МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти
ОС «Бакалавр» технічних спеціальностей

Київ 2022

УДК 512 (076.5)
В 558

Укладачі: *І. О. Ластівка* – д-р техн. наук, проф.;
В. К. Репета – канд. фіз.–мат. наук, доц.;
О. П. Олійник – ст. викладач

Рецензент: О. Д. Глухов – канд. фіз.–мат. наук, доц.

Затверджено Науково-методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 2/22 від 06.05.2022).

В 558 **Вища математика. Числові та функціональні ряди:** методичні рекомендації до самостійної роботи/ уклад. : І. О. Ластівка, В. К. Репета, О. П. Олійник. – К.: НАУ, 2022.– 48 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв'язання типових задач розділу «Ряди», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» технічних спеціальностей.

ВСТУП

Самостійна робота здобувача вищої освіти є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота здобувачів вищої освіти здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов'язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої освіти укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей. **У** пропонованій методичній роботі наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які здобувач повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим навчальним програмам дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Ряди». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв'язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання їх навчального процесу.

Тема 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

План

1. Основні поняття та означення, збіжність.
2. Властивості числових рядів.
3. Необхідна умова збіжності. Достатня умова розбіжності.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення числового ряду, частинної суми ряду, збіжності ряду, суми ряду, приклади відомих збіжних та розбіжних рядів, необхідну умову збіжності та достатню умову розбіжності; ***уміти:*** обчислювати суму збіжних числових рядів певного вигляду.

Основні теоретичні відомості

Нехай $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ – послідовність дійсних чисел.

Числовим рядом (або просто рядом) називають вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (1.1)$$

Тут u_1 – перший, u_2 – другий, ..., u_n — n–ий (загальний) члени ряду. Ряд (1.1) є заданим, якщо відома залежність його загального члена від номера n: $u_n = f(n)$.

Суму $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ перших n членів ряду називають *n-ю частинною сумою ряду* (1.1).

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1.1) називають *збіжним*, а число S — його сумою.

Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (1.1) називають *розбіжним*. Такий ряд суми не має.

Вираз $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ називають *n-м залишком* ряду.

Властивості числових рядів

1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і його сума дорівнює S, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}(Cu_n)$, де C – стала, також є збіжним і його сума дорівнює CS. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ розбігається і $C \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Cu_n)$ також розбігається.

2. Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збіжні і S_u та S_v — їхні суми відповідно, то збіжні також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ і їхні суми дорівнюють S_u+S_v та S_u-S_v відповідно.

Зауваження. Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом. Сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути або збіжним, або розбіжним рядом.

3. Збіжність ряду не залежить від відкидання чи приєднання до нього скінченної кількості членів.

Теорема 1.1 (*необхідна ознака збіжності*). Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Висновок. Аби ряд збігався обов'язково потрібно щоб його загальний член прямував до нуля. Проте це **не є гарантією** збіжності ряду. Якщо $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то це лише означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ може бути збіжним.

Наслідок (*достатня ознака розбіжності*). Якщо $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ або ця границя не існує, то ряд (1.1) розбігається.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Запишіть загальний, перший та третій члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+4}$.

Розв'язання.

Загальний (n-й) член ряду – $u_n = \dfrac{n+2}{n^2+4}$. Тоді $u_1 = \dfrac{1+2}{1+4} = \dfrac{3}{5}$ – перший член ряду; $u_3 = \dfrac{3+2}{9+4} = \dfrac{5}{13}$ – третій член ряду.

Приклад 2. Дослідіть ряди на збіжність. У разі збіжності ряду обчисліть його суму:

а) $1+4+7+\ldots+(3n-2)+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-2)$;

б) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$;

г) $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$;

д) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Розв'язання:

а) запишемо n-ту частинну суму

$S_n = 1+4+7+\ldots+(3n-2)+\ldots = \dfrac{1+(3n-2)}{2}n = \dfrac{(3n-1)n}{2}$. Тут використано формулу $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n$ суми перших n членів арифметичної прогресії. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)n}{2} = \infty$ і відповідно заданий ряд розбіжний;

б) для цього ряду частинні суми дорівнюють або 1, або 0: $S_1 = 1, S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \ldots$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ розбігається;

в) запишемо й перетворимо частинну суму S_n цього ряду так: $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$ $+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$ то ряд збіжний і його сума $S = 1$.

Зауваження. Якщо $u_1 = f(1) - f(2),$ $u_2 = f(2) - f(3), \ldots,$ $u_n = f(n) - f(n+1),$ то $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = f(1) - f(n+1).$

г) ряд $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$, $\left(b_1 \neq 0\right)$

називають рядом геометричної прогресії (або *геометричним рядом*): при $q = 1$ цей ряд розбіжний; при $q \neq 1$:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q}.$$

Знайдемо границю цієї суми залежно від значення q:

1) якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$, ряд збіжний і його сума $S = \frac{b_1}{1 - q}$;

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд розбіжний;

3) при $q = -1$ ряд набирає вигляду:

$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots + (-1)^{n+1} b_1 + \ldots$ і є розбіжним.

Висновок. Геометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ ($a \neq 0$) збігається за умови $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

д) ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називають *гармонічним*. Цей ряд є розбіжним.

Приклад 3. Знайдіть границю загального члена u_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ й зробіть висновок про збіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{11n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

Розв'язання:

а) Оскільки $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{11n+1} = \frac{2}{11} \neq 0$, то заданий ряд розбіжний;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ – збіжний геометричний ряд ($q = \frac{1}{2} < 1$). Для цього ряду $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$;

в) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$, отже, ряд розбіжний;

г) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \neq 0$. Отже, ряд розбіжний;

д) оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, то за властивістю 1 числових рядів ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ також є розбіжним. Хоч $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ розбігається.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають числовим рядом?
2. Як визначити перший, шостий, десятий члени ряду?
3. Що таке *n*-на частинна сума ряду?
4. Сформулюйте означення збіжного ряду та його суми.

5. Що можна сказати про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?

6. Наведіть приклади збіжних та розбіжних рядів.

7. Чи правильним є твердження: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ також збігається?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Доведіть за означенням збіжність рядів і знайдіть їхню суму:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}$.

Завдання 2. Доведіть розбіжність рядів, використовуючи достатню ознаку розбіжності ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{1000n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2n+1}$.

Відповіді: 1. а) $S_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$, $S=\frac{1}{2}$; б) $S_n = \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $S=\frac{3}{2}$; в) $S_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$, $S=\frac{3}{2}$; г) $S_n = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $S=1$. Указівка. $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$; д) $S_n = 1-\frac{1}{(n+1)!}$, $S=1$. Указівка. $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; е) $S_n=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $S=1$. Указівка. Скористайтеся формулою $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$.

Тема 2. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ

План

1. Означення знакододатних рядів, приклади еталоних.
2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення знакододатного числового ряду, приклади відомих еталонних рядів, ознаки порівняння, ознаку Д'аламбера, радикальну та інтегральну ознаки Коші збіжності ряду; ***уміти:*** досліджувати знакододатні ряди на збіжніть за допомогою достатніх ознак збіжності.

Основні теоретичні відомості

Ряди з невід'ємними членами називають *знакододатними*. Для дослідження збіжності таких рядів використовуватимемо ознаки порівняння, ознаку Д'Аламбера, радикальну та інтегральну ознаки Коші.

Збіжність або розбіжність знакододатного ряду інколи встановлюють за допомогою порівняння його з рядом, поведінка якого відома. Такі ряди називатимемо *еталонними*.

Найчастіше використовують наступні еталонні ряди:

а) геометричний ряд;

б) гармонічний ряд;

в) узагальнений гармонічний ряд (або ряд *Діріхле—Рімана*):

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$, який є збіжним при $p>1$ і розбіжним при $p\le 1$.

Теорема 2.1 (*ознака порівняння*). Нехай задано два ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (2.2)$$

члени яких задовольняють нерівності :

$$0 \le u_n \le v_n \ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.3)$$

Тоді:

а) якщо збігається ряд (2.2), то збігається й ряд (2.1);

б) якщо розбігається ряд (2.1), то ряд (2.2) також розбігається.

Зауваження. Теорема 2.1 справджується й у випадку, коли нерівності (2.3) виконуються, починаючи з деякого номера $n > N_0$.

На практиці ефективнішою є гранична ознака порівняння.

Теорема 2.2 (*гранична ознака порівняння*). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — ряди з додатними членами. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля, границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ ($0 < k < \infty$), то вказані ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Зауваження 1. Основним недоліком застосування ознак порівняння є вибір еталонного ряду.

Зауваження 2. При дослідженні на збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$, де $P_m(n)$, $Q_k(n)$ — багаточлени степенів m і k відповідно, $m < k$, ефективно застосовувати граничну ознаку порівняння. За еталонний ряд потрібно взяти ряд *Діріхле—Рімана* ($p = k - m > 0$).

Теорема 2.3 (*ознака Д'Аламбера*). Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами і існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$ Тоді заданий ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Якщо $l = 1$, то ознака не працює і питання про збіжність залишається відкритим. У цьому випадку потрібно застосувати іншу ознаку (наприклад, порівняння).

Зауваження. Ознаку Д'Аламбера доцільно застосовувати насамперед при дослідженні на збіжність знакододатних рядів, члени якого містять факторіали або показникові функції.

Теорема 2.4 (*радикальна ознака Коші*). Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами і існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$ Тоді заданий ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$.

У випадку $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим, тобто потребує додаткових досліджень.

Зауваження 1. Радикальну ознаку Коші раціонально застосовувати при дослідженні на збіжність знакододатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, загальний член яких можна подати у вигляді $u_n = (f(n))^n$.

Зауваження 2. При дослідженні рядів на збіжність за радикальною ознакою Коші можуть стати в пригоді наступні границі: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a>0$), $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Теорема 2.5 (*інтегральна ознака Коші*). Нехай члени знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є значеннями деякої неперервної монотонно спадної на проміжку $[1;\infty)$ функції $f(x)$ для натуральних значень аргументу x, тобто $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2), \ldots,$ $u_n = f(n), \ldots$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ одночасно збіжні або розбіжні.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Дослідіть на збіжність знакододатні ряди, використовуючи ознаки порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{3}{2n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання:

а) Застосуємо граничну ознаку порівняння, взявши для порівняння розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+4}\cdot\dfrac{n}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+4}=3$. Оскільки $k=3\in(0;\infty)$ і гармонічний ряд є розбіжним, то і заданий ряд є розбіжним;

б) загальний член $u_n=\dfrac{n}{n^5+3}$ заданого знакододатного ряду є відношенням багаточленів першого і п'ятого степенів, степінь знаменника на 4 більший від степеня чисельника. Тому для порівняння обираємо узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ із загальним членом $v_n=\dfrac{1}{n^4}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння: $k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n}{n^5+3}}{\dfrac{1}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{n^5+3}=1$. Оскільки обчислена границя $0<k<\infty$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ є збіжним, то за граничною ознакою порівняння і заданий ряд є збіжним;

в) маємо знакододатний ряд, загальний член якого $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння, взявши для порівняння розбіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ ($p=\dfrac{1}{4}<1$):

$k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{n}}{1}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Оскільки обчислена границя є додатним числом і обраний для порівняння узагальнений гармонічний ряд розбіжний, то за граничною ознакою порівняння і заданий ряд також розбіжний;

г) порівняємо заданий ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ за граничною ознакою порівняння:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{3}{2n}}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{array}{c} n\to\infty,\alpha=\frac{3}{2n}\to 0 \\ \arcsin\alpha\sim\alpha\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2n}}{\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}.$$

Оскільки $0<k<\infty$ і ряд для порівняння є розбіжним, то за граничною ознакою порівняння заданий ряд теж є розбіжним;

д) Застосуємо ознаку порівняння (теорема 2.1), узявши для порівняння розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. При $n=2;3;\ldots$: $\ln n<n$ і відповідно $u_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}=v_n$. Оскільки члени заданого ряду більші за відповідні члени розбіжного гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то заданий ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідіть на збіжність ряди, користуючись ознакою Д'Аламбера або радикальною чи інтегральною ознакою Коші:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{(2n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{n+5}{n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

Розв'язання:

а) маємо знакододатний ряд, загальний член якого містить показникову функцію, тому застосуємо ознаку Д'Аламбера: $u_n=n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$, $u_{n+1}=(n+1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$,

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}}\right)=\left|\begin{array}{l}\alpha\to 0\\ \operatorname{tg}\alpha\sim\alpha\\ \frac{\pi}{2^n}\to 0\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{\frac{\pi}{2\cdot 2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right)=\frac{1}{2}<1$$ і

відповідно ряд збіжний;

б) наявність факторіала зазвичай указує на доцільність застосування ознаки Д'Аламбера: $u_n = \dfrac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{(2n+1)!}$,

$$u_{n+1} = \frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!};\ l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)^3 \cdot 3^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 \cdot \frac{3 \cdot (2n+1)!}{((2n+1)!) \cdot (2n+2)(2n+3)} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збіжний;

в) загальний член заданого знакододатного ряду можна подати у вигляді $u_n = (f(n))^n$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \frac{e^5}{2} > 1,$$

отже, ряд розбіжний;

г) функція $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ задовольняє умови інтегральної ознаки Коші, тому задача зводиться до дослідження збіжності невласного інтеграла:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{d\left(\ln(x+2)\right)}{\ln(x+2)} = \lim_{A\to\infty} \ln\left|\ln\left(x+2\right)\right| \Big|_1^A =$$

$= \lim\limits_{A\to\infty} \left(\ln\left|\ln\left(A+2\right)\right| - \ln\ln 3 \right) = \infty$. Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то і заданий ряд також розбіжний.

Запитання для самоперевірки

1. Які ряди називають знакододатними?
2. Як досліджують знакододатні ряди на збіжність?
4. Наведіть приклади еталонних рядів. Як застосовують еталонні ряди при дослідженні знакододатних рядів на збіжність?
5. Як доцільно досліджувати на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{P_m(n)}{Q_k(n)}$, де $P_m(n)$, $Q_k(n)$ — багаточлени степенів m і k відповідно, $m < k$?

6. Сформулюйте ознаку Д'Аламбера. До яких знакододатних рядів її застосовують?

7. Сформулюйте радикальну ознаку Коші. До яких знакододатних рядів її застосовують?

8. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаки порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{4n^5+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+4)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+2}$.

Завдання 2. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаку Д'Аламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots(3n-1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n^3\cdot 7^{n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{4n+1}{3^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Завдання 3. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи радикальну ознаку Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+1}\right)^n$.

Завдання 4. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи інтегральну ознаку Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.

Відповіді: 1. а) розбігається; б) збігається; в) розбігається; г) розбігається; д) розбігається; е) збігається. **2.** а) збігається; б) збігається; в) збігається; г) розбігається; д) збігається;

е) збігається. **3.** а) збігається; б) збігається; в) збігається; г) розбігається; д) розбігається; е) збігається. **4.** а) збігається; б) збігається; в) розбігається.

Тема 3. ЧИСЛОВІ РЯДИ З ДОВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

План

1. Види числових рядів.
2. Знакозмінні ряди. Достатня ознака збіжності знакозмінних рядів.
3. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца.
4. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.
5. Властивості абсолютно збіжних рядів.
6. Дослідження знакопочережних рядів на абсолютну та умовну збіжність.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** класифікацію числових рядів, означення знакозмінного та знакопочережного рядів, абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів, достатні ознаки збіжності знакозмінних та знакопочережних рядів (ознаку Лейбніца), основні властивості абсолютно збіжних рядів; ***уміти:*** розрізняти знакозмінні та знакопочережні ряди, досліджувати на збіжність знакопочережні ряди за ознакою Лейбніца, досліджувати знакопочережні ряди на абсолютну та умовну збіжність.

Основні теоретичні відомості

Числовий ряд називають *знакозмінним*, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. При цьому чергування знака може бути як закономірним, так і хаотичним. Приклади знакозмінних рядів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n\cdot(n+2)};\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}.$

За властивістю 3 числових рядів: збіжність ряду не залежить від відкидання чи приєднання до нього скінченної кількості членів. Тому дослідження числових рядів, які містять одночасно скінченну кількість додатних (від’ємних) та нескінченну від’ємних (додатних) членів, зводиться до дослідження відповідного знакододатного ряду. Зауважимо: дослідження на збіжність числових рядів, всі члени якого є від’ємними, зводиться до дослідження відповідного знакододатного ряду, який утвориться після винесення знака мінус з усіх членів за дужки.

Таким чином, дослідження числових рядів на збіжність зводиться до дослідження або знакододатних, або знакозмінних рядів.

Теорема 3.1 (*достатня ознака збіжності знакозмінних рядів*). Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ є знакозмінним. Якщо збігається знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$, утворений із модулів членів заданого ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд.

Зауваження. Достатня ознака збіжності знакозмінних рядів не є необхідною, тобто знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може бути збіжним і тоді, коли ряд з абсолютних величин його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є розбіжним.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ знакозмінний числовий ряд. Тоді правильними є такі твердження:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – збіжний $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – розбіжний $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний або розбіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – збіжний або розбіжний;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – розбіжний $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – розбіжний.

Знакозмінні ряди, знаки членів яких строго чергуються:

$$u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n+1} u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (3.1)$$

де $u_n > 0$ при $n \in N$, називатимемо *знакопочережними.*

Сформулюємо достатню ознаку збіжності для ряду (3.1).

Теорема 3.2 (*ознака Лейбніца*). Ряд (3.1) збіжний, якщо:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$;

2) загальний член ряду прямує до нуля: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Зауваження 1. Перша умова ознаки Лейбніца може виконуватися не з першого, а починаючи з деякого іншого члена.

Зауваження 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - ... + (-1)^n u_n + ...,$ де $u_n > 0$ при $n \in N$, також є знакопочережним.

Зауваження 3. Якщо знакопочережний ряд (3.1) є збіжним, то сума ряду S задовольняє умову $0 < S < u_1$.

Зауваження 4. З ознаки Лейбніца випливає, що для збіжного знакопочережного ряду (3.1) виконується умова: $|S - S_n| \le u_{n+1}$ або $|r_n| \le u_{n+1}$, де $r_n = (-1)^n \cdot (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - ...)$. Цю властивість використовують для наближеного обчислення суми знакопочережного ряду із заданою точністю.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд, утворений з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є збіжним.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називають *умовно збіжним*, якщо ряд, утворений з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є розбіжним, а сам знакозмінний ряд є збіжним.

Властивості абсолютно збіжних рядів

1. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний абсолютно, то його члени можна групувати й переставляти довільним чином. При цьому ряд залишається збіжним і його сума не зміниться.

2. Абсолютно збіжні ряди з сумами S_1 та S_2 можна почлено додавати та віднімати. Утворений ряд буде також абсолютно збіжним і його сума дорівнює $S_1 \pm S_2$ відповідно.

3. Добуток двох абсолютно збіжних рядів з сумами S_1 та S_2 є абсолютно збіжним рядом, сума якого дорівнює $S_1 \cdot S_2$.

Дослідження на абсолютну та умовну збіжність знакозмінних рядів

Усі знакозмінні числові ряди можна прокласифікувати за схемою, зображеною на рисунку 3.1.

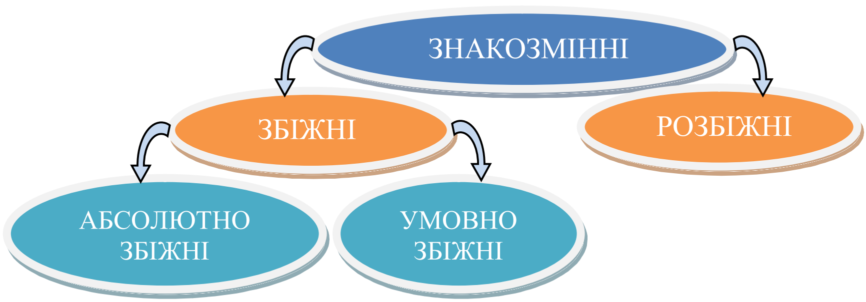


Рис. 3.1

Для доведення абсолютної збіжності знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ достатньо показати збіжність знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, утвореного з модулів його членів.

Для доведення умовної збіжності знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ достатньо:

1) показати розбіжність знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$;

2) обґрунтувати збіжність самого знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що не завжди вдається. Якщо ж знакозмінний ряд є знакопочережним вигляду (3.1), то його збіжність перевіряють за ознакою Лейбніца.

Указівка. На практиці радимо розпочинати дослідження на умовну та абсолютну збіжність будь-якого знакозмінного ряду із розгляду відповідного знакододатного ряду, утвореного з модулів його членів.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \cdot (n+2)}$.

Розв'язання.

Розглянемо ряд, утворений з модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \cdot (n+2)}$. Одержаний знакододатний ряд дослідимо на збіжність за ознакою порівняння, узявши для порівняння збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ряд Діріхле-Рімана при $p = 2 > 1$). Оскільки $0 \le |u_n| = \frac{|\sin n|}{n \cdot (n+2)} \le \frac{1}{n^2} = v_n$ при $n \in N$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Тоді знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \cdot (n+2)}$ є абсолютно збіжним, оскільки збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, утворений з модулів його членів.

Приклад 2. Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$.

Розв'язання.

Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$, де $u_n=\frac{1}{n}>0$ при $n\in N$, який називають рядом Лейбніца.

Розглянемо ряд, утворений з модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Одержали гармонічний ряд, який є розбіжним.

Отже, заданий ряд може збігатися лише умовно. Дослідимо на збіжність знакопочережний ряд за ознакою Лейбніца:

1) $u_1>u_2>u_3>\dots>u_n>\dots$, оскільки $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\dots>\frac{1}{n}>\dots$ при $n\in N$;

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Тому даний ряд є збіжним за ознакою Лейбніца.

Тоді ряд Лейбніца є умовно збіжним, оскільки він є збіжним за ознакою Лейбніца і при цьому ряд, утворений з модулів його членів, є розбіжним.

Приклад 3. Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^n}$.

Розв'язання.

Розглянемо ряд, утворений з модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$. Цей ряд дослідимо на збіжність за ознакою Д'Аламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{5}<1$. Тому ряд із модулів членів збігається. Тоді початковий ряд збігається абсолютно за означенням абсолютної збіжності.

Приклад 4. Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність знакопочережний ряд $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-...+\left(-1\right)^{n-1}\frac{n}{6n-5}+...$.

Розв’язання.

Маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$, де $u_n=\frac{n}{6n-5}>0$ при $n\in N.$ Оскільки не виконується друга умова ознаки Лецбніца: $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\frac{1}{6}\neq 0$, то заданий ряд розбігається.

Приклад 5. Обчисліть наближено суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n n!}$ з точністю $\varepsilon=0,001.$

Розв’язання.

Маємо збіжний ряд (переконайтеся у цьому самостійно) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n n!}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2\cdot 2!}-\frac{1}{10^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{10^n\cdot n!}+\ldots,$ члени якого строго чергуються. Згідно з наслідком із теореми Лейбніца абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (3.1) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $\left|r_n\right|=\left|S-S_n\right|\leq u_{n+1}$.

Знайдемо найменше n, починаючи з якого виконується нерівність $u_{n+1}<\varepsilon,$ тоді $\left|r_n\right|<\varepsilon:$ $\frac{1}{10^2\cdot 2!}=\frac{1}{200}>\varepsilon,$ $\frac{1}{10^3\cdot 6}=\frac{1}{6000}<\varepsilon.$

Отже, $\left|r_2\right|<u_3<\varepsilon$, тому для досягнення вказаної точності достатньо взяти суму перших двох членів ряду: $S\approx-\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=-0,1+0,005=-0,095.$

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні види числових рядів.
2. Які ряди називають знакозмінними?
3. Як досліджують числові ряди з довільними членами на збіжність?

4. Які ряди називають знакопочережними? Сформулюйте ознаку Лейбніца.

5. Сформулюйте означення абсолютної та умовної збіжностей знакозмінних рядів.

6. Сформулюйте основні властивості абсолютно збіжних рядів.

7. За яким алгоритмом досліджують знакопочережні ряди на абсолютну та умовну збіжність?

8. Обґрунтуйте, чи правильними є твердження для знакозмінного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$: а) із збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжний; б) із роззбіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – розбіжний; в) із роззбіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – розбіжний.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \pi n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2^n}{2^n}$.

Завдання 2. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+9}{11n-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n^2+n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \dfrac{(-1)^n}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

Завдання 3. Обчисліть наближено суму рядів з точністю ε, вказавши найменшу достатню кількість членів ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3 \cdot n!}$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{13}\right)^{n+1}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Відповіді: **1.** а) збіжний умовно; б) збіжний абсолютно. **2.** а) розбіжний; б) збіжний абсолютно; в) збіжний умовно; г) збіжний абсолютно; д) збіжний абсолютно ; е) збіжний умовно. **3.** а) $S \approx 0{,}944$, $n = 3$; б) $S \approx 0{,}134$, $n = 3$.

Тема 4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

План

1. Функціональні ряди. Основні поняття та означення.
2. Рівномірна збіжність. Ознака Вейєрштрасса.
3. Властивості рівномірно збіжних рядів.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** означення функціонального ряду, абсолютної та рівномірної збіжності функціональних рядів, достатню ознаку рівномірної збіжності функціональних рядів (ознаку Вейєрштрасса), властивості рівномірно збіжних рядів; ***уміти:*** розпізнавати функціональні ряди, знаходити область абсолютної збіжності функціональних рядів, досліджувати на абсолютну та рівномірну збіжність функціональні ряди за ознакою Вейєрштрасса, досліджувати знакопочережні ряди на абсолютну та умовну збіжність.

Основні теоретичні відомості

Вираз вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (4.1)$$

де $\left(u_n(x)\right)-$ послідовність функцій, називають *функціональним* рядом.

Якщо у ряді (4.1) зафіксувати $x=x_0\in D$, то функціональний ряд стане числовим. Цей ряд може збігатися або розбігатися. Якщо у точці x_0 числовий ряд збігається, то точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Множину всіх значень x, для яких функціональний ряд збіжний, називають *областю його збіжності*.

Суму $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ називають *n-ю частинною сумою* ряду (4.1). У кожній точці x, яка належить області збіжності, існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, яку називають сумою ряду (4.1).

Якщо функціональний ряд (4.1) збігається до функції $S(x)$, то різницю $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називають *n-м* залишком ряду: $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$. У точках збіжності ряду залишок ряду при $n \to \infty$ прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Функціональний ряд (4.1) називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $|u_1(x)| + |u_2(x)| + ... + |u_n(x)| + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Для відшукання області абсолютної збіжності функціонального ряду використовують достатні ознаки збіжності числових рядів. Наприклад, за ознакою Д'Аламбера знаходять границю $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l(x),$ після чого розв'язують нерівність $l(x) < 1.$ Додатково досліджують ряд в точках, для яких $l(x) = 1.$ Аналогічно досліджують функціональний ряд і за радикальною ознакою Коші.

Рівномірна збіжність функціонального ряду

Функціональний ряд (4.1) називають *рівномірно збіжним* на множині *D*, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon),$ яке залежить від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $\left| r_n(x) \right| < \varepsilon.$

Для дослідження функціональних рядів на рівномірну збіжність часто використовують достатню ознаку Вейєрштрасса.

Теорема 4.1 (*ознака Вейєрштрасса*). Функціональний ряд (4.1) абсолютно і рівномірно збіжний на множині *D*, якщо існує такий знакододатний збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, що для всіх $x \in D$ виконуються нерівності $|u_n(x)| \le a_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

При цьому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *мажорантним* для ряду (4.1), а сам ряд (4.1) називають *правильно* збіжним на множині *D*.

Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Якщо функціональний ряд (4.1) рівномірно збіжний на деякому проміжку *I* і члени цього ряду — неперервні функції на *I*, то сума цього ряду є функція, неперервна на цьому проміжку.

2. Якщо функціональний ряд (4.1) збіжний на проміжку *I*, його члени на цьому проміжку мають неперервні похідні $u_n'(x)$ ($n=1, 2, \ldots$), причому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ рівномірно збіжний на проміжку *I*, то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),\ x \in I.$$

3. На будь-якому відрізку, що належить проміжку *I* рівномірної збіжності функціонального ряду (4.1), члени якого — неперервні функції на *I*, цей ряд можна почленно інтегрувати, тобто на проміжку $[\alpha;\beta] \in I$ справджується рівність:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx.$$

Перелічені властивості рівномірно збіжних рядів можна використовувати при наближених обчисленнях.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{nx} \cdot n}$.

Розв’язання.

Заданий ряд визначений для будь-якого дійсного x, причому незалежно від x члени цього ряду додатні. Застосуємо ознаку Д’Аламбера:

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{(n+1)x}(n+1)} \cdot \frac{2^{nx} n}{1} = \frac{1}{2^x}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2^x}.$$

Оскільки ряд збігається, якщо $l(x) < 1$, то розв’язуємо нерівність

$$\frac{1}{2^x} < 1, \quad 2^x > 1, \quad x > 0.$$

При $x=0$ виконується умова $l(x)=1$, тому перевіримо в цій точці заданий ряд на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\cdot 0}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — розбіжний ряд.

Отже, область збіжності заданого ряду $x\in(0;\infty)$.

Приклад 2. Знайдіть область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.

Розв’язання.

Ряд визначений на всій числовій прямій, крім точки $x=-1$. Розглянемо випадки:

1) $x=1$, тоді $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$, тому в цій точці ряд розбіжний;

2) $-1<x<1$, тоді $\lim_{n\to\infty}x^n=0$, $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=1\neq 0$, тому ряд розбігається;

3) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. У цьому випадку ряд збігається.

Справді, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ збіжний для x, що задовольняють умову $\left|\frac{1}{x^n}\right|<1$, тобто $|x|>1$, і $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+x^n}\cdot x^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x^{-n}+1}\right|=1$, то за граничною ознакою порівняння заданий ряд збіжний для $|x|>1$.

Отже, область збіжності вихідного ряду $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

Приклад 3. Дослідіть на рівномірну збіжність функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

Розв’язання.

Ряд визначений для всіх $x\in(-\infty;\infty)$ і є знакозмінним функціональним рядом. Застосуємо ознаку Вейєрштрасса. Збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ є мажорантним для вихідного ряду. Члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^3}$, утвореного із модулів членів вихідного ряду, задовольняють нерівності $\frac{|\cos nx|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$ $(n=1,\,2,\,\ldots)$ при всіх $x\in(-\infty;\,\infty)$. Тому за ознакою Вейєрштрасса заданий ряд збігається абсолютно і рівномірно на всій числовій прямій, тобто при $x\in R$.

Запитання для самоперевірки

1. Які ряди називають функціональними?
2. Сформулюйте означення області збіжності функціонального ряду.
3. Сформулюйте означення абсолютної збіжності функціонального ряду.
4. Які функціональні ряди називають рівномірно збіжними?
5. Як шукають область збіжності функціональних рядів?
6. Як досліджують функціональні ряди на рівномірну збіжність?
7. Сформулюйте основні властивості рівномірно збіжних рядів.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{(1-n)x}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln^n x$.

Завдання 2. Дослідіть на рівномірну збіжність функціональні ряди на вказаному проміжку:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+x^2}$, $x\in(-\infty;\,\infty)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$, $x\in(0;\,\infty)$.

Відповіді: 1. а) $(0;\infty)$; б) $x\ne\pm1$; в) $(-\infty;\,\infty)$; г) $(0;\infty)$; д) $(e^{-1};\,e)$.
2. а) збігається рівномірно; б) збігається нерівномірно.

Тема 5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

План

1. Степеневі ряди. Основні поняття та означення.
2. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду.

3. Властивості степеневих рядів.
4. Ряди Тейлора і Маклорена.
5. Розвинення елементарних функцій у ряд Маклорена.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** означення степеневого ряду, означення радіуса та інтервала збіжності степеневих рядів, формули радіусу збіжності для повних степеневих рядів, властивості степеневих рядів, означення рядів Тейлора та Маклорена; ***уміти:*** розпізнавати повні та неповні степеневі ряди, знаходити радіус, інтервал та область збіжності степеневих рядів, застосовувати властивості степеневих рядів, розкладати функції у ряд Маклорена.

Основні теоретичні відомості

Функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (5.1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — дійсні числа, називають *степеневим* рядом.

Функціональний ряд вигляду

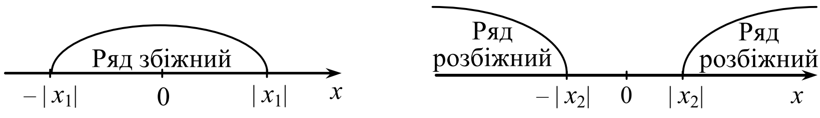
$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (5.2)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — дійсні числа, x_0 — деяке стале число, є степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$.

Область збіжності степеневого ряду містить принаймні одну точку: $x = 0$ для ряду (5.1) і $x = x_0$ для ряду (5.2).

Теорема 5.1 (*Абеля*). Якщо степеневий ряд (5.1) збігається у точці $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$ (рис. 5.1, *а*).

Наслідок. Якщо ряд (5.1) розбігається у точці $x = x_2$, то він розбігається і для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$ (рис. 5.1, б).



а *б*

Рис. 5.1

Для ряду (5.1) можливі наступні три випадки:

1) ряд збіжний лише в одній точці $x = 0$;

2) ряд збіжний для будь-якого $x \in (-\infty; \infty)$;

3) існує таке додатне число *R*, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний (рис. 5.2).

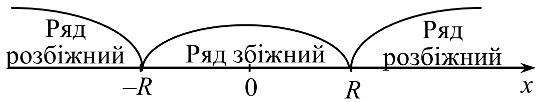


Рис.5.2

Число *R* називають *радіусом збіжності* степеневого ряду. Зв'язок між радіусом та інтервалом збіжності степеневих рядів (5.1) та (5.2) наведемо в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Радіус збіжності *R*	Інтервал збіжності степеневого ряду (5.1)	Інтервал збіжності степеневого ряду (5.2)
$R = 0$	$x = 0$	$x = x_0$
$R = \infty$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$0 < R < \infty$	$(-R; R)$	$(-R + x_0;\ R + x_0)$

Радіус збіжності степеневих рядів (5.1) та (5.2) визначають за формулами:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|; \tag{5.3}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{5.4}$$

Зауваження 1. Якщо степеневий ряд містить не всі степені x, тобто є неповним, то радіус збіжності безпосередньо за формулами (5.3) та (5.4) знаходити не можна.

Важливо розпізнавати неповні степеневі ряди й раціонально обирати подальші дії при дослідженні їх збіжності: шукати інтервал збіжності за ознакою Д'Аламбера або Коші як для функціонального ряду чи зводити неповний степеневий ряд до повного, використовуючи відповідну заміну (якщо це можливо).

Зауваження 2. Якщо $0 < R < \infty$, то в цьому випадку степеневий ряд у точках, які є кінцями інтервалу збіжності, може збігатися або розбігатися. Підставляючи по черзі у заданий ряд (5.1) точки $x = -R; R$ чи у ряд (5.2) точки $x = -R + x_0;\ R + x_0$, досліджують утворені числові ряди на збіжність.

Властивості степеневих рядів

1. Степеневий ряд (5.1) абсолютно і рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-a;\ a]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R;\ R)$.

2. Сума $S(x)$ степеневого ряду (5.1) неперервна функція на проміжку $(-R;\ R)$.

3. (*Про почленне диференціювання.*) Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати. Ряд, утворений диференціюванням, має той самий інтервал збіжності, причому, якщо $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

4. (*Про почленне інтегрування.*) На будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, степеневий ряд можна почленно інтегрувати. Зокрема, якщо відрізок інтегрування $[0; x] \in (-R;\ R)$ і $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то $\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, причому утворений після інтегрування ряд має той самий інтервал збіжності.

5. Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ із радіусами збіжності R_1 та R_2 відповідно можна почленно додавати, віднімати, перемножувати. Радіус збіжності утворених рядів не менший, ніж менше з чисел R_1 та R_2.

Ряди Тейлора та Маклорена

Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і деякому її околі похідні всіх порядків.

Ряд вигляду

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{5.5}$$

називають *рядом Тейлора* функції $f(x)$.

Теорема 5.2. Для того щоб ряд Тейлора (5.5) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$, тобто

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{5.6}$$

необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і вираз $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, де $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x із цього інтервалу: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, $x\in(x_0-R;x_0+R)$.

Частинний випадок ряду Тейлора, коли $x_0=0$, називають рядом *Маклорена* — розвинення функції у степеневий ряд за степенями x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ . \tag{5.7}$$

Наведемо розвинення деяких елементарних функцій у ряд Маклорена у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

№	Ряд Маклорена функції $f(x)$	Область збіжності
1	$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$

2	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
3	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
4	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
5	$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$	$-1 < x < 1$
6	$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$	$-1 < x < 1$
7	$(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!} x + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + {}$ $+ \ldots + \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} x^n + \ldots$	$-1 \le x \le 1,\ m \ge 0;$ $-1 < x \le 1,$ $m \in (-1;0);$ $-1 < x < 1,\ m \le -1.$

На практиці для розвинення функцій у ряд Тейлора (Маклорена) використовують наведені вище розвинення елементарних функцій у комбінації з правилами додавання, віднімання, множення рядів і теоремами про інтегрування та диференціювання степеневих рядів.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+2)^n$.

Розв'язання.

Маємо повний степеневий ряд, тому за формулою (5.3):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 .$$

Оскільки радіус збіжності дорівнює нулю, то степеневий ряд збігається лише в одній точці $x=-2$.

Приклад 2. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}$.

Розв'язання.

Маємо повний степеневий ряд, тому радіус збіжності знайдемо за формулою (5.3): $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+2}}\right|=3\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=3.$$

Визначаємо інтервал збіжності: $-3<x+2<3$, $-5<x<1$. Тому ряд абсолютно збіжний у внутрішніх точках інтервалу $(-5;1)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:
при $x=-5$ вихідний ряд переходить у розбіжний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-5+2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};$$

при $x=1$ ряд набуває вигляду: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, який є умовно збіжним як ряд Лейбніца.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $(-5;1]$.

Приклад 3. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^{2n}$.

Розв'язання.

Ряд є неповним, оскільки містить тільки парні степені x. Позначивши $x^2=t\geq 0$, дістанемо повний степеневий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n t^n$, радіус збіжності якого визначаємо за формулою (5.4): $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2.$

Утворений після заміни ряд збігається при $t\in(-2;\,2)$. Враховуючи обмеження $t\geq 0$, дістанемо $t\in[0;\,2)$, тобто у точці $t=0$ цей ряд збіжний. Дослідимо його на правому кінці інтервалу збіжності. При $t=2$, дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0$, то при $t=2$ ряд розбігається. Тому, утворений після заміни ряд збіжний на проміжку $t\in[0;\,2)$.

Повернувшись до заміни $x^2=t$, визначимо область збіжності вихідного ряду: $x^2\in[0;\,2)$, $|x|<\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Приклад 4. Розкладіть у ряд Маклорена функцію $f(x)=x\ln(2+x)$.

Розв'язання.

Перетворимо цю функцію так:

$$f(x)=x\ln(2+x)=x\ln 2\left(1+\frac{x}{2}\right)=x\ln 2+x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

Скориставшись розвиненням 4 з табл. 5.2 для функції $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ отримаємо: $f(x)=x\ln 2+x\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+\ldots\right)=$

$$=x\ln 2+x^2-\frac{x^3}{2\cdot 2^2}+\frac{x^4}{3\cdot 2^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+\ldots\ .$$

Область збіжності одержаного ряду збігається з областю збіжності ряду Маклорена для функції $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right): -1<\frac{x}{2}\le 1$, тобто $-2<x\le 2$.

Запитання для самоперевірки

1. Які ряди називають степеневими?
2. Сформулюйте означення радіуса та інтервала збіжності степеневого ряду.
3. Як шукають радіус збіжності степеневих рядів?
5. Продемонструйте зв'язок радіуса, інтервала та області збіжності степеневого ряду.
6. Як шукають область збіжності степеневих рядів?
7. Сформулюйте основні властивості степеневих рядів.
8. Сформулюйте означення рядів Тейлора та Маклорена.
9. Як розкладають функції у ряд Маклорена?
8. Чи правильним є твердження, що не кожен степеневий ряд є функціональним? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть область збіжності степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!\cdot(x+3)^{n+1}}{7^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[4]{n+1}}$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+3)\cdot 5^n(x-1)^n$.

Завдання 2. Розкладіть у ряд Маклорена функції:

а) $\frac{1}{2x-3}$; б) $\frac{x}{1-x^3}$; в) $2x\cos^2 x$; г) $\ln(3+6x)$.

Відповіді: 1. а) $[-1;\,1]$; б) $[1;\,5)$; в) $\{-3\}$; г) $[-1;\,1)$; д) $(-2;\,2)$; е) $(-0{,}2;\,0{,}2)$. **2.** а) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{3^{n+1}}$, $|x|<\frac{3}{2}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}$, $x\in(-1;1)$; в) $2x-\frac{2^2x^3}{2!}+\frac{2^4x^5}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots$, $x\in R$; г) $\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^nx^n}{n}$, $x\in(-0{,}5;\,0{,}5]$.

Тема 6. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

План

1. Наближене обчислення значень функцій.
2. Наближене обчислення визначених інтегралів.
3. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 студент повинен ***знати:*** означення рядів Тейлора та Маклорена; ***уміти:*** використовувати степеневі ряди для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів та наближеного розв'язання диференціальних рівнянь, що задовольняють початкові умови.

Основні теоретичні відомості

Степеневі ряди використовують для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язання диференціальних рівнянь, що задовольняють початкові умови, тощо.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть $\sqrt{e}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}005$.

Розв'язання.

Використовуючи розвинення у ряд Маклорена функції e^x, дістанемо $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{2^n n!} + \ldots$.

Визначимо найменше n таким, щоб похибка наближеної рівності $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{2^n n!}$ не перевищувала заданої точності. Для цього оцінимо залишок $R_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+2}(n+2)!} + \frac{1}{2^{n+3}(n+3)!} + \ldots =$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2^2(n+2)^2}+\frac{1}{2^3(n+2)^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2(n+2)}}=\frac{n+2}{2^n(2n+3)(n+1)!}.$$

Добором встановлюємо, що нерівність $R_n<\frac{n+2}{2^n(2n+3)(n+1)!}<0,005$ виконується, починаючи з $n=3$.

Отже, $\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}\approx 1+0,5+0,125+0,0208\approx 1,646.$

Приклад 2. Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$ з точністю $\varepsilon=0,001$.

Розв’язання.

Зауважимо, що інтеграл $\int e^{-x^2}dx$ не виражається через елементарні функції. Для наближеного обчислення заданого інтеграла розкладемо підінтегральну функцію у степеневий ряд і скористаємося властивістю про почленне інтегрування степеневого ряду. Дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}+\ldots\right)\right|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)\cdot n!}+\ldots$$

Оскільки ряд у правій частині останньої рівності є знакопочережним і задовольняє умови теореми Лейбніца, то згідно з наслідком з цієї теореми абсолютна похибка від заміни суми цього ряду його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $\left| r_n \right| \le u_{n+1}$.

Знайдемо найменше n, починаючи з якого виконуватиметься нерівність $u_{n+1} < 0,001$, тобто $\dfrac{1}{2^{2n+1}(2n+1) \cdot n!} < 0,001$. Ця нерівність виконується починаючи з $n = 3$: $\dfrac{1}{2^7 \cdot 7 \cdot 3!} = \dfrac{1}{5376} < 0,001$. Тому, обмежившись членами ряду (їх усього 3), які знаходяться перед доданком $\dfrac{1}{2^7 \cdot 7 \cdot 3!}$, дістанемо значення шуканого інтеграла з точністю до 0,001:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 2!} \approx 0,5 - 0,0417 + 0,0031 \approx 0,461.$$

Приклад 3. Знайдіть наближений розв'язок задачі Коші $y' = x^2 + y^3$, $y(0) = 1$, обмежившись чотирма ненульовими членами розвинення цього розв'язку у степеневий ряд.

Розв'язання.

Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Маклорена $y = y(0) + \dfrac{y'(0)}{1!}x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{y'''(0)}{3!}x^3 ... + \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$.

З умови задачі маємо перші два коефіцієнти: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0^2 + 1^3 = 1$.

Продиференціюємо вихідне рівняння за x: $y'' = 2x + 3y^2 y'$. Підставивши в одержане рівняння значення $x = 0$, $y(0) = 1$ та $y'(0) = 1$, дістанемо коефіцієнт $y''(0) = 0 + 3 = 3$. Тепер переходимо до рівняння $y''' = 2 + 3(2y(y')^2 + y^2 y'')$. Тоді $y'''(0) = 2 + 3(2 + 3) = 17$. Отже, наближений розв'язок задачі Коші визначається формулою $y \approx 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{17}{6}x^3$.

Ця формула тим точніша, чим ближче змінна x до нуля.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення рядів Тейлора та Маклорена.
2. Як розкладають функції у ряд Маклорена?
3. Як використовують степеневі ряди для наближеного обчислення значень функцій?
4. Як використовують степеневі ряди для наближеного обчислення визначених інтегралів?
5. Як використовують степеневі ряди для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь, що задовольняють початкові умови?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть значення функцій із точністю ε:

а) $\sqrt[3]{130},\ \varepsilon = 0{,}0001$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}},\ \varepsilon = 0{,}001$; в) $\cos 10°,\ \varepsilon = 0{,}0001$.

Завдання 2. Обчисліть визначені інтеграли із точністю ε:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon = 0{,}0001$; б) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 dx$, $\varepsilon = 0{,}0001$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$, $\varepsilon = 0{,}001$; г) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Завдання 3. Знайдіть наближений розв'язок задачі Коші, обмежившись чотирма ненульовими членами розвинення цього розв'язку у степеневий ряд:

а) $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$; б) $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Відповіді: 1. а) 5,0658; б) 0,716; в) 0,9948. **2.** а) 0,4931; б) 0,9045; в) 0,494; г) 0,333. **3.** а) $y \approx 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{24}x^4$; б) $y \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Тема 7. РЯДИ ФУР'Є

План

1. Тригонометричний ряд Фур'є.
2. Коефіцієнти Фур'є.
3. Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є

4. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.

5. Ряд Фур'є для 2π та $2l$ — періодичних функцій.

6. Ряди Фур'є для функцій, заданих на відрізку [0; *l*] або на довільному відрізку [*a*; *b*].

7. Комплексна форма ряду Фур'є.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 7 студент повинен ***знати:*** означення тригонометричного ряду Фур'є та коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, достатні умови подання функції $f(x)$ через її ряд Фур'є, комплексну форму ряду Фур'є та комплексні коефіцієнти ряду Фур'є; ***уміти:*** розпізнавати ряди Фур'є, обчислювати коефіцієнти Фур'є і розкладати 2π та $2l$-періодичні функції у ряд Фур'є.

Основні теоретичні відомості

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{7.1}$$

називають *тригонометричним рядом*. Сталі числа $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ – коефіцієнти тригонометричного ряду. Вільний член ряду для зручності записують у вигляді $\frac{a_0}{2}$.

Припустимо, що періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$ можна розкласти у тригонометричний ряд, який збігається до функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{7.2}$$

Числа a_0, a_n, b_n, які визначаються формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

називають *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (7.2), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають рядом Фур'є функції $f(x)$.

Для інтегровної на відрізку $[-\pi;\,\pi]$ функції $f(x)$ пишуть: $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Знак відповідності (~) означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi;\,\pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

Наступна теорема дає достатні умови подання функції $f(x)$ через її ряд Фур'є.

Теорема 7.1 (*Діріхле*). Нехай 2π — періодична функція $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\,\pi]$ є:

1) неперервною або має скінченну кількість точок розриву першого роду;

2) монотонною на відрізку $[-\pi;\,\pi]$ або цей відрізок можна розбити на скінченну кількість інтервалів так, що на кожному з них функція монотонна.

Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій прямій і сума $S(x)$ ряду Фур'є задовольняє рівності:

1) у точках неперервності функції $f(x)$: $S(x)=f(x)$, тобто $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$;

2) якщо x_0 — точка розриву (першого роду) функції $f(x)$, то $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;

3) $S(-\pi)=S(\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Зауваження 1. Для довільної інтегровної 2π-періодичної функції коефіцієнти Фур'є можна обчислювати за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx,$$

де a — довільне дійсне число.

Зауваження 2. При обчисленні коефіцієнтів Фур'є використовують рівності: $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = \left(-1\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є спрощується, якщо функція $f(x)$ є парною або непарною. При цьому вигляд ряду Фур'є також спрощується, він стає неповним (табл.7.1).

Таблиця 7.1

Властивість функції $f(x)$	Ряд Фур'є	Коефіцієнти Фур'є
$f(x)$ — парна функція	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$
$f(x)$ — непарна функція	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$	$a_0 = 0,\ a_n = 0,$ $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$

Ряд Фур'є для 2l- періодичних функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$, має період $2l$ ($l > 0$) і задовольняє на цьому відрізку умови Діріхле. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{7.3}$$

де коефіцієнти Фур'є визначають за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{7.4}$$

Для парних і непарних функцій, заданих на відрізку $[-l; l]$, вигляд ряду Фур'є та формули для обчислення його коефіцієнтів вміщено у табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Властивість функції $f(x)$	Ряд Фур'є	Коефіцієнти Фур'є
$f(x)$ — парна функція	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$	$b_n=0,\ a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$ $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$
$f(x)$ — непарна функція	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$	$a_0=0,\ a_n=0,$ $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

***Ряди Фур'є для функцій, заданих на відрізку* [0; *l*]**

Функцію, задану на відрізку $[0;l]$, зручно розкладати за косинусами або синусами.

1. Довизначимо функцію $f(x)$, задану на відрізку $[0;l]$, на інтервал $(-l;\ 0)$ парним чином, тобто $f(x)=f(-x)$ для $x\in(-l;\ 0)$ (рис. 7.2, а). Тоді функцію $f(x)$ на проміжку $(-l;\ l)$ можна вважати парною і її ряд Фур'є містить тільки косинуси (див. формули у табл. 7.2).

2. Довизначимо тепер функцію $f(x)$ на інтервал $(-l;\ 0)$ непарним чином, тобто $f(x)=-f(-x)$ для $x\in(-l;\ 0)$ (рис. 7.2, б). Тоді функцію $f(x)$ на проміжку $(-l;\ l)$ можна вважати непарною і її ряд Фур'є містить тільки синуси (див. табл. 7.2).

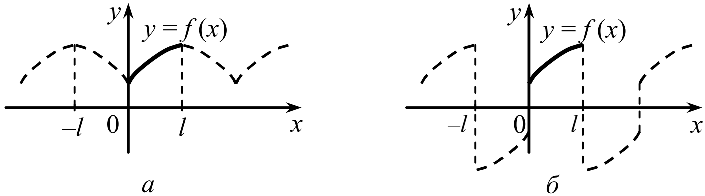


Рис. 7.2

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розкладіть у ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)=|x|,\ f(x+2\pi)=f(x)$ (рис. 7.1).

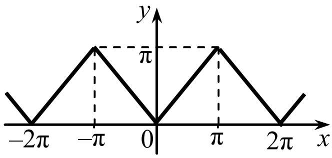


Рис. 7.1

Розв'язання.

Ця функція задовольняє умови Діріхле, парна, тому ряд Фур'є для цієї функції має вигляд $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

Визначимо коефіцієнти Фур'є a_0 та a_n (див. табл. 7.1):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\pi; \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1).$$

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Оскільки задана функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій, то отримане представлення справджується для будь-якого $x\in R$.

Приклад 2. Розкладіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=x^2$, $x\in[0;\pi]$.

Розв'язання.

Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на проміжок $[-\pi;0)$, а потім продовжимо періодично з періодом 2π на всю числову пряму (рис. 7.3).

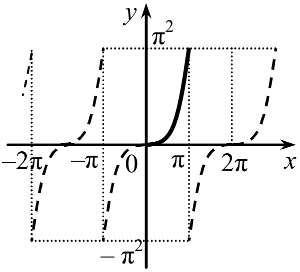


Рис. 7.3

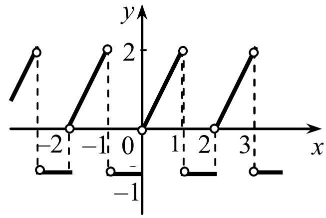


Рис. 7.4

На відрізку $\left[-\pi; \pi\right]$ функція непарна, і тому $a_0 = a_n = 0$. Коефіцієнт b_n знайдемо за формулою $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f\left(x\right)\sin nxdx$. Маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left(x^2 \cdot \frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int\limits_0^{\pi} x\cos nxdx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\pi^2 \cdot \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n}\left(x \cdot \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi} \sin nxdx \right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{2\pi}{n}\left(-1\right)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}\left(\left(-1\right)^n - 1\right).$$

Отже, $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\sin nx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\sin nx =$

$$= 2\pi\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots \right).$$

Ця рівність справедлива в усіх точках $x \in \left[0; \pi\right]$, крім точки $x = \pi$, в якій сума ряду дорівнює 0, а значення функції $f(\pi) = \pi^2$.

Приклад 3. Розкладіть у ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x \in (-1; 0], \\ 2x, \text{ якщо } x \in (0; 1), \end{cases}$ $f(x+2) = f(x)$ (рис. 7.4).

Розв'язання.

Функція $f(x)$ є кусково-монотонною, періодичною з періодом $2l = 2$, тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є визначаємо за формулами (7.5):

$$a_0=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}2xdx=-x\Big|_{-1}^{0}+x^2\Big|_{0}^{1}=-1+1=0;$$

$$a_n=\int_{-1}^{0}(-1)\cos n\pi x dx+\int_{0}^{1}2x\cos n\pi x dx=-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0}+$$

$$+2x\cdot\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{0}^{1}-\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{1}\sin n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-1\right)=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1;\end{cases}$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}(-1)\sin n\pi x dx+\int_{0}^{1}2x\sin n\pi x dx=\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0}+$$

$$+2x\cdot\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}2\cdot\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}dx=\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi+$$

$$+0+2\cdot\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{n\pi}\left(1-3(-1)^n\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k\pi}, & \text{якщо } n=2k,\\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & \text{якщо } n=2k-1.\end{cases}$$

Отже, ряд Фур’є має вигляд

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4\cos\left(2k-1\right)\pi x}{\left(2k-1\right)^2\pi^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)\pi}.$$

Сума ряду Фур’є $S(x)$ задовольняє рівності

$$S(x)=\begin{cases}f(x), \text{ якщо } x\in(-1+2k;\,2k)\cup(2k;\,1+2k),\\ -0,5, \text{ якщо } x=2k,\\ 0,5, \text{ якщо } x=-1+2k,\end{cases}\qquad k\in Z.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення тригонометричного ряду Фур’є.

2. Запишіть формули коефіцієнтів Фур'є періодичної з періодом 2π функції $f(x)$.

3. Сформулюйте достатні умови подання функції $f(x)$ через її ряд Фур'є.

4. Запишіть комплексну форму ряду Фур'є та комплексні коефіцієнти ряду Фур'є.

5. Запишіть формули коефіцієнтів Фур'є та ряду Фур'є для парних і непарних функцій.

6. Запишіть формули коефіцієнтів Фур'є та ряду Фур'є для 2π та $2l$ –періодичних функцій.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розкладіть у ряд Фур'є 2π-періодичні функції, задані на інтервалі $(-\pi;\ \pi)$:

а) $f(x)=x$; б) $f(x)=\begin{cases} 3, \text{ якщо } x\in(-\pi;0), \\ -1, \text{ якщо } x\in[0;\ \pi); \end{cases}$ в) $f(x)=1+\dfrac{x}{2}$.

Завдання 2. Розкладіть у ряд Фур'є за косинусами функції, задані на інтервалі $(0;\ \pi)$:

а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in(0;\pi/2), \\ 0, \text{ якщо } x\in[\pi/2;\ \pi). \end{cases}$

Завдання 3. Розкладіть у ряд Фур'є функції:

а) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in[-1;\ 0), \\ -1, \text{ якщо } x\in[0;\ 1); \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\in[-3;1), \\ x, \text{ якщо } x\in[1;3]. \end{cases}$

Відповіді: 1. а) $2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\sin kx}{k}$; б) $1-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; в) $1+\sin x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{\sin 4x}{4}+\dots$. **2.** а) $\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\cos kx}{k^2}$; б) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$. **3.** а) $-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}$; б)

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{3}+\frac{9}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{3}\right)\right)\cos\frac{\pi n x}{3}+$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n}\left(3(-1)^{n+1}+\cos\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{3}\right)\sin\frac{\pi n x}{3}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 681с.

2. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.Дубовик, І. Юрик, І. Вовкодав та ін.; За ред. В.Дубовика, І. Юрика. – К: 2001 – 480 с.

3. Ластівка І.О., Безверхий О.І., Кудзіновська І.П. Вища математика: навч. Посібник. – К.: НАУ, 2018. – 452 с.

4. Репета В.К. Вища математика: підручник: у 2 ч. – Ч. 2. – 2-е вид. виправ. – К.: НАУ, 2017. – 504 с.

5. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навчальний посібник. Частина 3. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.– 444 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи здобувачів вищої освіти
технічних спеціальностей

Укладачі:
ЛАСТІВКА Іван Олексійович
РЕПЕТА Віктор Кузьмич
ОЛІЙНИК Олег Петрович

В авторській редакції

Технічний редактор А. І. Лавринович
Комп'ютерна верстка *В. В. Мішкур*

Підп. до друку 22 08.2022. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,02. Обл.-вид. арк. 3,25.
Тираж 25 прим. Замовлення № 92-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Любомира Гузара, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 7604 від 15.02.2022