}{x}$, де $x=1-e^{2t}$, $y=e^t$; б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, де $y=x^2+1$.

Розв'язання.

а) Знайдемо частинні похідні:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}}=\left(\frac{y^2-1}{x}\right)_x'=-\frac{y^2-1}{x^2}=\frac{1-y^2}{x^2}=\frac{1-e^{2t}}{\left(1-e^{2t}\right)^2}=\frac{1}{1-e^{2t}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}}=\left(\frac{y^2-1}{x}\right)_y'=\frac{2y}{x}=\frac{2e^t}{1-e^{2t}};$$

$$\frac{dx}{dt}=-2e^{2t};\ \frac{dy}{dt}=e^t.$$

Похідна складеної функції матиме вигляд:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1-e^{2t}}\cdot\left(-2e^{2t}\right)+\frac{2e^t}{1-e^{2t}}\cdot e^t=-\frac{2e^{2t}}{1-e^{2t}}+\frac{2e^{2t}}{1-e^{2t}}=0.$$

б) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{x^2\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)\cdot x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}=$$

$$=-\frac{x^2+1}{x^2+\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x^4+3x^2+1};\ \frac{dy}{dx}=2x.$$

Отже,

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}+\frac{x}{x^4+3x^2+1}\cdot 2x=\frac{-x^2-1+2x^2}{x^4+3x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні складеної функції $z=x^2+y^2$, де $x=\ln(uv)$, $y=\sqrt{uv}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+y^2\right)_x'=2x=2\ln(uv);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+y^2\right)_y'=2y=2\sqrt{uv};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\left(\ln(uv)\right)_u'=\frac{1}{uv}\cdot v=\frac{1}{u};\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\left(\ln(uv)\right)_v'=\frac{1}{uv}\cdot u=\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\sqrt{uv}\right)_u'=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}};\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\left(\sqrt{uv}\right)_v'=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot u=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Отже, частинні похідні заданої складеної функції мають вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2\ln(uv)\cdot\frac{1}{u}+2\sqrt{uv}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}=\frac{2\ln(uv)}{u}+v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2\ln(uv)\cdot\frac{1}{v}+2\sqrt{uv}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{2\ln(uv)}{v}+u\,.$$

Приклад 5. Довести, що функція $z=\frac{y^2}{3x}+\ln(1+xy)$ задовольняє рівняння: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0.$

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{y}{1+xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{3x}+\frac{x}{1+xy}\,.$$

Підставимо ці результати в задане рівняння

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=-\frac{y^2}{3}+\frac{x^2y}{1+xy}-\frac{2}{3}y^2-\frac{x^2y}{1+xy}+y^2=0\,,$$

що і треба було довести.

Приклад 6. Знайти частинні похідні другого порядку функцій: а) $z=x^4-2x^2y^3+y^5+1$; б) $z=x^y$; в) $z=\sqrt{2xy+y^2}$;

г) $x+y+z=e^z$.

Розв'язання.

а) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z_x{}'=4x^3-4xy^3\ ,\ z_y{}'=-6x^2y^2+5y^4\,.$$

Частинні похідні другого порядку мають вигляд:

$$z''_{xx}=12x^2-4y^3,\ z''_{yy}=-12x^2y+20y^3,\ z''_{xy}=-12xy^2\ ,\ z''_{yx}=-12xy^2\,.$$

б) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z_x{}'=yx^{y-1}\ ,\ z_y{}'=x^y\ln x\,.$$

Частинні похідні другого порядку мають вигляд:

$$z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}\ ,\ z''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\,,$$

$$z''_{yy} = x^y \ln^2 x \ , \ z''_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} .$$

в) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z_x{}' = \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}} \ , \ z_y{}' = \frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}} \ .$$

Частинні похідні другого порядку мають вигляд:

$$z''_{xx} = -\frac{y}{\left(2xy+y^2\right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot 2y = -\frac{y^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} \ ,$$

$$z''_{xy} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - y \cdot \dfrac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} = \frac{2xy+y^2-xy-y^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} = \frac{xy}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} \ ,$$

$$z''_{yy} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{\left(x+y\right)\cdot\left(2x+2y\right)}{2\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} = \frac{2xy+y^2-\left(x+y\right)^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} = -\frac{x^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}}$$

$$z''_{yx} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - \dfrac{2y\cdot\left(x+y\right)}{2\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} = \frac{2xy+y^2-xy-y^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} = \frac{xy}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}} \ .$$

г) Позначимо: $F(x,\ y,\ z) = x + y + z - e^z$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} \quad ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} \quad .$$

Продиференціюємо тепер $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ за змінною x, враховуючи те, що z є функцією від $x,\ y$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{-e^z\,\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left(1-e^z\right)^2} = \frac{-e^z}{\left(1-e^z\right)^3} = \frac{-\left(x+y+z\right)}{\left(1-x-y-z\right)^3} .$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{-e^z\,\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left(1-e^z\right)^2}=\frac{-e^z}{\left(1-e^z\right)^3}=\frac{-\left(x+y+z\right)}{\left(1-x-y-z\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{-e^z\,\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left(1-e^z\right)^2}=\frac{-e^z}{\left(1-e^z\right)^3}=\frac{-\left(x+y+z\right)}{\left(1-x-y-z\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{-e^z\,\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left(1-e^z\right)^2}=\frac{-e^z}{\left(1-e^z\right)^3}=\frac{-\left(x+y+z\right)}{\left(1-x-y-z\right)^3}.$$

Приклад 7. Довести, що функція $z=\dfrac{y}{y^2-x^2}$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\cdot 2x}{(y^2-x^2)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2y^2}{(y^2-x^2)^2}=-\frac{x^2+y^2}{(y^2-x^2)^2}.$$

Диференціюючи ці вирази за змінними x та y, відповідно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y\left(y^2-x^2\right)^2-2xy\cdot 2\left(y^2-x^2\right)\cdot\left(-2x\right)}{\left(y^2-x^2\right)^4}=\frac{2y\left(y^2-x^2+4x^2\right)}{\left(y^2-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{2y\left(y^2+3x^2\right)}{\left(y^2-x^2\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y\left(y^2-x^2\right)^2-2y\cdot 2\left(y^2-x^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\left(y^2-x^2\right)^4}=\frac{-2y\left(y^2-x^2-2x^2-2y^2\right)}{\left(y^2-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{2y\left(y^2+3x^2\right)}{\left(y^2-x^2\right)^3}.$$

Звідси $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Дайте означення частинних похідних першого порядку функції двох змінних.

2. Як знайти частинні похідні неявно заданої функції?

3. За якими формулами знаходять похідні складеної функції?

4. Дайте означення частинних похідних та частинних мішаних похідних другого порядку функції двох змінних.

5. Як знайти частинні похідні вищих порядків?

6. У чому полягає теорема Шварца?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти частинні похідні функцій:

1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z=\ln\sqrt{x^2+2y-1}$; 3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{4y}$;

4) $x^2+y^2z-xyz=0$; 5) $e^x z-x+y^2z^3=0$; 6) $\sin(xy)+e^z-y+x=0$;

7) $z=x^2-3xy$, де $x=2t,\ y=t^2$; 8) $z=x^2-xy$, де $y=x^3$;

9) $z=x^2\ln y$, де $x=\dfrac{u}{v},\ y=uv$; 10) $z=e^{x-2y}$, де $x=\sin t,\ y=t^2$;

11) $z=x^2\ln y$, де $x=uv^2,\ y=3u-2v$; 12) $z=\operatorname{arctg}(xy)$, де $y=e^x$.

Завдання 2. Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

а) $z=x^4-2x^2y^3+y^5+1$; б) $z=xe^{\frac{y}{x}}$; в) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}$; г) $z=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$.

Завдання 3. Довести, що функція $z=f(x,y)$ задовольняє рівняння:

а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; б) $z=x^y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$;

в) $z = \sin\left(x + 4y\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

г) $z = \cos\left(x - 2y\right) + e^{x+2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Завдання 4. Обчислити значення частинних похідних функції $z = f(x, y)$ у точці $M\left(x; y; z\right)$ з точністю до двох знаків після коми:

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M\left(1;1;1\right)$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$; $M\left(1;2;1\right)$;

в) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z - 3 = 0$; $M\left(4;3;1\right)$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$, $M\left(-2;-1;2\right)$;

д) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M\left(0;-2;2\right)$.

Тема 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

План

1. Поняття диференціала функції двох змінних.
2. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.
2. Інваріантність диференціала функції двох змінних.
3. Диференціали вищих порядків.
4. Застосування повного диференціала до наближених обчислень функції. Формула Тейлора для функції двох змінних.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати*** означення диференціала першого та вищих порядків функції двох змінних, рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, формули наближеного обчислення та Тейлора; ***уміти***: знаходити диференціали першого та вищих порядків функції двох змінних, складати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, використовувати диференціал для наближених обчислень значень функції.

Поняття диференціала функції двох змінних

Розглянемо повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x; y)$: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною в точці* $M(x; y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A і B – деякі незалежні від Δx і Δy числа, а $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$. При $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$.

Диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина приросту функції, лінійна відносно Δx і Δy, тобто $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то вона має частинні похідні в цій точці і $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$. У цьому випадку повний диференціал має вигляд:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

Нехай поверхня задана в неявній формі $F(x; y; z) = 0$, тоді рівняння дотичної площини до цієї поверхні в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f\left(x,y\right)$, то поклавши $F\left(x;y;z\right)=f\left(x,y\right)=z$, дістанемо рівняння дотичної площини:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\left(x-x_0\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0,$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Інваріантність диференціала функції двох змінних

Нехай задана функція $z=f\left(x,y\right)$, де $x=x\left(u,v\right)$, $y=y\left(u,v\right)$, тобто $z\left(u,v\right)=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$, де u і v – незалежні змінні.

Скористаємося правилом диференціювання складеної функції:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Вирази в дужках є повними диференціалами dx і dy, тому

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Отримали повний диференціал функції $z=f\left(x,y\right)$ у випадку незалежних аргументів. Тобто диференціал функції має інваріантну (незмінну) форму при різному наповненні.

Диференціали вищих порядків

Диференціал другого порядку знаходять за формулою:

$$d^2z = d\left(dz\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Символічно це може бути записано так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot z.$$

Аналогічно можна записати формулу диференціала третього порядку:

$$d^3z = d\left(d^2z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z =$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 .$$

Для диференціала n-го порядку справедлива символічна формула:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z,\ n \in N ,$$

яка формально може бути розкрита за формулою біном Ньютона.

Застосування повного диференціала до наближених обчислень функції. Формула Тейлора для функції двох змінних

За допомогою повного диференціала можна обчислити наближене значення функції за формулою:

$$f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + df\left(x, y\right)$$

або $f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Ця рівність буде тим точніша, що менші прирости Δx, Δy.

Для наближених обчислень також використовують формулу Тейлора. Розглянемо функцію двох змінних $z = f\left(x, y\right)$.

Припустимо, що в околі точки $M_0(x_0;y_0)$ ця функція має неперервні частинні похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Тоді для довільної точки $M(x;y)$ з цього околу має місце *формула Тейлора*:

$$f(x_0+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + R_{n+1}(x,y),$$

де $R_{n+1}(x,y)$ – залишковий член у формі Лагранжа.

При $x_0=0,\ y_0=0$ формулу Тейлора називають *формулою Маклорена.*

Абсолютну похибку цих наближень оцінюють через залишковий член R_{n+1}.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайти повний диференціал функцій:

а) $z = e^{2x}y^3$; б) $\cos(xyz) = 2x - 3y + z^2$; в) $z = \arccos\frac{y}{x}$.

Розв'язання.

а) Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x}y^2.$$

Отже, повний диференціал функцій має вигляд:

$$dz = 2e^{2x}y^3dx + 3e^{2x}y^2dy = e^{2x}y^2(2ydx + 3dy).$$

б) Запишемо неявно задану функцію у вигляді:

$$F(x;y;z) = \cos(xyz) - 2x + 3y - z^2.$$

Знаходимо частинні похідні F_x', F_y', F_z' функції:

$$F_x' = -yz\sin(xyz) - 2,$$

$$F_y' = -xz\sin(xyz) + 3,$$

$$F_z' = -xy\sin(xyz) - 2z.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-yz\sin(xyz)-2}{-xy\sin(xyz)-2z}=-\frac{yz\sin(xyz)+2}{xy\sin(xyz)+2z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-xz\sin(xyz)+3}{-xy\sin(xyz)-2z}=\frac{3-xz\sin(xyz)}{xy\sin(xyz)+2z}.$$

Повний диференціал функцій матиме вигляд:

$$dz=-\frac{yz\sin(xyz)+2}{xy\sin(xyz)+2z}dx+\frac{3-xz\sin(xyz)}{xy\sin(xyz)+2z}dy=$$

$$=\frac{(3-xz\sin(xyz))dy-(yz\sin(xyz)+2)dx}{xy\sin(xyz)+2z}.$$

в) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Звідси $dz=\dfrac{ydx}{x\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{ydx-xdy}{x\sqrt{x^2-y^2}}$.

Приклад 2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі, проведеної до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

а) $z=x^2y+xy^2$, $M_0(2;1;6)$; б) $3x-y^3z^2-4xyz^3=-2$, $M_0(1;1;1)$.

Розв'язання.

а) Обчислимо частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у точці M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+y^2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=4+1=5;\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2xy,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=4+4=8.$$

Поверхня задана в явному вигляді. Підставивши обчислені значення у рівняння дотичної площини, маємо:

$$5(x-2)+8(y-1)-(z-6)=0,\ 5x+8y-z-12=0.$$

Рівняння нормалі виглядатиме:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-6}{-1}.$$

б) Запишемо неявну функцію у вигляді

$$F\left(x;y;z\right)=3x-y^3z^2-4xyz^3+2.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$F_x'=3-4yz^3,\ F_y'=-3y^2z^2-4xz^3,\ F_z'=-2y^3z-12xyz^2.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці M_0:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=3-4=-1,\ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=-3-4=-7,\ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-2-12=-14.$$

Складемо рівняння дотичної площини:

$-\left(x-1\right)-7\left(y-1\right)-14\left(z-1\right)=0$, $x+7y+14z-22=0$.

Рівняння нормалі матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-1}{-14},\ \text{або}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{14}.$$

Приклад 3. Знайти диференціали другого і третього порядків функції $z=x^2y^3$.

Розв’язання.

Знайдемо частинні похідні першого, другого і третього порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^2y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=6y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=12xy,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6x^2.$$

Отже, диференціали другого і третього порядків функції мають вигляд:

$$d^2z = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2,$$
$$d^3z = 18y^2dx^2dy + 36xydxdy^2 + 6x^2dy^3.$$

Приклад 4. Обчислити наближено $(1,96)^{3,03}$ за допомогою диференціала.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $z = x^y$. Знайдемо її значення в точці (2, 3):

$$z(2;\,3) = 2^3 = 8.$$

За умовою потрібно знайти:

$$z(1{,}96;\;3{,}03) = z(2-0{,}04;\,3+0{,}03).$$

Використовуючи повний диференціал, запишемо:

$$z(2-0{,}04;\,3+0{,}03) \approx z(2;\,3) + dz(2;\,3),$$

де $\Delta x = -0{,}04;\ \Delta y = 0{,}03$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};\ z'_x(2;\,3) = 3\cdot 4 = 12;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;\quad z'_y(2;\,3) = 8\ln 2 \approx 5{,}545;$$

$$dz = 12(-0{,}04) + 5{,}545\cdot 0{,}03 = -0{,}314.$$

Отже, $z(1{,}96;\,3{,}03) \approx 8 - 0{,}314 = 7{,}686.$

Точне значення $z(2;\,3) = 7{,}683$ відрізняється від знайденого на $\Delta = 0{,}003.$

Приклад 5. Розкласти за формулою Маклорена функцію $z = e^{x+y}\cdot\sin x$ до членів третього порядку включно.

Розв'язання.

Знайдемо dz, d^2z, d^3z у точці (0;0). Для цього знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}\cdot\sin x + e^{x+y}\cdot\cos x = e^{x+y}\cdot(\sin x + \cos x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}\cdot\sin x;\ \ dz(0;0) = dx;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+y}\cdot(\cos x + \sin x) + e^{x+y}\cdot(\cos x - \sin x) = 2e^{x+y}\cdot\cos x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{x+y}(\cos x + \sin x);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}\cdot\sin x;$$

$$d^2z(0;0)=\frac{\partial^2 z(0;0)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z(0;0)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z(0;0)}{\partial y^2}dy=2dx^2+2dxdy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=2e^{x+y}\cdot\cos x-2e^{x+y}\cdot\sin x;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2e^{x+y}\cdot\cos x;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=e^{x+y}\cdot(\sin x+\cos x);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=e^{x+y}\cdot\sin x;$$

$$d^3z(0;0)=\frac{\partial^2 z(0;0)}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z(0;0)}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z(0;0)}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+$$

$$+\frac{\partial^3 z(0;0)}{\partial y^3}dy^3=2dx^3+6dx^2dy+3dxdy^2.$$

У нашому випадку $dx=x-0=x, dy=y-0=y,$ отже за формулою Маклорена маємо в околі точки (0;0):

$$z(x,y)=z(0;0)+dz(0;0)+\frac{1}{2}d^2z(0;0)+\frac{1}{6}d^3z(0;0)+R_4=$$

$$=x+x^2+xy+\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{xy^2}{2}+R_4,$$

де R_4 – залишковий член.

Приклад 6. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки (1;1) функцію $z(x,y)$, що задана рівнянням $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, до членів другого порядку включно, якщо $z(1;\,1)=1$.

Розв'язання.

Функція $z(x,y)$ задана неявно, запишемо її у вигляді: $F(x,y,z)=z^3+yz-xy^2-x^3$. Знайдемо частинні похідні функції за формулами: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-y^2-3x^2}{3z^2+y}=\frac{y^2+3x^2}{3z^2+y};\quad \frac{\partial z(1;\,1)}{\partial x}=1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z-2xy}{3z^2+y}=\frac{2xy-z}{3z^2+y};\qquad \frac{\partial z(1,1)}{\partial y}=\frac{1}{4};$$

$$dz(1;1)=\frac{\partial z(1;1)}{\partial x}dx+\frac{\partial z(1;1)}{\partial y}dy=dx+\frac{1}{4}dy.$$

Знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{6x(3z^2+y)-(y^2+3x^2)\cdot 6z\cdot z'_x}{(3z^2+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2y(3z^2+y)-(y^2+3x^2)(6z\cdot z_y'+1)}{(3z^2+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x\partial y}=\frac{2\cdot 4-4\cdot\left(6\cdot\frac{1}{4}+1\right)}{4^2}=-\frac{1}{8};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(2x-z'_y)(3z^2+y)-(2xy-z)\cdot(6z\cdot z_y'+1)}{(3z^2+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial y^2}=\frac{\left(2-\frac{1}{4}\right)\cdot 4-(2-1)\cdot\left(6\cdot\frac{1}{4}+1\right)}{(3+1)^2}=\frac{7-\frac{5}{2}}{16}=\frac{9}{32}.$$

За формулою Тейлора:

$$z(x,y)=z(1;1)+dz(1;1)+\frac{1}{2}d^2z(1;1)+R_3,$$

де $dx=x-1,\quad dy=y-1,\quad R_3$ – залишковий член. Отже,

$$z(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+R_3.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що називається диференціалом функції двох змінних? Як його знайти?

2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, що задана явно.

3. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до неявно заданої поверхні.

4. За якою формулою знаходять диференціали другого і

третього порядків функції двох змінних?

5. За якою формулою обчислюють наближене значення функції?

6. Який вигляд має формула Тейлора? Коли її використовують?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти повні диференціали функцій:

а) $z=\dfrac{x}{y}$; б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; в) $z=\cos(xy)$; г) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$;

д) $z=\ln\operatorname{tg}(xy)$.

Завдання 2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі, проведеної до поверхні $z=f(x,y)$ в точці M:

1) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $M(2;2)$; 2) $z=e^{x^2+y^2}$, $M(2;2)$;

3) $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, $M(3;2)$; 4) $z=x^3y^2$, $M(1;1)$;

5) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $M(1;1)$; 6) $2x^2+y^2+z^2=15$, $M(1;2;3)$;

7) $4y^2-z^2+4xy-xz+3z-9=0$, $M(1;-2;1)$;

8) $x^2+y^2+z^2-xy+3z-7=0$, $M(1;2;1)$;

9) $x^2+y^2-3xy-x+y-z+2=0$, $M(2;1;0)$;

10) $x^2+y^2-3z^2+xy+2z=0$, $M(1;0;1)$;

11) $x^2+y^2-z^2+2yz+y-2z-2=0$, $M(1;1;1)$.

Завдання 3. Знайти диференціали другого і третього порядків функцій:

а) $z=e^{x-2y}$; б) $z=\ln(x-3y)$; в) $z=\cos(xy)$; г) $z=x^{2y}$;

д) $z=\log_x y$; е) $z=\left(x^2-y\right)^4$.

Завдання 4. Обчислити наближено:

а) $(0{,}98)^{3{,}02}$; б) $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$; в) $\sqrt[3]{1{,}02^2+0{,}05^2}$;

г) $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$.

Завдання 5. Розкласти функцію $z=(x,y)$ за формулою

Тейлора в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ до членів 2-го порядку включно:

а) $z=(x+1)^y$, $M(0;\ 2)$; б) $z=e^{3x-2y}\cdot x^2$; $M(1;\ 1)$;

в) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; $M(1;\ 1)$; г) $z=\ln(x+e^y)$; $M(0;0)$;

д) $z=y^x$, $M\left(1;1\right)$; е) $z=e^y\cos x$; $M(0;\ 0)$.

Тема 4. ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

План

1. Екстремум функції двох змінних.
2. Умовний екстремум функції двох змінних.
3. Найбільше та найменше значення функції двох змінних.
4. Похідна за напрямом і градієнт функції двох змінних.

Література: [1-5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми студент повинен ***знати*:** поняття критичних точок, максимуму та мінімуму, похідної за напрямом та градієнту функції двох змінних; ***уміти***: досліджувати функції двох змінних на екстремум, знаходити умовний екстремум функції, обчислювати найбільше та найменше значення функції у заданій області, знаходити похідну за напрямом і градієнт функції двох змінних.

Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z=f\left(x,y\right)$ визначена в області D і точка $M_0\left(x_0;y_0\right)\in D$. Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ називається *точкою максимуму* функції $z=f\left(x,y\right)$, якщо існує такий δ-окіл точки M_0, що для всіх точок $M\left(x;y\right)$, відмінних від точки M_0 з цього околу, виконується нерівність $f\left(x,y\right)<f\left(x_0,y_0\right)$.

Аналогічно визначається *точка мінімуму*, для якої повинна виконуватися нерівність $f\left(x,y\right)>f\left(x_0,y_0\right)$.

Геометрично це можна зобразити так (рис. 4.1, 4.2):

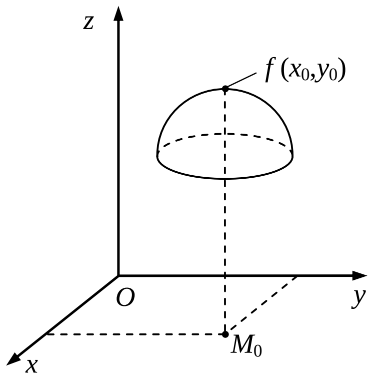

Рис. 4.1

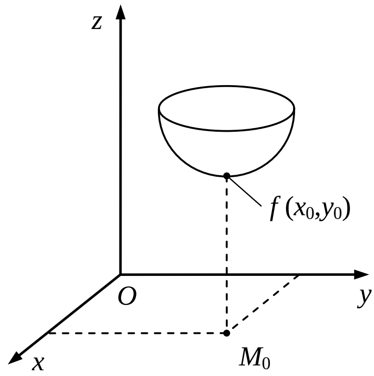

Рис. 4.2

Точки максимуму та мінімуму називають *точками екстремуму*, а значення функції в цих точках – *екстремумами функції*.

З означення випливає, що:

1) точки екстремуму належать області D;
2) точки максимуму та мінімуму мають локальний характер;
3) в області D функція може мати декілька екстремумів або не мати жодного екстремуму.

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних.

Якщо диференційовна функція $z = f\left(x, y\right)$ має екстремум в точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\begin{cases} z'_x\left(M_0\right) = 0, \\ z'_y\left(M_0\right) = 0. \end{cases}$

Розв'язками цієї системи є точки, підозрілі на екстремум, їх називають *стаціонарними*. Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна з частинних похідних не існує, називаються *критичними точками*.

У цих точках функція може мати екстремум, а може і не мати. Наприклад, для функції $z = xy$ точка $\left(0;0\right)$ є критичною, але в цій точці екстремуму немає, тому що в її околі знайдуться точки, для яких $z > 0$ (це точки першої та третьої чверті) і $z < 0$ (це точки другої та четвертої чверті). Тому для знаходження екстремуму функції слід для кожної критичної точки провести додаткове дослідження.

Достатні умови екстремуму функції двох змінних.

Нехай у стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$ і в деякому її околі функція $z=f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно: $z''_{xx}(M_0)=A,\ z''_{xy}(M_0)=B,\ z''_{yy}(M_0)=C$.

Позначимо $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta>0$, то функція $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ має екстремум, а саме максимум, якщо $A<0$, і мінімум, якщо $A>0$;

2) якщо $\Delta<0$, то функція $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремуму не має;

3) у випадку $\Delta=0$, питання про наявність екстремуму в точці $M_0(x_0;y_0)$ залишається відкритим і потребує додаткового дослідження із застосуванням похідних вищих порядків або по знаку приросту Δz в околі точки M_0.

Умовний екстремум функції двох змінних

Розглянемо функцію $z=f(x,y)$ за умови, що її аргументи пов'язані між собою співвідношенням $\varphi(x,y)=0$, яке називають *рівнянням зв'язку*.

Якщо рівняння $\varphi(x,y)=0$ розв'язне відносно змінної $y: y=g(x)$, то підставивши замість y його значення $g(x)$ у функцію $z=f(x,y)$, отримаємо функцію однієї змінної $z=f(x,g(x))$. Оскільки умова зв'язку врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі знаходження звичайного екстремуму функції однієї змінної.

У випадку, коли рівняння зв'язку допускає параметризацію: $x=x(t)$, $y=y(t)$, тобто $\varphi(x(t),y(t))=0$, задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі знаходження звичайного екстремуму функції однієї змінної $z = f\left(x(t), y(t)\right)$.

Однак є випадки, у яких не завжди рівняння зв'язку можна параметризувати або розв'язати відносно якоїсь змінної. У цьому разі застосовують *метод множників Лагранжа*, який полягає в тому, що задача на знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ замінюється еквівалентною задачею на знаходження звичайного екстремуму функції Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, де λ – множник Лагранжа, який не залежить від x та y. Зазначимо, що в довільній точці $M(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$, виконується умова $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$.

Для знаходження точок можливого екстремуму функції Лагранжа потрібно розв'язати систему трьох рівнянь: $L'_x = 0,\ L'_y = 0,\ L'_\lambda = \varphi = 0$ відносно незалежних змінних x, y та λ.

Якщо $\{x_0, y_0, \lambda_0\}$ – один із розв'язків цієї системи, то $M_0(x_0; y_0)$ – точка можливого екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$. Надалі використовуємо достатні умови існування екстремуму.

Найбільше та найменше значення функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена й неперервна в обмеженій замкненій області D. Тоді, згідно з теоремою Вейєрштрасса, функція $z = f(x, y)$ досягає в області D свого *найбільшого і найменшого значень*. Для знаходження цих значень застосовують такий алгоритм:

1) знаходимо всі критичні точки функції, яки належать області D і обчислюємо значення функції в цих точках;

2) знаходимо найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ на границі області D;

3) порівнюємо всі знайдені значення функції і вибираємо з них найбільше та найменше.

Похідна за напрямом і градієнт функції двох змінних

Нехай функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена і неперервна в деякому околі точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$; l – деякий промінь з початком у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$, $\vec{l_0} = \left\{\cos\alpha; \cos\beta\right\} = \left\{\cos\alpha; \sin\alpha\right\}$ – вектор одиничної довжини, що лежить на даному промені, $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, тому $\cos\beta = \sin\alpha$ (рис. 4.3.).

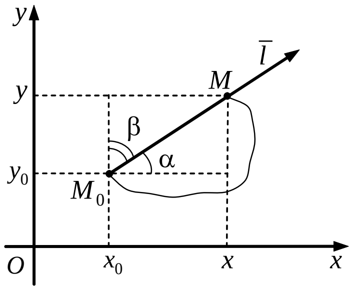

Рис. 4.3

Якщо перейти від точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ до точки $M\left(x; y\right)$, яка лежить на цьому промені та належить околу, аргументи функції $f\left(x, y\right)$ отримують прирости: $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$ і $\Delta y = \Delta l \cos\beta$, Δl – довжина відрізка M_0M. При цьому функція отримує приріст $\Delta f = f\left(M\right) - f\left(M_0\right) = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$, де α_1 і α_2 – нескінченно малі величини при $\Delta l \to 0$. Поділимо останню рівність на Δl:

$$\frac{\Delta f}{\Delta l} = \frac{f\left(M\right) - f\left(M_0\right)}{\Delta l} = f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta l}.$$

Оскільки $\dfrac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$ і $\dfrac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta l} = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta + \alpha_1 \cos\alpha + \alpha_2 \cos\beta.$$

Границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції*

$z = f(x, y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *у точці* $M_0(x_0; y_0)$ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

Похідна за напрямом $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ характеризує швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ за напрямом $\vec{l}$. Її обчислюють за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f_x' \cos\alpha + f_y' \cos\beta,$$

де $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ – напрямні косинуси напряму $\vec{l}$.

Примітка. Похідна за напрямом, дотичному до лінії рівня поверхні $z = f(x, y)$, дорівнює нулю.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ називають вектор з координатами $\left\{ f_x'; f_y' \right\}$, який характеризує напрям максимального зростання функції і позначають $\operatorname{grad} z(M_0) = \left\{ f_x'\big|_{M_0}; f_y'\big|_{M_0} \right\}$ або $\operatorname{grad} z(M_0) = f_x'\big|_{M_0} \vec{i} + f_y'\big|_{M_0} \vec{j}$.

Похідна функції $z = f(x, y)$ за напрямом $\vec{l}$ дорівнює скалярному добутку градієнта і орта напряму $\vec{l}$, тобто має місце рівність:

$$f_l' = \operatorname{grad} z \cdot \vec{l}_0 = \left|\operatorname{grad} z\right| \cdot \left|\vec{l}_0\right| \cdot \cos\varphi = \left|\operatorname{grad} z\right| \cdot \cos\varphi = \text{ï ð}_l \operatorname{grad} z,$$

де φ – кут між градієнтом і вектором $\vec{l}_0$ (рис. 4.4.).

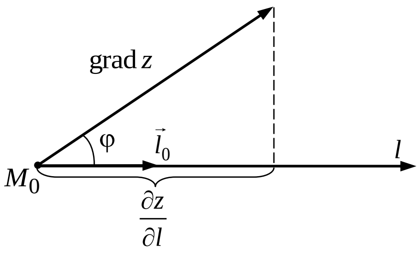

Рис. 4.4

З останньої формули випливає, що похідна за напрямом досягає свого найбільшого значення при $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, тобто, у випадку, коли напрям градієнта збігається з напрямом $\vec{l}$. При цьому

$$\max_{\{l\}} f_l' = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(f_x'\big|_{M_0} \right)^2 + \left(f_y'\big|_{M_0} \right)^2}\ .$$

Примітка. Відмітимо важливу властивість градієнта функції: градієнт, напрямлений по нормалі до лінії рівня, яка проходить через дану точку. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5$; б) $z = x^3 + y^3 + 9xy$;

в) $z = x^3 + x^2 y + xy^2$.

Розв'язання.

а) Знаходимо стаціонарні точки, тобто точки, в яких частинні похідні $z_x' = 2x - 2$ і $z_y' = 4y - 4$ дорівнюють нулю. Для цього розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases}$$

і отримуємо координати стаціонарної точки $M_0(1;1)$.

Існування в точці M_0 екстремуму перевіряємо за допомогою достатньої умови існування екстремуму. Для цього обчислюємо частинні похідні другого порядку і знаходимо величину значення $\Delta = AC - B^2$:

$$A = z_{xx}''(M_0) = 2,\ B = z_{xy}''(M_0) = 0,\ C = z_{yy}''(M_0) = 4,$$

$$\Delta = 2 \cdot 4 - 0 = 8 > 0.$$

Значення $\Delta > 0$, отже, в точці $M_0(1,1)$ функція z має локальний екстремум, а саме, локальний мінімум, оскільки значення $A = z_{xx}''\big|_{M_0} = 2 > 0$.

Таким чином, мінімальне значення функції:

$$z_{\min} = z(1,1) = (1)^2 + 2(1)^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 = 2.$$

б) Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 9y = 0, \\ z'_y = 3y^2 + 9x = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 3y = 0, \\ y^2 + 3x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^2, \\ y^2 + 3x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^2, \\ \left(-\dfrac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^2, \\ x^4 + 27x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^2, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -3; \end{array}\right. \end{cases} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = -3, \\ y_2 = -3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отже, маємо дві критичні точки: $M_1(0;\, 0)$ і $M_2(-3;\, -3)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = 9,\ z''_{yy} = 6y .$$

У точці $M_1(0;\, 0)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0, \quad B = z''_{xy}(M_1) = 9, \quad C = z''_{yy}(M_1) = 0,$$

$$\Delta = 0 \cdot 0 - 81 = -81 < 0 .$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці M_1 задана функція екстремуму не має.

У точці $M_2(-3;\, -3)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_2) = -18, \quad B = z''_{xy}(M_2) = 9,\ C = z''_{yy}(M_2) = -18,$$

$$\Delta = (-18) \cdot (-18) - 81 = 243 > 0 .$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A < 0$, то в точці M_2 існує максимум:

$$z_{\max} = z(-3, -3) = 27 .$$

в) Розв’язуємо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + y^2 + 2xy = 0, \\ z'_y = 2xy + x^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

Отримуємо координати стаціонарної точки $M(0;\, 0)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 6x + 2y, z''_{xy} = 2y + 2x,\ z''_{yy} = 2x .$$

У точці $M(0;\, 0)$ маємо:

$$z''_{xx}(M) = z''_{xy}(M) = z''_{yy}(M) = 0 .$$

Оскільки значення $\Delta = 0$, то в точці M необхідно провести додаткове дослідження.

Значення функції в точці $M(0;\,0)$ дорівнює нулю: $f(0,0) = 0$. Якщо покласти $y = 0$, то $f(x, y) = x^3$. При $x < 0$ маємо $z(x,0) = x^3 < 0$, а при $x > 0$ – $z(x,0) = x^3 > 0$. Отже, в довільному околі точки M функція набуває як додатних, так і від'ємних значень. Це означає, що в точці $M(0;\,0)$ задана функція не має локального екстремуму.

Приклад 2. Знайти умовний екстремум функцій:

а) $z = x^2 + y^2$, за умови $x + y = 1$;

б) $z = 3x + 2y^3$, за умови $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ x \geq 0$;

в) $z = x^3 + y^2 - xy + x + y - 4$, за умови $x + y = 3$.

Розв'язання.

а) З рівняння зв'язку маємо $y = 1 - x$. Тоді

$$z = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Оскільки $z' = 4x - 2,\ z'' = 4$, то $x = \dfrac{1}{2}$ – точка мінімуму функції z і $z_{\min} = \dfrac{1}{2}$. З умови зв'язку знаходимо координату y: $y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, умовний мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y - 1 = 0$ досягається в точці $M\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right)$.

б) Запишемо умову зв'язку в параметричній формі: $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тоді функція $z(x, y)$ матиме вигляд:

$$z(t) = 6\cos t + 2\sin^3 t .$$

Знайдемо похідну z' і прирівняємо її до нуля:

$$z' = -6\sin t + 6\sin^2 t\cos t = 3\sin t\left(\sin 2t - 2\right),\ 3\sin t\left(\sin 2t - 2\right) = 0,$$
$$\sin t = 0,\ t = \pi k,\ k \in Z.$$

Оскільки за умовою $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то маємо єдину стаціонарну точку $t = 0$. При переході через цю точку похідна змінює знак з $\langle + \rangle$ на $\langle - \rangle$. Отже $t = 0$ – точка максимуму функції $z(t)$, тоді

$$x = 2\cos 0 = 2,\ y = \sin 0 = 0,\ z_{\max} = 6.$$

Отже, точка $(2;0)$ – точка умовного максимуму функції $z = 3x + 2y^3$ на кривій $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ x \ge 0$.

в) Скористаємося методом множників Лагранжа. Для побудови функції Лагранжа введемо допоміжну змінну λ. Маємо

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y - 3).$$

Сформуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y + 1 + \lambda = 0, \\ L'_y = 2y - x + 1 + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь і отримуємо стаціонарну точку $M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Застосуємо достатні умови існування екстремуму.

$$A = L''_{xx}(M_0) = 2, B = L''_{xy}(M_0) = -1, C = L''_{yy}(M_0) = 2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то в точці M_0 функція має мінімум, причому $z_{\min} = \frac{5}{4}$.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функцій в замкненій області D:

а) $z = x^2 y + xy^2 + xy$, $D = \left\{(x; y) : y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -\frac{1}{2}\right\}$;

б) $z = x^2 - y^2 + 8$, $D = \left\{ (x;y) : x^2 + y^2 \le 4 \right\}$;

в) $z = x^2 + xy + 2y^2$, $D = \left\{ (x;y) : x \le 1,\ y \le x+1,\ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$.

Розв'язання.

а) Зобразимо область $D = \left\{ (x;y) : y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -\dfrac{1}{2} \right\}$ (рис. 4.5).

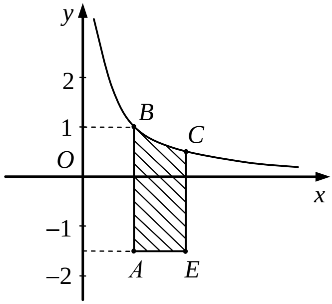

Рис. 4.5

Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2xy + y^2 + y = 0, \\ z'_y = x^2 + 2xy + x = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є точки $(0;0)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, які не належать області D.

Досліджуємо функцію на межі області D, що складається з відрізків: AB, CE, EA і лінії BC (рис. 4.5).

На відрізку AB: $x = 1$, $y \in \left[-\dfrac{3}{2};1\right]$. Маємо функцію однієї змінної $z = y^2 + 2y$. Знаходимо найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$: $z'_y = 2y + 2,\ 2y + 2 = 0,\ y = -1$.

Обчислюємо значення функції z у критичній точці $y=-1$ та на кінцях відрізку $\left[-\frac{3}{2};1\right]$: $z(-1)=-1,\ z\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4},\ z(1)=3$.

На лінії BC: $y=\frac{1}{x},\ x\in[1;2]$. Маємо функцію однієї змінної $z=x+\frac{1}{x}+1$. Знаходимо найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[1;2]$: $z'_x=1-\frac{1}{x^2},\ 1-\frac{1}{x^2}=0,\ x_1=1,\ x_2=-1\notin[1;2]$.

Визначаємо значення функції в критичній точці $x=1$ та на кінцях відрізка $[1;2]$: $z(1)=3,\ z(2)=\frac{7}{2}$.

На відрізку CE: $x=2$, $y\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$, а функція однієї змінної $z=2y^2+6y$. Знаходимо найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$: $z'_y=4y+6,\ 4y+6=0,\ y=-\frac{3}{2}$.

Обчислюємо значення функції в критичній точці $y=-\frac{3}{2}$ та на кінцях відрізка $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$: $z\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2},\ z\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

На відрізку EA: $y=-\frac{3}{2}$, $x\in[1;2]$, а функція має вигляд: $z=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{4}$. Тоді $z'_x=-3x+\frac{3}{4},\ -3x+\frac{3}{4}=0,\ x=\frac{1}{4}\notin[1;2]$.

Значення функції на кінцях відрізка $[1;2]$: $z(1)=-\frac{3}{4},\ z(2)=-\frac{9}{2}$.

Порівнюючи знайдені значення функції $z=x^2y+xy^2+xy$, знаходимо найбільше значення функції $z=\frac{7}{2}$, що досягається в точці $C\left(2;\frac{1}{2}\right)$, і найменше значення функції $z=-\frac{9}{2}$, що досягається в точці $E\left(2;-\frac{3}{2}\right)$.

б) Знаходимо стаціонарні точки. Для цього частинні похідні $z'_x=2x,\ \ z'_y=-2y$ прирівнюємо до нуля і отримуємо стаціонарну точку $O(0,0)$, яка є центром заданого кола. Значення функції в цій точці $z(O)=8$.

Межею області є коло, що задано рівнянням $x^2+y^2=4$. Виражаємо з цього рівняння $x^2=4-y^2$ і підставляємо у функцію $z=x^2-y^2+8$. Маємо функцію однієї змінної $z=4-y^2-y^2+8=12-2y^2,\ y\in\left[-2{,}2\right]$.

Знаходимо найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $\left[-2{,}2\right]$: $z'_y=-4y$, $z'_y=0$, $y=0$, $z(0)=12$.

Знаходимо тепер значення функції на кінцях відрізка $\left[-2{,}2\right]$.

$$z(-2)=4,\ \ z(2)=4.$$

Порівнюючи знайдені значення функції, знаходимо найбільше значення функції $z=12$, що досягається в точках $M_1(-2{,}0),\ M_2(2{,}0)$ і найменше значення функції $z=4$ в точках $M_3(0{,}-2),\ M_4(0{,}2)$.

в) Зобразимо область $D=\left\{(x;y):\ x\le 1,\ y\le x+1,\ x^2+y^2\le 1\right\}$ (рис. 4.6).

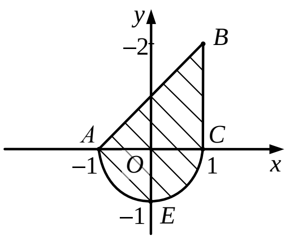

Рис. 4.6

Знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y = 0, \\ z'_y = x + 4y = 0. \end{cases}$$

Розв’язком системи є точка $M_0(0;0)$ – стаціонарна точка. Значення функції в цій точці $z(M_0) = z(0;0) = 0$.

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з відрізків: AB, BC і півкола CEA (рис. 4.6).

На відрізку AB: $y = x + 1$, $x \in [-1;1]$. Маємо функцію однієї змінної $z = x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 4x^2 + 5x + 2$.

Знаходимо найбільше й найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;1]$: $z'_x = 8x + 5,\ 8x + 5 = 0,\ x = -\dfrac{5}{8}$.

Точка $M_1\left(-\dfrac{5}{8};\dfrac{3}{8}\right) \in AB$, обчислюємо значення функції в цій точці: $z\left(-\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3}{8}$.

На відрізку BC: $x = 1$, $y \in [0;2]$. Маємо:

$$z = 1 + y + 2y^2,\ z'_y = 1 + 4y,\ 1 + 4y = 0,\ y = -\frac{1}{4} \notin [0;2].$$

Точку $\left(1;-\dfrac{1}{4}\right)$ виключаємо з подальшого розгляду.

Розглянемо півколо $x^2 + y^2 = 1,\ y \le 0$. Запишемо це рівняння у параметричній формі: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [\pi;2\pi]$. Тоді $z = \cos^2 t + \cos t \sin t + 2\sin^2 t = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(\sin 2t - \cos 2t)$.

Знаходимо стаціонарні точки:

$$z'_t = 0,\ \cos 2t - \sin 2t = 0,\ \operatorname{tg} 2t = -1,\ t = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z\ .$$

Оскільки $t \in [\pi;2\pi]$, то маємо стаціонарні точки: $t_1 = \dfrac{11\pi}{8},\ t_2 = \dfrac{15\pi}{8}$.

До числа відібраних точок додаємо точки $A(-1;0)$, $B(1;2)$, $C(1;0)$ і обчислюємо значення функції у цих точках:

$z(M_0)=z(0;0)=0$, $z(M_1)=z\left(-\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{16}$,

$z(M_3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\sin 2t-\cos 2t)\Big|_{t=\frac{11\pi}{8}}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$,

$z(M_4)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\sin 2t-\cos 2t)\Big|_{t=\frac{15\pi}{8}}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$,

$z(A)=z(-1;0)=1$, $z(B)=z(1;2)=11$, $z(C)=z(1;0)=1$.

Отже, найбільшого значення $z=11$ функції досягає в точці $B(1;2)$, а найменшого $z=0$ – в точці $M_0(0;0)$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $z=3x^2-5y^2$ у точці $A(1;-1)$ за напрямом від цієї точки до точки $B(2;1)$.

Розв'язання.

Визначимо одиничний вектор $\vec{l}$, за напрямом якого обчислюється похідна функції:

$$\vec{l}=\frac{(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Знайдемо значення частинних похідних функції у точці $A(1;-1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;-1)}=6x\Big|_{(1;-1)}=6,\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;-1)}=-10y\Big|_{(1;-1)}=10.$$

Отже, похідна за напрямом заданої функції має вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_A=6\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+10\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{26}{\sqrt{5}}=\frac{26\sqrt{5}}{5}.$$

Приклад 5. Для функції $z=\ln\left(x^2+4y^2\right)$ знайти градієнт і похідну у точці $A(1;1)$ за напрямом від цієї точки до точки $B(3;4)$.

Розв'язання.

Знайдемо значення частинних похідних у точці $A(1;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;1)}=\frac{2x}{x^2+4y^2}\Big|_{(1;1)}=\frac{2}{5},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;1)}=\frac{8y}{x^2+4y^2}\Big|_{(1;1)}=\frac{8}{5}.$$

Градієнт функції має вигляд:

$$\operatorname{grad} z(A)=\frac{2}{5}\vec{i}+\frac{8}{5}\vec{j}=\left\{\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right\}.$$

Визначимо одиничний вектор $\vec{l}$, за напрямом якого обчислюється похідна функції:

$$\vec{l}=\frac{(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Отже, похідна за напрямом заданої функції має вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_A=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{28}{5\sqrt{13}}=\frac{28\sqrt{13}}{65}.$$

Приклад 6. Знайти кут між градієнтами функції $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ у точках $A(1;1)$ і $B(0;1)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(x+y)^2}}}\cdot\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)\sqrt{y^2+2xy}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(x+y)^2}}}\cdot\left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right)=-\frac{x}{(x+y)\sqrt{y^2+2xy}}.$$

Визначимо значення частинних похідних у точці $A(1;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;1)}=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;1)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Градієнт функції у точці $A(1;1)$ має вигляд:

$$\operatorname{grad} z(A)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{j}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}};-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\}.$$

Знайдемо значення частинних похідних у точці $B(0;1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0;1)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0;1)}=0.$$

Отже, градієнт функції у точці $B(0;1)$:

$$\operatorname{grad} z(B)=\vec{i}+0\cdot\vec{j}=\{1;0\}.$$

Нехай φ – кут між градієнтами функції у точках $A(1;1)$ і $B(0;1)$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{grad} z(A)\cdot\operatorname{grad} z(B)}{\left|\operatorname{grad} z(A)\right|\cdot\left|\operatorname{grad} z(B)\right|}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{1}{2},$$

$$\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $z=2,5x^2-5xy+3y^2+5y$ в точці $A(1;2)$ за напрямом, який утворює з віссю Ox кут 30°. Визначити напрям максимального зростання функції в цій точці.

Розв'язання.

Маємо;

$z'_x=5x-5y$, $z'_y=-5x+6y+5$, $z'_x(1;2)=-5$, $z'_y(1;2)=12$.

Нехай $\vec{l}$ – заданий напрям (рис. 4.7), тоді

$$\frac{\partial z}{\partial l}=-5\cos 30^\circ+12\sin 30^\circ=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+6.$$

Градієнт функції в точці $A(1;2)$ має вигляд:

$$\operatorname{grad} z(1;2)=-5\vec{i}+12\vec{j}=\{-5;12\}.$$

Цей вектор вказує напрям, у якому функція зростає швидше, ніж за іншими напрямами.

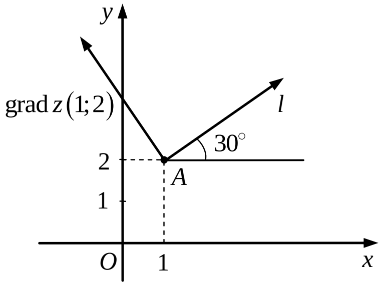

Рис. 4.7

Максимальне значення похідної в точці $A(1;2)$ дорівнює: $\max\limits_{\{l\}} f_l' = |\text{grad}\, z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка точка називається критичною точкою функції двох змінних?
2. Сформулювати алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум?
3. Як знайти умовний екстремум функції двох змінних?
4. Як знайти найбільше та найменше значення функції двох змінних в заданій області?
5. Що називається похідною функції двох змінних за напрямом та що вона характеризує?
6. Як знайти похідну функції двох змінних за напрямом?
7. Що називається градієнтом функції двох змінних та що він характеризує?
8. Як знайти градієнт функції двох змінних?
9. Назвати зв'язок між похідною функції за напрямом та градієнтом?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти екстремум функцій:

1) $z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y$; 2) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$;

3) $z = x^3 + \dfrac{1}{27}y^2 + xy + 2$; 4) $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$;

5) $z=x^2+2y^2-4x+12y$; 6) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$;

7) $z=2xy-2x^2-4y^2$; 8) $z=2x^3+2y^3-6xy+5$;

9) $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$; 10) $z=x^2+y^2+xy-2x-y$.

Завдання 2. Знайти умовний екстремум функцій:

а) $z=x^2+y^2$, за умови $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$;

б) $z=8-3x-4y$, за умови $x^2+y^2=4$;

в) $z=9-8x-6y$, за умови $x^2+y^2=25$;

г) $z=x^2-y^2$, за умови $x+2y=6$;

д) $z=x^2+y^2$, за умови $x-2y=5$.

Завдання 3. Знайти найбільше та найменше значення функцій у замкненій області D:

а) $z=x^2+y^2+xy-5x-4y+10$, $D=\left\{(x;y):\, y\ge 0,\, x=\ge 0,\, x+y\le 4\right\}$;

б) $z=x^2+y^2-12x+16y$, $D=\left\{(x;y):\, x^2+y^2\le 5\right\}$;

в) $z=3x^2+xy-2y^2-9x+11y+2$, $D=\left\{(x;y):\, 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\right\}$.

Завдання 4. Побудувати лінію рівня функції $z=4-x^2-y^2$, яка проходить через точку $A(1;1)$. Побудувати $\operatorname{grad} z(1;2)$ і переконатися, що він буде перпендикуляром до побудованої лінії рівня.

Завдання 5. Для функції $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ побудувати лінію рівня і градієнт. Порівняти їх напрями в точках $(1;1)$ і $(1;-1)$.

Завдання 6. Знайти найбільше зростання поверхні $z=xy$ у точці $(4;2)$.

Завдання 7. Знайти похідну функції $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$ за напрямом, що паралельний бісектрисі координатного кута.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вища* математика: Збірник задач: навч. посібник. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. *Вища* математика: навч. посібник / І. О. Ластівка, О. І. Безверхий, І. П. Кудзіновська. – К. : НАУ, 2018. – 452 с.

3. *Денисюк В. П.* Вища математика: підручник: у 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 4-те вид., стереот. – К. : НАУ- друк, 2009. – 276 с.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.

5. *Математика* для економістів : навч. посібник У 3 ч. Ч. 2 / І. О. Ластівка, Н.І. Затула, Є.Ю. Корнілович [та ін.]. – К. : НАУ, 2012. – 312 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ДАВИДОВ Олександр Сергійович
ШЕВЧЕНКО Ірина Вікторівна
ЛЕВКОВСЬКА Тетяна Андріївна