МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи для студентів
технічних та економічних спеціальностей**

Київ 2022

УДК

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

І. П. Кудзіновська – канд. техн. наук, доцент;

В. В. Кравченко – ст. викладач.

Рецензент: О.Д. Глухов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № _ від ___________).

Вища математика. Теорія ймовірностей. Випадкові величини: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних та економічних спеціальностей / уклад. : І.О. Ластівка, І.П. Кудзіновська, В.В. Кравченко. – К. : НАУ, 2022. – 48 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв'язання типових задач розділу «Теорія ймовірностей. Випадкові величини», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації розроблено для вивчення розділу «Випадкові величини», який є складовою частиною курсів «Вища математика» і «Теорія ймовірностей та математична статистика», що входять до програм підготовки студентів економічних та технічних спеціальностей.

Методичні рекомендації складаються з шести тем, кожна з яких містить основні теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, запитання для самоперевірки, завдання для самостійного виконання та перелік рекомендованих літературних джерел.

Навчальний матеріал викладено стисло, у поєднанні теоретичної строгості і доступності для сприйняття та проілюстровано прикладами розв'язування завдань, які слугують зразком оптимального оформлення розв'язання завдань.

Особливістю методичних рекомендацій є подання теоретичних відомостей та прикладів розв'язування задач у табличному вигляді, що полегшує сприйняття та засвоєння студентами навчального матеріалу. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість, що сприяє зацікавленості у вивченні розділу «Випадкові величини», формуванню теоретико-ймовірнісної інтуїції студента та умінню будувати математичні моделі реальних виробничих процесів та технологій.

Методичні рекомендації укладено відповідно до навчальних програм, призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на забезпечення теоретичної та методичної підтримки навчального процесу.

Тема 1. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План

1. Поняття дискретної випадкової величини.
2. Закон розподілу дискретної випадкової величини та способи його задання.
3. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** види випадкових величин, означення дискретної випадкової величини, поняття закону розподілу дискретної випадкової величини та способи його задання, означення і формули математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення, їх властивості; ***уміти:*** складати функцію розподілу, будувати її графік та многокутник розподілу, знаходити числові характеристики дискретної випадкової величини.

Основні теоретичні відомості

Випадковою називають величину, яка при випробуванні може набути єдиного можливого значення, наперед невідомого і обумовленого випадковими причинами.

↓

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається така величина, множина можливих значень якої або скінченна, або зліченна (множина, елементи якої можуть бути пронумеровані).

↓

Законом розподілу ДВВ називається співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

↓

Способи задання закону розподілу ДВВ

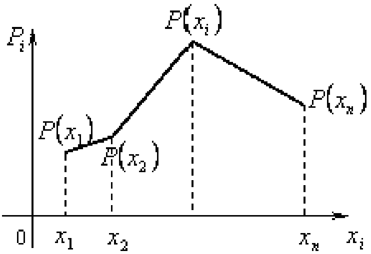
табличний

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ряд розподілу

графічний



Многокутник розподілу

аналітичний

Функцією розподілу ДВВ X називають функцію $F(x) = P(X < x),\ x \in R$, де $P(X < x)$ – ймовірність того, що X набуде значення, меншого за x.

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Числові характеристики ДВВ

Математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Дисперсія $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

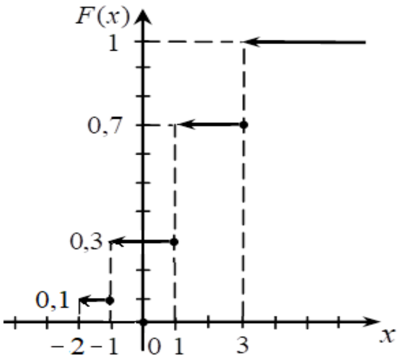
Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Закон розподілу ДВВ задано таблицею

x_i	-2	-1	1	3
p_i	a	$2a$	$4a$	$3a$

Знайти a. Обчислити: $P(X<-1)$, $P(-1\le X\le 1)$, $P(X\ge 3)$. Побудувати функцію розподілу та накреслити її графік. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання

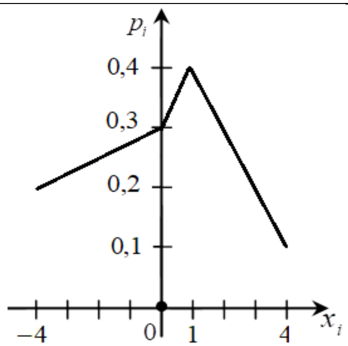
<table>
<tr><td>$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ – умова нормування</td><td>$a+2a+4a+3a=1;$
$10a=1;$
$a=0{,}1$</td></tr>
<tr><td>Закон розподілу</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>– 2</td><td>– 1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Ймовірність потрапляння ДВВ у проміжок</td><td>$P(X<-1)=P(X=-2)=0{,}1;$
$P(-1\le X\le 1)=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}2+0{,}4=0{,}6;$
$P(X\ge 3)=P(X=3)=0{,}3$</td></tr>
<tr><td>Функція розподілу ймовірностей</td><td>$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}1, & -2<x\le -1;\\ 0{,}3, & -1<x\le 1;\\ 0{,}7, & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Графік функції розподілу ймовірностей</td><td></td></tr>
<tr><td>Математичне сподівання</td><td>$M(X)=-2\cdot 0{,}1+(-1)\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}3=0{,}9$</td></tr>
</table>

Дисперсія	$D(X)=(-2)^2\cdot 0,1+(-1)^2\cdot 0,2+1^2\cdot 0,4+3^2\cdot 0,3-$ $-0,9^2=3,7-0,81=2,89$
Середнє квадратичне відхилення	$\sigma(X)=\sqrt{2,89}=1,7$

Приклад 2. ДВВ X задана аналітично. Задати закон розподілу ДВВ X табличним і графічним способами.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4; \\ 0,2, & -4<x\le 0; \\ 0,5, & 0<x\le 1; \\ 0,9, & 1<x\le 4; \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

Розв'язання

<table>
<tr><td>Закон розподілу ДВВ X</td><td>
<table>
<tr><td>x_i</td><td>– 4</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Многокутник розподілу</td><td>
</td></tr>
</table>

Приклад 3. Математичне сподівання ДВВ X – кількості балів, отриманих студентом авіаційної спеціальності за виконання навчального завдання, $M(X)=3,7$. Закон розподілу задано таблицею

x_i	2	3	4	5

p_i	p_1	p_2	0,4	0,2

Знайти ймовірності p_1, p_2.

Розв'язання

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ – умова нормування, $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$p_1+p_2+0,4+0,2=1;$ $M(X)=2p_1+3p_2+4\cdot 0,4+5\cdot 0,2=3,7$
Розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь	$\begin{cases} p_1+p_2+0,4+0,2=1; \\ 2p_1+3p_2+4\cdot 0,4+5\cdot 0,2=3,7 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} p_1+p_2=0,4; \\ 2p_1+3p_2=1,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=0,1; \\ p_2=0,3 \end{cases}$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення випадкової величини; дискретної випадкової величини.
2. Що називається законом розподілу дискретної випадкової величини? Якими способами його можна задати?
3. Що називається многокутником розподілу та функцією розподілу ДВВ?
4. Записати формули для обчислення числових характеристик дискретної випадкової величини.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Які з наведених нижче випадкових величин є дискретними?

а) кількість запланованих на місяць авіарейсів у аеропорту ;
б) вартість квитка на найближчий авіарейс з певного аеропорту;
в) довжина у кілометрах інверсійного сліду літака;
г) кількість пасажирів деякого авіарейсу;
д) вартість літака компанії Airbus;
е) вага багажу, що перевозиться пасажиром літака;
є) сума цифр у даті вильоту певного авіарейсу;
ж) довжина злітної смуги.

Завдання 2. Закон розподілу ДВВ задано таблицею

x_i	-5	-2	1	3	4
p_i	a	$2a$	$3a$	$3a$	a

Знайти a. Обчислити: $P(X < -5),\ P(-2 \le X \le 3),\ P(X \ge 4)$. Побудувати функцію розподілу, накреслити її графік та многокутник розподілу.

Завдання 3. Закон розподілу ДВВ задано таблицею

x_i	-2	0	1	3	4
p_i	0,15	0,2	0,1	0,3	p_5

Обчислити ймовірність p_5. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ.

Завдання 4. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Обчислити її числові характеристики.

x_i	-4	-2	-1	0	3	5
p_i	0,01	0,02	0,25	0,4	0,1	0,22

Завдання 5. Дискретна випадкова величина X може набувати лише трьох значень $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, з ймовірностями $p_1,\ p_2,\ p_3$ а також $M(X) = 0{,}1;\ M(X^2) = 0{,}9$. Знайти ймовірності $p_1,\ p_2,\ p_3$.

Тема 2. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

План

1. Біномний закон розподілу.
2. Закон розподілу Пуассона.
3. Геометричний закон розподілу.
4. Гіпергеометричний закон розподілу.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** біномний, геометричний, гіпергеометричний та пуассонівський закони розподілу, їх означення, умови виникнення та формули; ***уміти:*** визначати закон розподілу ДВВ, складати для неї ряд розподілу та обчислювати її числові характеристики.

Основні теоретичні відомості

Закони розподілу ДВВ

Біномний закон – це закон розподілу випадкової величини, яка набуває значень 0, 1, 2, ..., k, ..., n з ймовірностями, які обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

Пуассонівський закон – це закон розподілу випадкової величини, яка набуває значень 0, 1, 2, ..., k, ... , ймовірність яких обчислюється за формулою Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \text{де } \lambda=np$$

Геометричний закон – закон розподілу випадкової величини, яка набуває значень 1, 2, 3, ..., k, ... (нескінченну, але зліченну множину значень), ймовірність яких обчислюється за формулою $P(X=k)=pq^{k-1}$.

Зсунутий геометричний розподіл – закон розподілу випадкової величини, яка набуває значень 0, 1, 2, ..., k, ... , ймовірність яких обчислюється за формулою

$$P(X=k)=pq^k$$

Гіпергеометричний закон – це закон розподілу випадкової величини, яка набуває значень 0, 1, 2, ..., min (m, n), ймовірність яких обчислюється за формулою

$$P(X=k)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

Числові характеристики основних розподілів			
Закон розподілу	$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
Біномний	np	npq	$\sqrt{D(X)}$
Пуассона	λ	λ	
Геометричний	$1/p$	$\dfrac{q}{p^2}$	
Зсунутий геометричний	q/p		
Гіпергеометричний $\left(p=\dfrac{n}{N}\right)$	mp	$mpq\dfrac{N-m}{N-1}$	

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. На думку викладачів НАУ, 20% майбутніх авіадиспетчерів опановують дисципліну «Авіоніка» на оцінку «відмінно». Випадково вибрано 5 студентів цієї спеціальності. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості студентів, що склали іспит з «Авіоніки» на «відмінно», та знайти її числові характеристики.

Розв'язання

Закон розподілу ДВВ X	Біномний, $n=5;\ p=0,2;\ q=0,8$
Можливі значення X	0, 1, 2, 3, 4, 5
Ймовірності значень X: $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	$P(X=0)=C_5^0\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5\approx 0,328;$ $P(X=1)=C_5^1\cdot 0,2\cdot 0,8^4\approx 0,41;$ $P(X=2)=C_5^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^3\approx 0,205;$ $P(X=3)=C_5^3\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2\approx 0,051;$ $P(X=4)=C_5^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8\approx 0,006;$ $P(X=5)=C_5^5\cdot 0,2^5\cdot 0,8^0\approx 0,003$

<table>
<tr><td>Ряд розподілу</td><td>

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,328	0,41	0,205	0,051	0,006	0,003

</td></tr>
<tr><td>Числові характеристики:
$M(X)=np;$
$D(X)=npq;$
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$</td><td>$M(X)=5\cdot 0,2=1;$
$D(X)=5\cdot 0,2\cdot 0,8=0,8;$
$\sigma(X)=\sqrt{0,8}\approx 0,89$</td></tr>
</table>

Приклад 2. Ймовірність влучення блискавки у літак під час польоту становить 0,0002. Для статистичних досліджень відібрано 5000 авіарейсів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості авіарейсів, під час яких відбулося влучення блискавки у літак, та знайти її числові характеристики.

Розв'язання

<table>
<tr><td>Закон розподілу ДВВ X</td><td>Пуассона, $n=5000;$ $p=0,0002$</td></tr>
<tr><td>Можливі значення X</td><td>0, 1, 2, 3, … , 5000</td></tr>
<tr><td>$\lambda=np;$
Ймовірності значень X :
$P\left(X=k\right)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$</td><td>$\lambda=5000\cdot 0,0002=1;$
$P\left(X=0\right)=\dfrac{1^0}{0!}e^{-1}\approx 0,368;$
$P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{1!}e^{-1}\approx 0,368;$
$P\left(X=2\right)=\dfrac{1^2}{2!}e^{-1}\approx 0,184;$
$P\left(X=3\right)=\dfrac{1^3}{3!}e^{-1}\approx 0,061;$
………………………………
$P\left(X=5000\right)=\dfrac{1^{5000}}{5000!}e^{-1}=\dfrac{e^{-1}}{5000!}$</td></tr>
<tr><td>Ряд розподілу</td><td>

x_i	0	1	2	3	…	5000
p_i	0,368	0,368	0,184	0,061	…	$\dfrac{e^{-1}}{5000!}$

</td></tr>
</table>

Числові характеристики: $M(X)=\lambda;\ D(X)=\lambda;$ $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$	$M(X)=D(X)=1;\ \sigma(X)=\sqrt{1}=1$

Приклад 3. Ймовірність виконати вправу на авіаційному тренажері без помилок дорівнює для майбутнього пілота 0,2. Тренування продовжуються до першої вдалої спроби. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості спроб виконати вправу без помилок, знайти її числові характеристики.

Розв'язання

Закон розподілу ДВВ X	Геометричний, $p=0,2;\ q=0,8$
Можливі значення X	1, 2, 3, 4, … , k, …
Ймовірності значень X : $P(X=k)=pq^{k-1}$	$P(X=1)=0,2\cdot 0,8^0=0,2;$ $P(X=2)=0,2\cdot 0,8=0,16;$ $P(X=3)=0,2\cdot 0,8^2=0,128;$ $P(X=4)=0,2\cdot 0,8^3=0,08192;$ ………………………… $P(X=k)=0,2\cdot 0,8^{k-1};$ …………………………
Ряд розподілу	x_i: 1, 2, 3, 4, … ; p_i: 0,2, 0,16, 0,128, 0,08192, …
Числові характеристики: $M(X)=\dfrac{1}{p};\ D(X)=\dfrac{q}{p^2};$ $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{q}}{p}$	$M(X)=\dfrac{1}{0,2}=5;\ D(X)=\dfrac{0,8}{0,2^2}=20;$ $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{0,8}}{0,2}\approx 4,47$

Ряд розподілу:

x_i	1	2	3	4	…
p_i	0,2	0,16	0,128	0,08192	…

Приклад 4. До вильоту з аеропорту готуються десять літаків, серед яких шість Boeing 737 Classic. На даний момент три літаки проходять протиожеледну обробку. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості літаків Boeing 737 Classic

серед тих, що обробляють від обмерзання. Знайти числові характеристики випадкової величини.

Розв'язання

Закон розподілу ДВВ *X*	Гіпергеометричний, $N=10; n=6; m=3$
Можливі значення *X*	0, 1, 2, 3
Ймовірності значень *X* : $P\left(X=k\right)=\dfrac{C_n^k\,C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$	$P\left(X=0\right)=\dfrac{C_6^0\,C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1\cdot 4}{120}=\dfrac{1}{30};$ $P\left(X=1\right)=\dfrac{C_6^1\,C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{6\cdot 6}{120}=\dfrac{3}{10};$ $P\left(X=2\right)=\dfrac{C_6^2\,C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{15\cdot 4}{120}=\dfrac{1}{2};$ $P\left(X=3\right)=\dfrac{C_6^3\,C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{20\cdot 1}{120}=\dfrac{1}{6}$
Ряд розподілу	<table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$\frac{1}{30}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td></tr></table>
Числові характеристики: $p=\dfrac{n}{N};\ M(X)=mp;$ $D(X)=mpq\dfrac{N-m}{N-1};$ $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$	$p=\dfrac{6}{10}=0,6;\quad M(X)=3\cdot 0,6=1,8;$ $D(X)=3\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot\dfrac{10-3}{10-1}=0,56;$ $\sigma(X)=\sqrt{0,56}\approx 0,75$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення біномного, пуассонівського, геометричного та гіпергеометричного законів розподілу ймовірностей.

2. За яких умов виникають такі розподіли?

3. Чим відрізняється геометричний та зсунутий геометричний розподіли?

4. Записати формули для обчислення числових характеристик біномного, пуассонівського, геометричного, зсунутого

геометричного та гіпергеометричного законів розподілу ймовірностей.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. За статистикою, 15% авіапасажирів змушені доплачувати за перевищення допустимої ваги багажу. Група з чотирьох співробітників, що летять у відрядження, здає речі у багаж. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості співробітників цієї групи, яким доведеться доплатити за багаж, та знайти її числові характеристики.

Завдання 2. Ймовірність браку при виробництві певної авіаційної деталі дорівнює 0,004. Для перевірки відібрано 500 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед відібраних та знайти її числові характеристики.

Завдання 3. Випускник авіаційного коледжу проходить співбесіди для працевлаштування за спеціальністю. Ймовірність отримати бажану посаду складає для нього 0,4, і він вирішив, що погодиться на першу пропозицію, яку отримає. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості співбесід, на яких побував випускник коледжу, та випадкової величини Y – кількості компаній, які йому відмовили, знайти їх числові характеристики.

Завдання 4. Протягом години у аеропорту заплановано 8 рейсів, причому 3 з них – власним літаковим парком. Навмання вибирається 5 рейсів. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості рейсів серед вибраних, які виконуються власним літаковим парком.

Завдання 5. Троє студентів складають іспит з курсу «Технічна експлуатація повітряних суден». Ймовірність скласти іспит для першого студента дорівнює 0,9, для другого 0,7, а для третього 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості студентів, які складуть іспит.

Тема 3. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План

1. Поняття неперервної випадкової величини.
2. Функція розподілу неперервної випадкової величини та її властивості.
3. Щільність розподілу неперервної випадкової величини та її властивості.
4. Числові характеристики неперервної випадкової величини.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** поняття неперервної випадкової величини, її функції розподілу та щільності розподілу, їх властивості, формули для обчислення числових характеристик випадкової величини; ***уміти:*** знаходити функцію розподілу за заданою щільністю та щільність за функцією розподілу, будувати їх графіки, обчислювати ймовірність потрапляння випадкової величини до заданого інтервалу та її числові характеристики.

Основні теоретичні відомості

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називається випадкова величина, яка може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Функцією розподілу неперервної випадкової величини X (*інтегральною* функцією) називається функція $F(x) = P(X < x),\ x \in R,$ де $P(X < x)$ – ймовірність того, що X набуде значення, меншого за x.

Властивості функції розподілу

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. Для будь-яких $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$
4. Якщо $X \in (a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
5. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
6. $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$.

Щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ (*диференціальною* функцією) неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Властивості щільності розподілу

1. $f(x) \geq 0$. 3. Умова нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

2. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$. 4. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$.

Числові характеристики НВВ

Математичне сподівання $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Дисперсія $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[M(X)\right]^2$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Приклад 1. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1; \\ \dfrac{x-1}{4}, \ 1 < x \leq 5; \\ 1, \ x > 5. \end{cases}$$

Знайти ймовірності того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалів (1;3), $(-\infty; 4)$, (1; 6), $(2; \infty)$.

Розв'язання

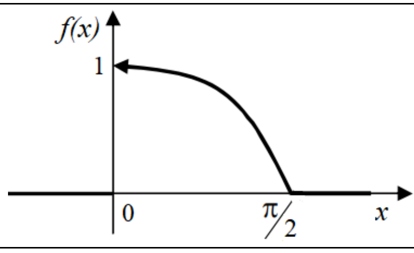
$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$	$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=\frac{3-1}{4}-0=\frac{1}{2}$
	$P(-\infty<X<4)=F(4)-F(-\infty)=\frac{4-1}{4}-0=\frac{3}{4}$
	$P(1<X<6)=F(6)-F(1)=1-0=1$
	$P(2<X<\infty)=F(\infty)-F(2)=1-\frac{2-1}{4}=\frac{3}{4}$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0; \\ A\cos x, \ 0<x\le \frac{\pi}{2}; \\ 0, \ x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A та побудувати графік функції $f\left(x\right)$; знайти ймовірність потрапляння X на інтервал $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання

Умова нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=1$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} Acosxdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0\,dx=$ $=A\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx=A\sin x\Big\|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=A\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=$ $=A=1;$
Графік функції	

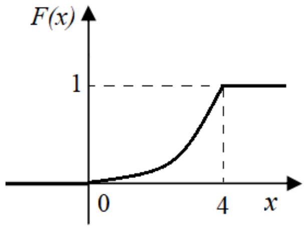
$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \cos x,\ \ 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	
Ймовірність потрапляння випадкової величини X на інтервал $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$	$P\left(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} cosxdx=\sin x\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$ $=\sin\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0,366$

Приклад 3. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \dfrac{3\sqrt{x}}{16},\ \ 0<x\le 4;\\ 0,\ x>4.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Розв'язання

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz.$	Якщо $x\le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dz=0;$ якщо $0<x\le 4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dz+$ $+\int\limits_{0}^{x}\frac{3\sqrt{z}}{16}dz=\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big\|_{0}^{x}=\frac{\sqrt{x^3}}{8};$ якщо $x>4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dz+\int\limits_{0}^{4}\frac{3\sqrt{z}}{16}dz+$ $+\int\limits_{4}^{x} 0\,dz=\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big\|_{0}^{4}=\frac{\sqrt{4^3}}{8}=1$
Графік функції $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\sqrt{x^3}}{8}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$	

Приклад 4. Випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^4}{16}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X .

Розв'язання

Щільність розподілу ймовірностей $f(x)=F'(x)$	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^3}{4}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

Математичне сподівання $M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$	$M(X)=\int_0^2 \frac{x^3}{4}xdx=\frac{1}{4}\int_0^2 x^4dx=\left.\frac{x^5}{20}\right\|_0^2=\frac{32}{20}=\frac{8}{5}=1,6;$
Дисперсія $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-$ $-\left[M(X)\right]^2$	$D(X)=\int_0^2 \frac{x^3}{4}x^2dx-1,6^2=\frac{1}{4}\int_0^2 x^5dx-\left(\frac{8}{5}\right)^2=$ $=\left.\frac{x^6}{24}\right\|_0^2-\frac{64}{25}=\frac{8}{3}-\frac{64}{25}=\frac{200-192}{75}=\frac{8}{75}$
Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$	$\sigma\left(X\right)=\sqrt{\frac{8}{75}}\approx 0,33.$

Запитання для самоперевірки

1. Яка випадкова величина називається неперервною?
2. Дати означення функції розподілу неперервної випадкової величини.
3. Сформулювати властивості інтегральної функції розподілу.
4. Дати означення щільності розподілу неперервної випадкової величини.
5. Сформулювати властивості диференціальної функції розподілу.
6. Записати формули для обчислення числових характеристик неперервної випадкової величини.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 5;\\ \frac{x-5}{3}, \ 5<x\le 8;\\ 1, \ x>8.\end{cases}$$

Знайти ймовірності того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалів: (4;7); $\left(-\infty; 6\right)$; $\left(9; \infty\right)$.

Завдання 2. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ A\sin x, \ 0<x\le\pi;\\ 0, \ x>\pi.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A та побудувати графік функції; знайти ймовірність потрапляння X на інтервал $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$.

Завдання 3. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ \frac{x^3}{4}, \ 0<x\le 2;\\ 0, \ x>2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Завдання 4. Випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{3}{4}(x^2+2x), & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти її числові характеристики.

Завдання 5. Випадкова величина X задана інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ \frac{1-\cos x}{2}, \ 0<x\le\pi;\\ 1, \ x>\pi.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Тема 4. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

План

1. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини. Числові характеристики.
2. Показниковий закон розподілу неперервної випадкової величини. Числові характеристики.

3. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини. Числові характеристики.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** основні закони розподілу неперервної випадкової величини, формули щільності розподулу та функції розподілу, математичного сподівання, дисперсії, середнього квадратичного відхилення та ймовірності влучення в інтервал; ***уміти:*** складати функцію розподілу, щільність розподілу, будувати їх графіки, знаходити основні числові характеристики неперервної випадкової величини.

Основні теоретичні відомості

Закони розподілу НВВ	
Рівномірний розподіл	*Показниковий розподіл*
Щільність розподілу НВВ X:	
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b];\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, x\geq 0.\end{cases}$
Функція розподілу НВВ X:	

<table>
<tr><td>$$F(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \frac{x-a}{b-a}, a\le x\le b;\\ 1, x>b.\end{cases}$$</td><td>$$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0.\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числові характеристики НВВ X:</td></tr>
<tr><td>$$M(X)=\frac{b+a}{2};$$ $$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$ $$\sigma(X)=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}.$$</td><td>$$M(X)=\frac{1}{\lambda};$$ $$D(X)=\frac{1}{\lambda^2};$$ $$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$
Функція надійності
$R(t)=e^{-\lambda t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ймовірність влучення НВВ X в інтервал (α,β):</td></tr>
<tr><td>$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$</td><td>$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нормальний розподіл НВВ X:</td></tr>
<tr><td>$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$</td><td>$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числові характеристики НВВ X:
$M(X)=a,\ \ D(X)=\sigma^2,\ \ \sigma(X)=\sigma.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ймовірність влучення НВВ X в інтервал (α,β):
$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$</td></tr>
</table>

Ймовірність відхилення НВВ X від математичного сподівання на величину δ: $$P(\lvert X-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$
Правило трьох сігм: Якщо НВВ X має нормальний закон розподілу з параметрами $a,\ \sigma^2$, то практично достовірно, що її значення належать інтервалу $(a-3\sigma; a+3\sigma)$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Висотомір барометричний ВД-10 застосовують для виміру висоти польоту літального апарату. Шкала висот відградуйована для тонкої стрілки від 0 до 1000 м з оцифровкою 100 м та ціною поділки 10м. Покази ВД-10 заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде допущено похибку, яка більше ніж 1м?

Розв'язання

Неперервна випадкова величина X розподілена рівномірно	*X-похибка при вимірюванні показів висотоміром ВД-10* $X\approx U(a,b)$, $a=0,\ \ b=10$
Функція розподілу НВВ X	$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 0.1x, 0\le x\le 10;\\ 1, x>10.\end{cases}$
Ймовірність влучення НВВ X в інтервал (α,β): $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$	$\alpha=1,\ \ \beta=10$ $P(1<X<10)=\dfrac{10-1}{10-0}$ $P(1<X<10)=0{,}9$
Відповідь:	$P(1<X<10)=0{,}9$

Приклад 2. Автобуси Skybus «Політ» курсують з аеропорту «Бориспіль» в нічний час з інтервалом руху 60 хв. Час очікування автобуса –випадкова величина *X,* рівномірно розподілена на цьому

інтервалі. Знай середній час очікування Skybus, дисперсію часу очікування та ймовірність того, що час очікування не перевищить 40 хв.

Розв'язання

Неперервна випадкова величина *X* розподілена рівномірно	*X-час очікування Skybus «Політ» в нічний час з аеропорту «Бориспіль»* $X \approx U(a,b)$, $a=0,\ \ b=60$
Функція розподілу НВВ *X*	$F(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ \frac{x}{60}, 0 \le x \le 60; \\ 1, x>60. \end{cases}$
Ймовірність влучення НВВ *X* в інтервал (α,β): $P(\alpha < X < \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$	$\alpha=0,\ \ \beta=40$ $P(0<X<40)=\frac{40-0}{60-0}$ $P(0<X<40)\approx 0,67$
Відповідь:	$P(0<X<40)\approx 0,67$

Приклад 3. Час обслуговування клієнта в центрі продажу авіа квитків має показниковий закон розподілу з середнім значенням 10 хв. Знайти ймовірність того, що клієнта будуть обслуговувати час, більший за середній.

Розв'язання

Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показниковим законом	*X-час обслуговування клієнта в центрі продажу авіа квитків* $X \approx E(\lambda)$
$M(X)=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{M(X)}$	$M(X)=10$ $\lambda=0,1$

Функція розподілу НВВ *X*	$F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-e^{-0.1x}, x\geq 0.\end{cases}$
Ймовірність влучення НВВ *X* в інтервал (α,β): $P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$	$\alpha=0,\ \ \beta=10$ $P(0<X<10)=e^{-0.1\cdot 0}-e^{-0.1\cdot 10}$ $P(0<X<10)=1-e^{-1}$ $P(0<X<10)\approx 0,6321$ $P(X>10)=1-P(0<X<10)$ $P(X>10)=1-0,6321$ $P(X>10)\approx 0,3679$
Відповідь:	$P(X>10)\approx 0,3679$

Приклад 4. Час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака є ВВ з показниковим законом розподілу. Визначити ймовірність безвідмовної роботи обладнання за час 10-годинного польоту, якщо середній час безвідмовної роботи становить 200год.

Розв'язання

Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показниковим законом	*X-час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака* $X\approx E(\lambda)$
$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{M(X)}$	$M(X)=200$ $\lambda=0,005$
Функція надійності: $R(t)=e^{-\lambda t}$	$t=10$ $R(10)=e^{-0,005\cdot 10}$ $R(10)=e^{-0,05}$ $R(10)\approx 0,9512$
Відповідь:	$R(10)\approx 0,9512$

Приклад 5. Тривалість відпочинку пілота після завершеної 8 год польотної зміни в середньому складає 17 год з стандартним відхиленням 1 год. Якщо кількість часу, що витрачається на

відпочинок пілота, розподіляється за нормальним законом, яка частина пілотів витрачає на відпочинок від 18 до 19 год?

Розв'язання

Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом	*X-час відпочинку пілота після завершеної 8 год польотної зміни* $X \approx N(a,\sigma)$ $a=17,\ \sigma=1$
Функція розподілу НВВ X $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$	$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-17)^2}{2}}dx$
Ймовірність влучення НВВ X в інтервал (α,β): $P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$	$\alpha=18,\ \beta=19$ $P(18 < X < 19)=\Phi\left(\dfrac{19-17}{1}\right)-$ $-\Phi\left(\dfrac{18-17}{1}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$ $\Phi(2)\approx 0,4772$ $\Phi(1)\approx 0,3413$ (дод.1) $P(18 < X < 19)\approx 0,1359$
Відповідь:	$P(18 < X < 19)\approx 0,1359$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення НВВ, розподіленої рівномірно на $[a,b]$.
2. Записати функцію розподілу рівномірно розподіленої ВВ на $[a,b]$.
3. За якими формулами обчислюють основні числові характеристики НВВ, розподіленої рівномірно на $[a,b]$?
4. Дати означення НВВ, розподіленої за показниковим законом.
5. За якими формулами обчислюють основні числові характеристики Н ВВ, розподіленої за показниковим законом?

6. Нормальний закон розподілу НВВ.

7. Як обчислити основні числові характеристики нормально розподіленої ВВ та ймовірність влучення НВВ в інтервал (α, β) ?

8. Як обчислити ймовірність відхилення НВВ Х від математичного сподівання на величину δ .

9. Сформулювати правило трьох сігм.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Організатор тендеру на поставку палива для задоволення потреб військової авіації допускає, що пропозиція ціни на авіаційне паливо для турбо-реактивних двигунів буде рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі від 50 до 60 грн/л. Знайти ймовірність того, що ціна буде вищою за 55 грн/л.

Завдання 2. Дзвінки на гарячу лінію міжнародного аеропорту нормально розподіляються з середнім значенням 6,5 хв і стандартним відхиленням 2,5 хв. Знайти ймовірність того, що дзвінок триватиме від 5 до 8 хв.

Завдання 3. Кількість клієнтів, що відвідують сайт авіаперевізника протягом доби, розподіляється за нормальним законом з середнім значенням 10000 осіб та стандартним відхиленням 2400 клієнтів. Яка ймовірність того, що протягом доби кількість відвідувачів сайту становитиме менше ніж 9000 осіб?

Завдання 4. Під час роботи деякого авіаційного приладу у випадкові моменти часу виникають аварійні несправності. Час *T* роботи приладу від його ввімкнення до його відключення розподілено за показниковим законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \ge 0. \end{cases}$$

При виникненні несправності вона миттєво виявляється та усувається. Ремонт триває час *t*, після чого прилад знову починають експлуатувати. Знайти щільність розподілу та функцію розподілу проміжку часу *T* між двома сусідніми несправностями приладу.Обчислити основні числові характеристики ВВ.

Завдання 5. Час ремонту сигналізації аварійної посадки літака розподілений за показниковим законом із середнім значенням 5 хв. Знайти ймовірність того, що ремонт сигналізації буде тривати від 5 до 15 хв.

Тема 5. СИСТЕМИ ДВОХ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ

План

1. Системи випадкових величин. Системи дискретних випадкових величин.
2. Закон розподілу системи дискретних випадкових величин. Ряди розподілу її складових.
3. Функція розподілу системи дискретних випадкових величин. Її властивості.
4. Умови незалежності складових системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Умовні розподіли.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** види систем випадкових величин, означення системи дискретних випадкових величин, поняття закону розподілу системи дискретних випадкових величин та рядів розподілу складових системи, означення і формули функції розподілу системи, числових характеристик складових системи дискретних випадкових величин, умову незалежності складових системи та коваріації та коефіцієнта кореляції системи; ***уміти:*** складати функцію розподілу, ряди розподілу складових системи дискретних випадкових величин, знаходити числові характеристики складових та умовні закони розподілу складових, знаходити кореляційний момент та коефіцієнт кореляції.

Основні теоретичні відомості

Система випадкових величин (СВВ)- це сукупність випадкових величин, що розглядаються разом.

Система дискретних випадкових величин (СДВВ)	Система неперервних випадкових величин (СНВВ)

Система дискретних випадкових величин (СДВВ)- система випадкових величин, компонентами якої є дискретні випадкові величини.

Закон розподілу СВВ (X,Y) - це співвідношення між усіма можливими значеннями (X,Y) та відповідними їм ймовірностями

Закон розподілу СДВВ (X,Y) :

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\dots$				
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Умова нормування СДВВ (X,Y):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Функція розподілу СВВ (X,Y): $F(X,Y) = P(X < x; Y < y)$	Функція розподілу СДВВ (X,Y) $F(X,Y) = \sum_{x_i < x}\sum_{y_j < y} p_{ij}$

Ряди розподілу складових СДВВ (X,Y) *:*

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_m
p_i	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j}$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{n} p_{mj}$

$Y=y_j$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
p_j	$\sum_{i=1}^{m} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} p_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} p_{in}$

Умова незалежності складових СДВВ (X,Y):

$$F(X,Y)=F_1(X)\cdot F_2(Y),$$

$F_1(X), F_2(Y)$ – безумовні функції розподілу складових $СДВВ(X,Y)$

Кореляційний момент (коваріація)	Коефіцієнт кореляції
Кореляційний момент (коваріація) $K_{XY}=Cov(X,Y)$ $K_{XY}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))]$ $K_{XY}=M(XY)-M(X)M(Y)$	*Коефіцієнт кореляції* $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ $-1<r_{XY}<1$

Умова незалежності складових СДВВ (X,Y):

$$r_{XY}=0$$

Умовні закони розподілу складових системи СДВВ (X,Y):

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)} \qquad P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{x_i}}$$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \qquad P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$$

$$i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Двом будівельним організаціям запропоновано три варіанти проекту будівництва аеропорту.
Закон розподілу СДВВ *(X,Y)* задано таблицею:

$Y=y_j$	1	2

$X = x_i$		
1	0,1	0,2
2	0,1	0,1
3	0,3	0,2

$X -$ номер проекту, $Y -$ номер організації, $p_{ij} -$ймовірність прийняття *j*- тою організацією *i*-того проекту. Знайти закони розподілу складових та функцію розподілу *F(X,Y)*. Обчислити K_{XY} .

Розв'язання

Система дискретних випадкових величин (X,Y),

$X -$ *номер проекту,* $Y -$ *номер організації,* $p_{ij} -$*ймовірність прийняття j- тою організацією i-того проекту.*

Закон розподілу СДВВ (X,Y) :

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	1	2	$\sum$
1	0,1	0,2	0,3
2	0,1	0,1	0,2
3	0,3	0,2	0,5
$\sum$	0,5	0,5	1

Умова нормування СДВВ (X,Y):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Ряди розподілу складових СДВВ (X,Y):

$X = x_i$	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

$Y = y_j$	1	2
p_j	0,5	0,5

Функція розподілу *F(X,Y):*

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	$Y \le 1$	$1 < Y \le 2$	$Y > 2$
$X \le 1$	0	0	0
$1 < X \le 2$	0	0,1	0,1+0,2=0,3
$2 < X \le 3$	0	0,1+0,1=0,2	0,2+0,2+0,1=0,5
$X > 3$	0	0,1+0,1+0,3=0,5	0,5+0,2+0,1+0,2=1

Функція розподілу *F(X,Y):*

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	$Y \le 1$	$1 < Y \le 2$	$Y > 2$
$X \le 1$	0	0	0
$1 < X \le 2$	0	0,1	0,3
$2 < X \le 3$	0	0,2	0,5
$X > 3$	0	0,5	1

$M(X) = 2,2$

$M(Y) = 1,5$

$$M(XY) = 1(1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2) + 2(1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1) + 3(1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2)$$

$$M(XY) = 3,2$$

$$K_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y)$$

$$K_{XY} = 3,2 - 2,2 \cdot 1,5 = -0,1$$

Відповідь: $K_{XY} = -0,1$

Приклад 2. Система ДВВ (*X,Y)* задана таблицею

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	2	2.4	3.6
-0,2	0,2	0,1	*A*
0	0,25	0,07	0,3

Знайти *A*. Обчислити r_{XY} .

Розв'язання

Система дискретних випадкових величин (X,Y) :

Закон розподілу СДВВ (X,Y) :

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	2	2,4	3,6
-0,2	0,2	0,1	*A*
0	0,25	0,07	0,3

Умова нормування СДВВ (X,Y):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

$$\sum p_{ij} = 1 \Rightarrow 0,2+0,1+A+0,25+0,07+0,3=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0,08$$

Закон розподілу СДВВ (X,Y) :

$X = x_i$ \ $Y = y_j$	2	2,4	3,6	$\sum$
-0,2	0,2	0,1	0,08	0,38
0	0,25	0,07	0,3	0,62
$\sum$	0,45	0,17	0,38	1

Ряди розподілу складових СДВВ (X,Y):

$X=x_i$	-0,2	0
p_i	0,38	0,62

$Y=y_j$	2	2,4	3,6
p_j	0,45	0,17	0,38

$X^2=x_i^2$	0,04	0
p_i	0,38	0,62

$Y^2=y_j^2$	4	5,76	12,96
p_j	0,45	0,17	0,38

$M(X)=-0,076$

$D(X)=0,0152-(-0,076)^2=0,009$

$\sigma(X)=\sqrt{0,009}\approx 0,0949$

$M(Y)=2,676$

$D(Y)=5,028$

$\sigma(Y)\approx 2,2423$

$M(XY)=-0,1856$

$K_{XY}=M(XY)-M(X)M(Y)$

$K_{XY}=-0,1856-(-0,076\cdot 2,676)$

$K_{XY}\approx 0,0178$

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$r_{XY}=\frac{0,0178}{0,0949\cdot 2,2423}$$

$r_{XY}\approx 0.084$

Відповідь:

$A=0,08$

$r_{XY}\approx 0,084$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення системи ВВ (X,Y) та системи ДВВ (X,Y).

2. Чому дорівнює сума всіх можливих ймовірностей таблиці розподілу СДВВ (X,Y)?

3. Дати означення функції розподілу СВВ (X,Y).

4. За якими формулами обчислюють коваріацію та коефіцієнт кореляції СДВВ (X,Y)?

5. Які закони називаються умовними законами розподілу складових СДВВ (X,Y)?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. З шести студентів НАУ, два з яких є випускниками аерокосмічного факультету за спеціальністю 272.2 «Льотна експлуатація повітряних суден», три - за спеціальністю 272.1 «Технічне обслуговування та ремонт повітряних судент» та один- за спеціальністю 134 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», авіакомпанія обирає на роботу лише двох. Ймовірність працевлаштування для кожного студента вважається однаковою. ВВ $X-$ кількість обраних студентів спеціальності 272.1, а $Y-$ кількість обраних студентів спеціальності 272.2. Скласти закон розподілу СДВВ (X,Y). Знайти закони розподілу X та Y, функції розподілу складових та функцію розподілу СДВВ (X,Y).

Завдання 2. Два пілота авіакомпанії незалежно один від одного отримали іпотечний кредит. Перший –в іноземній валюті, а другий – в національній. Ймовірність несвоєчасного повернення кредиту для першого пілота складає 0,2, а для другого-0,3 відповідно. Визначити СДВВ (X,Y):

$X=1-$перший співробітник не повернув кредит своєчасно;

$X=0-$ перший співробітник повернув кредит своєчасно;

$Y=1-$ другий співробітник не повернув кредит своєчасно;

$Y=0-$ другий співробітник повернув кредит своєчасно.

Скласти закон розподілу СДВВ (X,Y), функції розподілу складових та функцію розподілу СДВВ (X,Y).

Завдання 3. Система ДВВ (X,Y) задана таблицею:

$Y = y_j$ / $X = x_i$	-0,3	0	2,4
0,1	0,22	A	0,10
1	0,26	0,14	0,12

Обчислити K_{XY} .

Завдання 4. Система ДВВ (*X,Y)* задана таблицею:

$Y = y_j$ / $X = x_i$	20	40	60
10	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
20	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
30	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

Обчислити r_{XY} .

Тема 6. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

План

1. Нерівності Чебишова.
2. Теорема Чебишова.
3. Закон великих чисел у формі Бернуллі.
4. Центральна гранична теорема.

Література: [1]; [2]; [3]; [4]; [5], [6], [7], [8]; [9]; [10]; [11].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 студент повинен ***знати:*** нерівності та теорему Чебишова, закон великих чисел у формі

Бернуллі, центральну граничну теорему; ***уміти:*** застосовувати нерівності та теореми при розв’язанні практичних задач.

Основні теоретичні відомості

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Закон великих чисел</td></tr>
<tr><td align="center">Нерівність Маркова</td><td align="center">Нерівності Чебишова</td></tr>
<tr><td>Якщо ВВ $X(X \ge 0)$ і має скінченне математичне сподівання, то для будь-якого $\varepsilon > 0$:
$$P(X < \varepsilon) \ge 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$
$$P(X \ge \varepsilon) \le \frac{M(X)}{\varepsilon}$$</td><td>Якщо ВВ X має скінченні математичне сподівання і дисперсію, то для будь-якого $\varepsilon > 0$:
$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$
$$P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> Теорема Бернуллі: Якщо m-кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, p-ймовірність появи події A в кожному з цих випробувань, то для будь-якого $\varepsilon > 0$:
$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> Закон великих чисел в формі Чебишова: Якщо послідовність попарно незалежних ВВ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, які мають скінченні математичні сподівання та обмежені дисперсії $D(X_i) \le C$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$:
$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$</td></tr>
</table>

Гранична рівність:	
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right\| < \varepsilon\right) = 1$$	$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right\| < \varepsilon\right) = 1,$$ якщо $M(X_1) = M(X_2) = \ldots =$ $= M(X_n) = \ldots = a$
Гранична рівність: $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{m}{n} - p\right\| < \varepsilon\right) = 1$$	
Центральна гранична теорема: Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ - незалежні ВВ, що мають один і той же закон розподілу з математичним сподіванням *a* і дисперсією σ^2 , то при необмеженому зростанні *n* закон розподілу суми $$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$ необмежено наближається до нормального.	

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Середня кількість викликів, які поступають до довідкового центру аеропорту, дорівнює 300. Оцінити ймовірніть того, що протягом 1 год число викликів 1) буде не менше 400; 2) буде менше 500.

Розв'язання

Випадкова величина *X*	*Кількість викликів, які поступають до довідкового центру аеропорту*
1) $$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$	$M(X) = 300$ $\varepsilon = 400$ $$P(X \geq 400) \leq \frac{300}{400}$$

	$P(X \geq 400) \leq 0.75$
2) $P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$	$M(X) = 300$ $\varepsilon = 500$ $P(X < 500) \geq 1 - \frac{300}{500}$ $P(X < 500) \geq 0,4$
Відповідь:	1) $P(X \geq 400) \leq 0,75$ 2) $P(X < 500) \geq 0,4$

Приклад 2. Математичне сподівання річної кількості опадів в місцевості, де знаходиться аеродром, дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в даній місцевості випаде не менше ніж 80 см опадів за рік.

Розв'язання

Випадкова величина *X*	*Річна кільксть опадів в місцевості, де знаходиться аеродром*
$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$	$M(X) = 55$ $\varepsilon = 80$ $P(X \geq 400) \leq \frac{55}{80}$ $P(X \geq 400) \leq 0,6875$
Відповідь:	$P(X \geq 400) \leq 0,6875$

Приклад 3. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання курсу літака σ (*X*) = 1,5°. Вважаючи математичне сподівання похибки вимірювання рівним нулю, оцініть ймовірність того, що похибка при даному вимірюванні курсу літака буде:
1) менше 4°; 2) не менше 5°.

Розв'язання

Випадкова величина *X*	*Похибка вимірювання курсу літака*

$M(X)=0$ σ (X) = 1,5°	$D(X)=1{,}5^2=2{,}25$
1) $P(\lvert X-M(X)\rvert<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$	$\varepsilon=4$ $P(\lvert X\rvert<4)\geq 1-\dfrac{2{,}25}{4^2}$ $P(\lvert X\rvert<4)\geq 1-\dfrac{2{,}25}{4^2}$ $P(\lvert X\rvert<4)\geq 0{,}859$
2) $P(\lvert X-M(X)\rvert\geq\varepsilon)\leq\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$	$\varepsilon=5$ $P(\lvert X\rvert\geq 5)\leq\dfrac{2.25}{5^2}$ $P(\lvert X\rvert\geq 5)\leq 0{,}09$
Відповідь:	1) $P(\lvert X\rvert<4)\geq 0{,}859$ 2) $P(\lvert X\rvert\geq 5)\leq 0{,}09$

Приклад 4. У кожному польоті літак може зустрітися з грозою із імовірністю 0,05. Оцініть ймовірність того, що на 10 000 польотів зустріч з грозою відбудеться більше ніж у 100 польотах і менше ніж у 900.

Розв'язання

Випадкова величина X	Кількість польотів, в яких літак зустрінеться з грозою
$n=10000$ $p=0{,}05$ $q=0{,}95$ $100\leq m\leq 900$	$0{,}01\leq\dfrac{m}{n}\leq 0{,}09$ $-0{,}04\leq\dfrac{m}{n}-p\leq 0{,}04$ $\varepsilon=0{,}04$ $\left\lvert\dfrac{m}{n}-p\right\rvert<0{,}04$

$P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$	$P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|<0,04\right)\geq 1-\frac{0,05\cdot 0,95}{10\,000\cdot 0,04^2}$ $P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|<0,04\right)\geq 0,997$
Відповідь:	$P\left(\left\|\frac{m}{n}-p\right\|<0,04\right)\geq 0,997$

Приклад 5. Заробітня плата за місяць співробітника клінінгу в аеропорту «Бориспіль» становить у середньому 10 тис. грн із середнім квадратичним відхиленням 2 тис. грн. Знайти ймовірність того, що середній дохід 100 випадково відібраних співробітників клінінгу становить від 9,5 до 10.5 тис. грн.

Розв'язання

Випадкова величина $X_i, \quad (i=1,...,100)$	*Дохід i-того співробітника клінінгу аеропорту «Бориспіль»*
Сумарний дохід $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$	$n=100 \quad a=10 \quad \sigma=2 \quad S_{100}=\sum_{i=1}^{100} X_i$
Межі сумарного доходу S_1, S_2	$S_1=9,5\cdot 100=950$ $S_2=10,5\cdot 100=1050$
$P(S_1<X<S_2)\approx\Phi\left(\frac{S_2-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$ $-\Phi\left(\frac{S_1-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)$	$\Phi\left(\frac{1050-1000}{2\sqrt{100}}\right)-$ $-\Phi\left(\frac{950-1000}{2\sqrt{100}}\right)=$ $=2\Phi(2,5)$ (дод. 2) $P(950<X<1050)\approx 0,988$
Відповідь:	$P(950<X<1050)\approx 0,988$

Запитання для самоперевірки

1. Записати нерівність Маркова.

2. Який вигляд має нерівності Чебишова?

3. Сформулювати теорему Чебишова.

4. Записати формулювання теореми Бернуллі.

5. Центральна гранична теорема встановлює умови, за яких граничним законом є:

1) показниковий розподіл;

2) нормальний розподіл;

3) біноміальний розподіл.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Сума всіх внесків у відділенні банку становить 2 млн грн, а ймовірність того, що навмання вибраний внесок не перевищує 10 тис. грн, становить 0,6. Що можна сказати про кількість внесків вкладників банку?

Завдання 2. Середнє число сонячних днів в місцевості, де знаходиться аеродром, дорівнює 110. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що в даній місцевості буденe менше 180 сонячних днів за рік.

Завдання 3 . Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної авіаційної запчастини від ймовірності її появи 0,9 не більш ніж на величину $\varepsilon = 0{,}01$при контролі 100 запчастин.

Завдання 4. Авіаційний прилад складається з 20 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0.02. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом відмов за час T виявиться більше чотирьох.

Завдання 5. В банкоматі «ПриватБанку» в терміналі *A* міжнародного аеропорту «Бориспіль» залишилась сума 3500 грн. У черзі на отримання грошей 5 власників платіжних карток банку. Сума *X*, яка буде запрошена окремим клієнтом на видачу- це випадкова величина з середнім значенням 800 грн і середнім квадратичним відхиленням 240 грн. Яка ймовірність того, що суми грошей, що залишилася в банкоматі, вистачить усім клієнтам, що стоять в черзі на отримання грошей.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,47	0,1808	0,94	0,3264	1,41	0,4207
0,01	0,0040	0,48	0,1844	0,95	0,3289	1,42	0,4222
0,02	0,0080	0,49	0,1879	0,96	0,3315	1,43	0,4236
0,03	0,0120	0,50	0,1915	0,97	0,3340	1,44	0,4251
0,04	0,0160	0,51	0,1950	0,98	0,3365	1,45	0,4265
0,05	0,0199	0,52	0,1985	0,99	0,3389	1,46	0,4279
0,06	0,0239	0,53	0,2019	1,00	0,3413	1,47	0,4292
0,07	0,0279	0,54	0,2054	1,01	0,3438	1,48	0,4306
0,08	0,0319	0,55	0,2088	1,02	0,3461	1,49	0,4319
0,09	0,0359	0,56	0,2123	1,03	0,3485	1,50	0,4332
0,10	0,0398	0,57	0,2157	1,04	0,3508	1,51	0,4345
0,11	0,0438	0,58	0,2190	1,05	0,3531	1,52	0,4357
0,12	0,0478	0,59	0,2224	1,06	0,3554	1,53	0,4370
0,13	0,0517	0,60	0,2257	1,07	0,3577	1,54	0,4382
0,14	0,0557	0,61	0,2291	1,08	0,3599	1,55	0,4394
0,15	0,0596	0,62	0,2224	1,09	0,3621	1,56	0,4406
0,16	0,0636	0,63	0,2357	1,10	0,3643	1,57	0,4418
0,17	0,0675	0,64	0,2389	1,11	0,3665	1,58	0,4429
0,18	0,0714	0,65	0,2422	1,12	0,3686	1,59	0,4441
0,19	0,0753	0,66	0,2454	1,13	0,3708	1,60	0,4452
0,20	0,0793	0,67	0,2486	1,14	0,3729	1,57	0,4418
0,21	0,0832	0,68	0,2517	1,15	0,3749	1,58	0,4429
0,22	0,0871	0,69	0,2549	1,16	0,3770	1,59	0,4441
0,23	0,0910	0,70	0,2580	1,17	0,3790	1,60	0,4452
0,24	0,0948	0,71	0,2611	1,18	0,3810	1,61	0,4463
0,25	0,0987	0,72	0,2642	1,19	0,3830	1,62	0,4474
0,26	0,1026	0,73	0,2673	1,20	0,3849	1,63	0,4484
0,27	0,1064	0,74	0,2703	1,21	0,3869	1,64	0,4495
0,28	0,1103	0,75	0,2734	1,22	0,3883	1,65	0,4505
0,29	0,1141	0,76	0,2764	1,23	0,3907	1,66	0,4515
0,30	0,1179	0,77	0,2794	1,24	0,3925	1,67	0,4525
0,31	0,1217	0,78	0,2823	1,25	0,3944	1,68	0,4535
0,32	0,1255	0,79	0,2852	1,26	0,3962	1,69	0,4545
0,33	0,1293	0,80	0,2881	1,27	0,3980	1,70	0,4554
0,34	0,1331	0,81	0,2910	1,28	0,3997	1,71	0,4564
0,35	0,1368	0,82	0,2939	1,29	0,4015	1,72	0,4573
0,36	0,1406	0,83	0,2967	1,30	0,4032	1,73	0,4582
0,37	0,1443	0,84	0,2995	1,31	0,4049	1,74	0,4591
0,38	0,1480	0,85	0,3023	1,32	0,4066	1,75	0,4599
0,39	0,1517	0,86	0,3051	1,33	0,4082	1,76	0,4608
0,40	0,1554	0,87	0,3078	1,34	0,4099	1,77	0,4616
0,41	0,1591	0,88	0,3106	1,35	0,4115	1,78	0,4625
0,42	0,1628	0,89	0,3133	1,36	0,4131	1,79	0,4633
0,43	0,1664	0,90	0,3159	1,37	0,4147	1,80	0,4641
0,44	0,1700	0,91	0,3186	1,38	0,4162	1,81	0,4649
0,45	0,1736	0,92	0,3212	1,39	0,4177	1,82	0,4656
0,46	0,1772	0,93	0,3238	1,40	0,4192	1,83	0,4664

Закінчення дод. 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,84	0,4671	2,06	0,4803	2,44	0,4927	2,82	0,4976
1,85	0,4678	2,08	0,4812	2,46	0,4931	2,84	0,4977
1,86	0,4686	2,10	0,4821	2,48	0,4934	2,86	0,4979
1,87	0,4693	2,12	0,4830	2,50	0,4938	2,88	0,4980
1,88	0,4699	2,14	0,4838	2,52	0,4941	2,90	0,4981
1,89	0,4706	2,16	0,4846	2,54	0,4945	2,92	0,4982
1,90	0,4713	2,18	0,4854	2,56	0,4948	2,94	0,4984
1,91	0,4719	2,20	0,4861	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,92	0,4726	2,22	0,4868	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,93	0,4732	2,24	0,4875	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,94	0,4738	2,26	0,4881	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,95	0,4744	2,28	0,4887	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,96	0,4750	2,30	0,4893	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,97	0,4756	2,32	0,4898	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,98	0,4761	2,34	0,4904	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,74	0,4969	5,00	0,499997
2,00	0,4772	2,38	0,4913	2,76	0,4971		
2,02	0,4783	2,40	0,4918	2,78	0,4973		
2,04	0,4793	2,42	0,4922	2,80	0,4974		

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ластівка І.О.* Математика для економістів: навч. посіб. У 3 ч. Ч. 3. Теорія ймовірностей і математична статистика / І.О. Ластівка, В.В. Михайленко. – К.: НАУ, 2012. – 272 с.

2. *Михайленко В. В.* Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / В. В. Михайленко, І. О. Ластівка. – К.: НАУ, 2013. – 564 с.

3. *Ластівка І.О.* Вища математика. Модуль 9. Теорія ймовірностей. Випадкові величини. Навч. посібник / І.О. Ластівка, В.П. Мартиненко, Ю.А. Паламарчук, І.В. Шевченко // К. : НАУ, 2007. – 164 с.

4. *Ластівка І.О., Паламарчук Ю.А.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Практикум для студентів економічних спеціальностей. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2009. – 236 с.

5. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

6. *Жильцов О.Б.* Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

7. *Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б.* Теорія ймовірностей: Підручник – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.

8. *Барковський В. В.* Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К.: ЦУЛ, 2002. – 448 с.

9. *Дорош А. К.* Теорія ймовірностей та математична статистика / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 268 с.

10. *Каніовська І. Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / І. Ю. Каніовська. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", ТОВ "Фірма «Періодика»", 2004. – 156 с.

11. *Малютіна Т. І.* Вища математика для економістів. Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика: практикум: у 4 ч. / Т. І. Малютіна, К. А. Дахер; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми: ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 159 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
КУДЗІНОВСЬКА Інна Павлівна
КРАВЧЕНКО Вікторія Валеріївна