

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ АЕРОНАВІГАЦІЇ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ  
КАФЕДРА АВІОНІКИ

ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ  
Завідувач випускової кафедри  
\_\_\_\_\_ С.В. Павлова  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

## ДИПЛОМНА РОБОТА

(ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)

ВИПУСКНИКА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ БАКАЛАВРА  
ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ 173 «АВІОНІКА»

Тема: «Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленням  
обчислювачем пристрою»

Виконавець: \_\_\_\_\_ Школьний Євгеній Ігорович \_\_\_\_\_  
(студент, група, прізвище, ім'я, по батькові)

Керівник: \_\_\_\_\_ к.т.н., Положевець Ганна Андріївна \_\_\_\_\_  
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по батькові)

Нормоконтролер: \_\_\_\_\_ В.В.Левківський \_\_\_\_\_  
(підпис) (П.І.Б.)

Київ 2021

# НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет аеронавігації, електроніки та телекомунікацій

Кафедра авіоніки

Спеціальність 173 «Авіоніка»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Павлова С.В.

(підпис)

(П.І.Б.)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

## ЗАВДАННЯ

### на виконання дипломної роботи

Школьного Євгенія Ігоровича

1. Тема дипломної роботи: «Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою»

затверджена наказом ректора від «22» березня 2021 р. №469 /ст

2. Термін виконання роботи: 17 травня 2021 по 20 червня 2021.

3. Вихідні дані до роботи: дані про дослідження засобів визначення параметрів навігації та орієнтації повітряного судна в просторі за допомогою безплатформних інерціальних систем.

4. Зміст пояснювальної записки: Розділ 1: Класифікація та фізичні основи інерціальних систем, платформні інерціальні системи; Розділ 2: Безплатформні інерціальні системи; Розділ 3: Методи оптимальної фільтрації похибок в системах ІНС.

5. Перелік обов'язкового графічного матеріалу: рисунки, таблиці.

6. Календарний план-графік

№ пор.	Завдання	Термін Виконання	Відмітка про виконання
1	Підбір матеріалу за темою ДР		виконано
2	Проведення аналізу та опрацювання матеріалу розділу 1		виконано
3	Проведення аналізу та опрацювання матеріалу розділу 2		виконано
4	Проведення аналізу та опрацювання матеріалу розділу 3		виконано
5	Оформлення пояснювальної записки		виконано

7. Дата видачі завдання «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 р.

Керівник дипломної роботи \_\_\_\_\_

(підпис керівника)

(П.І.Б.)

Завдання прийняв до виконання \_\_\_\_\_

(підпис студента)

(П.І.Б.)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до дипломної роботи «Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою» складає: 85 сторінок та містить 63 рисунків і 18 використаних джерел.

Ключові слова: НАВІГАЦІЯ, ПІЛОТАЖНО-НАВІГАЦІЙНИЙ КОМПЛЕКС, КУРС, КРЕН, ТАНГАЖ, АКСЕЛЕРОМЕТР, ІНЕРЦІАЛЬНА КУРСОВЕРТИКАЛЬ, БЕЗПЛАТФОРМНА ІНЕРЦІАЛЬНА СИСТЕМА, ПЛАТФОРМНА ІНЕРЦІАЛЬНА СИСТЕМА, АЛГОРИТМ.

Об'єкт дослідження: процес визначення параметрів та способів навігації та орієнтації повітряного судна у просторі, інерціальні навігаційні системи.

Предмет дослідження: параметри та способи навігації.

Мета дослідження: розробка та приведення прикладу оптимальної фільтрації похибок алгоритмів безплатформної-інерціальної системи.

Методи дослідження: математичне моделювання, дослідження складних систем, методи ефективності роботи технічних засобів здійснення та визначення показників польоту та просторового положення.

Прогнозні припущення щодо розвитку об'єкта дослідження: подальше вдосконалення інерціально навігаційних систем, що неминуче призведе до значного підвищення надійності, точності, вміння професійного обслуговування пілотажно-навігаційної техніки.

# ЗМІСТ

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

## ВСТУП

## РОЗДІЛ 1. Класифікація та фізичні основи інерціальних систем

- 1.1. Принцип дії та методичні похибки акселерометрів
- 1.2. Класифікація, принципи побудови і роботи гіростабілізаторів
- 1.3. ІНС напіваналітичного типу
- 1.4. ІНС геометричного типу

## РОЗДІЛ 2. Безплатформні інерціальні навігаційні системи

- 2.1. Основні дані та принципи побудови
- 2.2. Алгоритми БІНС в інерціальній системі координат
- 2.3. Початкова виставка БІНС

## РОЗДІЛ 3. Методи оптимальної фільтрації похибок в системах ІНС

- 3.1. Метод формування вимірювань для компенсації похибок автономної ІНС
- 3.2. Оптимальний фільтр Калмана
- 3.3. Адаптивний фільтр Калмана, фільтр Язвінського та компактний алгоритм фільтрації
- 3.4. Безплатформна інерціальна навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою

## ВИСНОВКИ

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

## **ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ**

ІНС – інерціально-навігаційна система

ГСП – гіростабілізована платформа

ІКВ – інерціальна курсовертикаль

СНС – супутникові навігаційні системи

ДУС – датчик кутової швидкості

БІНС – безплатформна інерціальна система

НС – навігаційна система

ІВБ – інерціальні вимірювальні блоки

ІП – інструментальні похибки

ЧЕ – чутливий елемент

СК – система координат

СНС – супутникова навігаційна система

## ВСТУП

Під час польоту пілотові необхідно чітко орієнтуватися в просторі для виконання поставленого завдання. Для визначення місця літака в просторі необхідна якась система, яка визначала б положення літака відносно земної поверхні, а також кутове положення ЛА в обраній системі координат. Ці завдання в повному обсязі вирішують різні типи НС.

НС тісно пов'язана з іншими системами і комплексами ЛА і використовує електричні сигнали, пропорційні параметрам навколишнього середовища, отримані іншими системами і датчиками (СВС, ДІСС, РСБН).

Без цієї системи немислимо управляти сучасними ЛА, і за допомогою старань розробників вона органічно вписана в електрообладнання повітряних суден.

Політ літака по заданому маршруту поза видимості Землі можливий тільки за приладами, які могли б показувати положення літака відносно горизонту і визначати його курс і координати в системі координат, пов'язаної з Землею. В цьому випадку дуже важливі такі поняття, як траєкторія і маршрут польоту.

Положення літака щодо горизонту і його курс визначаються приладами, які в сукупності утворюють єдиний пілотажно-навігаційний комплекс.

Навігаційні системи являють собою централізовані пристрої, що поєднують індукційні (магнітні), гіроскопічні, астрономічні і радіотехнічні засоби вимірювання параметрів польоту. У навігаційних системах автоматизується процес корекції помилок окремих компасних датчиків і знижується загальний рівень помилок до мінімального значення; поліпшуються динамічні властивості курсової системи в цілому і полегшується аналіз вихідної інформації. Вони мають підвищену перешкодозахищеність і володіють достатньою автономністю застосування. Тому ця тема надзвичайно актуальна.

Як триступеневі, так і двоступеневі гіроскопи спочатку примінялись на літаках в якості індикаторних приладів, потім з появленням автопілотів вони стали широко застосовуватися в них в якості чутливих елементів. Для виконання цих функцій гіроскопи забезпечуються датчиками, що перетворюють кутові переміщення літака і гіроскопа в сигнали електричного струму або перепаду тисків.

З розвитком літаків виникла необхідність в створенні платформ, які зберігали б незмінним своє положення у просторі незалежно від обертання літака або ракети, на яких вони встановлюються. У практиці найбільш придатними для цих цілей виявилися платформи, стабілізовані гіроскопами.

Навігаційні системи сучасних літаків є комплексними, вони складаються з ряду взаємопов'язаних підсистем, реалізуючих різні методи і способи навігації.

Термін «навігація» може бути переведений як мистецтво кораблеводіння. В даний час під навігацією розуміють теорію і практику водіння по заданому маршруту таких рухомих об'єктів як літаки, ракети, морські судна, підводні човни, космічні апарати. Під навігацією в вузькому сенсі слова розуміється рішення навігаційного завдання, тобто визначення поточних координат місця розташування об'єкта. Під навігацією в широкому сенсі слова розуміють рішення навігаційного завдання та використання добутої інформації для управління центром мас об'єкта. У моєму дипломному проекті буде розглядатися тільки рішення навігаційного завдання, як основна мета мого навчання та розуміння пілотажно-навігаційних комплексів.

Навігація, здійснювана автономними засобами, тобто на основі інформації, яка вимірюється тільки на борту об'єкта акселерометрами, гіроскопами і годинниками, називається інерціальною. Основна ідея інерціальної навігації - це дворазове інтегрування вимірних прискорень. Прискорення носить абсолютний характер. Спостерігач, який знаходиться всередині об'єкта, виявить прискорений рух завдяки тому, що на нього буде діяти сила інерції. Всі вимірювальні пристрої, засновані на різних



фізичних принципах (механічних, оптичних), будуть реагувати на силу інерції і тим самим встановлять факт прискороного руху об'єкта без залучення будь-якої зовнішньої інформації. Таким чином, інерційний спосіб визначення місця розташування об'єкта можна уподібнити властивості годинників і хронометрів вимірювати час незалежно від контактів із зовнішнім світом. Іншими словами, принципи інерціальної навігації засновані на фізичних законах, що діють у Всесвіті, незалежно від установлених людиною зв'язків із зовнішнім середовищем.

Фізичні явища, пов'язані з інерцією тіл і використовуються в інерціальній навігації, підпадають під дію законів механіки, які справедливі по відношенню до інерціальної системи координат. У інерціальних навігаційних системах виробляється штучна матеріалізація інерційної координатної системи з точністю до приладових помилок відповідних пристроїв. Цим, мабуть, і пояснюється походження терміну «інерціальна навігація».

Тож, в цій роботі будуть розглянуті інерціально-навігаційні системи літальних апаратів, в тому числі платформні та безплатформні навігаційні системи.

## РОЗДІЛ 1. Класифікація та фізичні основи інерціальних систем

З усіх навігаційних систем інерціальні навігаційні системи (ІНС) є єдиними, які задовольняють таким важливим вимогам, як універсальність, повна автономність, завадозахищеність та стійкість перед перешкодами. Наявні ІНС забезпечують більш високу точність навігації в порівнянні з повітряно-доплерівськими системами.

Крім обчислення поздовжньої і поперечної координат, ІНС визначає також кутове положення ЛА в обраній системі координат, тобто курс, крен, тангаж. Кутове положення визначається шляхом вимірювання відхилень ЛА від обраної системи координат в ІНС. Залежно від способу моделювання (запам'ятовування), ІНС поділяються на платформні і безплатформні. В платформних ІНС навігаційна система координат моделюється фізично - у вигляді орієнтації по трьох осях спеціальної гіростабілізованої платформи (ГСП). ГСП протягом усього робочого часу зберігає незмінною орієнтацію, задану в процесі підготовки (виставки) ІНС. Датчики основної інформації (акселерометри) встановлюються на ГСП.

У безплатформної ІНС акселерометри встановлюються безпосередньо на ЛА, а опорна система координат моделюється математично. Так як акселерометри обертаються разом з ЛА, то необхідний безперервний перерахунок значень прискорень з пов'язаною з ЛА обертовою системою координат в опорну нерухому систему координат. Алгоритми перерахунку вимагають, крім значень прискорень, додаткову інформацію - значення кутових швидкостей обертання ЛА. Останні визначаються за допомогою двоступеневих гіроскопів з внутрішнім кардановим підвісом. Складність алгоритмів і великий обсяг обчислень вимагають наявності потужної, швидкодійної і власної великий об'єм пам'яті БЦВМ. Серед платформних ІНС слід виділити найбільш простіший їх тип - так звані інерціальні курсовертикалі (ІКВ). У ІКВ-системі застосовуються спрощені алгоритми обчислення і управління і більш прості датчики і елементи, внаслідок чого прийнятна точність досягається лише у визначенні курсу, крену і тангажу. У ІНС, які вирішують навігаційні завдання, ІКВ також присутні. Але в цьому випадку ІКВ є не окремою системою, а основною складовою частиною всієї ІНС, що містить ГСП. Нижче будемо розглядати тільки платформні ІНС.

Принцип побудови елементарної ІНС, що визначає лінійні і географічні координати, розглянемо на (Рис.1.1).

Кафедра авіоніки								
Виконав	Школьніий С.І.			Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою	Літ.	Арк.	Акрушіє	
Керівник	Положевець Г.А.				1	8	10	85
Консульт.					<b>173 «Авіоніка»</b> 10			
Н-контр.	Левківський В.В.							
Зав. каф.	Павлова С.В.							

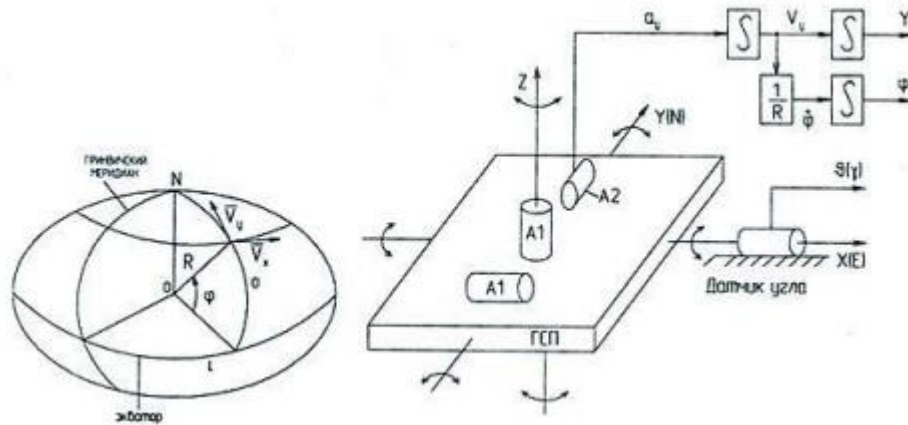


Рис.1.1. Принцип побудови ІНС

З рисунка видно, що ГСП має 3 ступеня свободи. У вузлах підвісу ГСП розміщені датчики курсу, крену, тангажу (на рис.1.1. зображено лише один з них). Поздовжня вісь ГСП найчастіше орієнтується на північ. Лінійні координати ЛА формуються шляхом подвійного інтегрування сигналів акселерометрів, а географічні – інтегруванням сигналу кутової швидкості руху ЛА навколо Землі. Сигнал кутового зміщення ЛА з'являється на виході датчика кута при будь-якому обертанні ЛА навколо нерухомої осі підвісу ГСП.

Власне, суть інерціального числення полягає в вимірюванні за допомогою акселерометрів, складових вектора прискорення центру мас ЛА, обумовленого негравітаційними силами, і в наступному дворазовому інтегруванні цих складових з урахуванням початкових умов і прискорень, викликаних гравітацією, силами інерції Коріоліса і відцентровими силами.

### 1.1. Принцип дії та методичні похибки акселерометрів

Розглянемо сферичну модель Землі, в якій положення деякої точки  $O$  задається сферичними координатами: широтою  $\varphi$ , довготою  $\lambda$  і висотою  $h$ . Введемо нормальну систему координат  $OX_g Y_g Z_g$  з вершиною, суміщеною з центром мас об'єкта, вісь  $OX_g$  яка спрямована на північ, вісь  $OZ_g$  - на схід, а вісь  $OY_g$  – уздовж вертикалі місця вгору (рис.1.2).

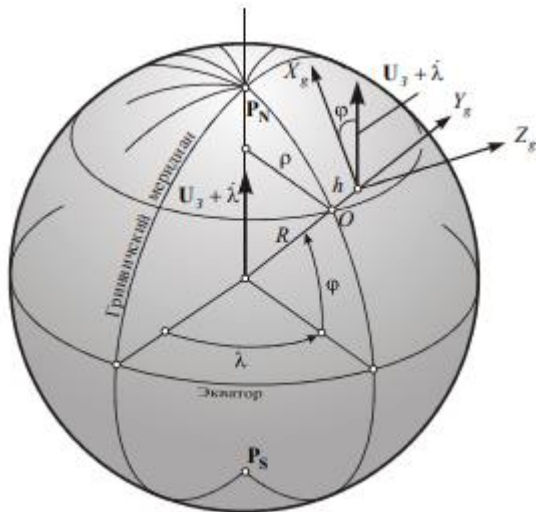


Рис.1.2. Географічні координати точки

Осі нормальної системи координат орієнтовані по країнах світу, а точка  $O$  переміщається разом з об'єктом, тому така система координат називається також географічною або географічним супроводженням, який дає тригранник.

Нехай точка  $O$  переміщається з лінійною швидкістю  $V$  щодо поверхні Землі. Проекції вектора  $V$  на осі  $OX_g, OY_g, OZ_g$  позначимо  $V_{Xg}, V_{Yg}, V_{Zg}$ . При русі об'єкта вздовж паралелі, широта  $\varphi$  залишається постійною, а географічна система координат повертається навколо осі обертання Землі з кутовою швидкістю  $\lambda$  (Рис.1.3.а,б).

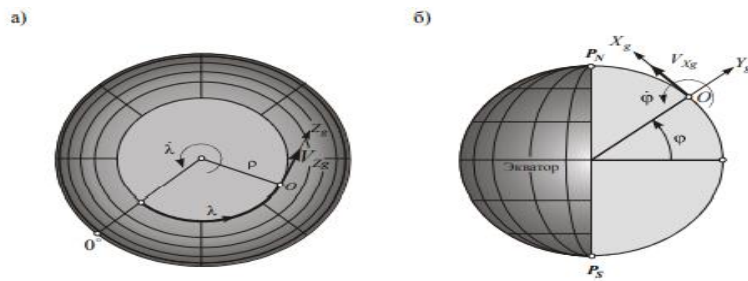


Рис.1.3. Ілюстрація кутових швидкостей  $\lambda$ (а) і  $\varphi$ (б)

Датчиками первинної інерційної інформації є вимірювачі прискорень - акселерометри, засновані на законах класичної механіки Ньютона. Акселерометрами називають прилади, призначені для вимірювання поступальних прискорень.

У найпростішому випадку акселерометр являє собою комбінацію пружини і інерційної маси, що є чутливим елементом. Чутливий елемент акселерометра - частина першого в вимірювальному ланцюзі перетворювального елемента, що знаходиться під безпосередньою дією прискорення.

Акселерометр з лінійним переміщенням чутливого елемента в системі координат жорстко пов'язаної з корпусом приладу називається осьовим акселерометром (рис.1.4). Акселерометр з кутовим переміщенням чутливого елемента називається маятникових.

Вимірювальна вісь акселерометра - пряма визначається конструкцією акселерометра, проекція прискорення на яку вимірюється акселерометром.

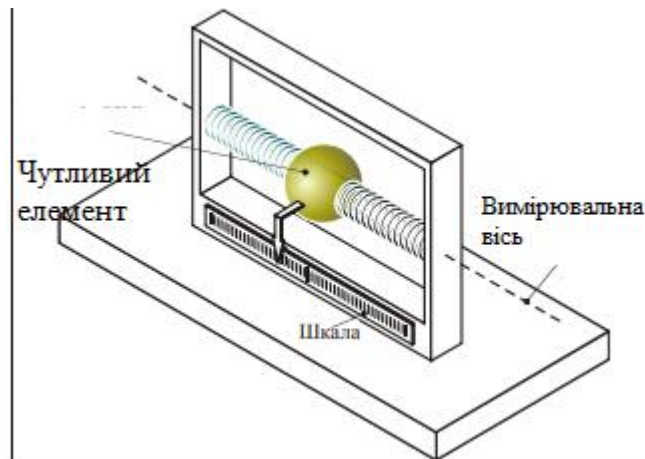


Рис.1.4. Схема осьового акселерометра

Найпростіший осьовий акселерометр (рис. 1.5.) складається з інерційної маси  $m$ , за допомогою пружини прикріпленої до основи. При русі підстави в напрямку осі  $X$ , званою віссю чутливості акселерометра, з прискоренням  $a^k$  до маси  $m$  буде прикладена сила інерції.

$F = m \cdot a^k$ , в результаті чого маса стане переміщатися щодо відповідно шкали в напрямку, протилежному вектору прискорення. З боку пружини на масу буде діяти зворотна по знаку силі  $F$  сила

$$F_{np} = K_{np} \cdot \Delta X,$$

де  $K_{np}$  - коефіцієнт жорсткості пружини;  $\Delta X$  - лінійна величина переміщення маси.

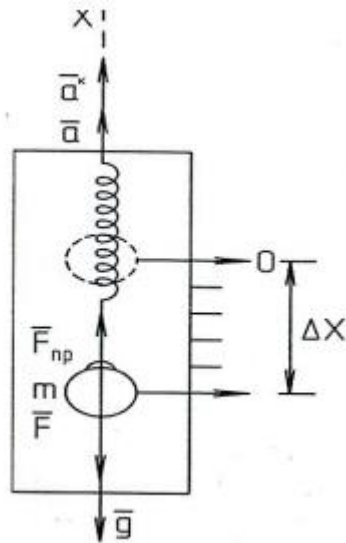


Рис.1.5. Принцип роботи акселерометра

Після закінчення перехідного процесу сила  $F_{np}$  врівноважить силу  $F$ , при цьому величина  $\Delta X$  виявляється пропорційною вимірюваному прискоренню:

$$\Delta X = \frac{m}{K_{np}} a^k.$$

За допомогою потенціометра значення  $\Delta X$  може бути перетворено в електричний сигнал, пропорційний  $a^k$ .

Акселерометри вимірюють тільки прискорення, обумовлені дією негравітаційних сил, і не вимірюють прискорень, викликаних гравітацією. Дійсно, якщо опора, на якому встановлений акселерометр, рухається до землі з прискоренням сили тяжіння  $g$  (вважаємо, що  $a^k = 0$ ), то, оскільки сила тяжіння однаково діє і на підставу, і на масу  $m$  акселерометра, переміщення маси щодо нульової позначки шкали не буде.

якщо  $a^k$  - прискорення, створюване різницею сил тяги і лобового опору, то повне абсолютне прискорення підстави буде  $a = a^k - (-g)$ . Знак "-" перед  $g$  враховує від'ємний напрям вектора  $g$  по осі  $X$ . Акселерометр ж вимірює тільки прискорення  $a^k$ , то матиме місце методична похибка у вимірі повного абсолютного прискорення, що дорівнює прискоренню сили тяжіння. Тому в загальному випадку використання інерційних систем можливо тільки в відомому полі гравітації. Прискорення  $a^k$ , що вимірюється акселерометром, часто називають "удаваним", при цьому:

$$\bar{a}^k = \bar{a}_x - \bar{g}.$$

У разі горизонтального польоту (на постійній висоті) підйомна сила ЛА врівноважує силу тяжіння. За рахунок підйомної сили  $Y$  в вертикальному напрямку створюється прискорення  $a^k_y$ . У горизонтальному польоті вертикальної складової

прискорення немає, тому  $a = a^k_y + g = 0$ , звідки  $a^k_y = -g$ , тобто в цьому цьому випадку акселерометр з вертикальною віссю чутливості буде вимірювати прискорення, створюване підйомною силою, чисельно рівною, але протилежну за знаком прискоренню сили тяжіння. Саме в цьому сенсі слід розуміти твердження, що "акселерометр реагує на прискорення сили тяжіння".

Крім осьових акселерометрів в інерційних системах приміняють маятникові акселерометри, причому і у тих, і у інших для підвищення точності роботи і діапазону вимірювань, обмежених гістерезисом пружини, замість механічної пружини використовують електричну.

Маятниковий акселерометр з електричною пружиною (рис.1.5) працює наступним чином. При русі ЛА в напрямку осі  $X$  чутливості приладу з прискоренням  $a^k$  до маси маятника  $m$ , укріпленої на плечі  $l$ , буде прикладена сила інерції  $F$ , що створює відносно осі  $Z$  момент сили інерції  $M = m \cdot l \cdot a^k$ , в результаті чого маятник стане повертатися навколо осі  $Z$ . Кут повороту маятника з допомогою датчика кута ДУ (потенціометричного, індукційного або іншого типу) перетвориться в напругу  $U_\beta = K_{ДУ} \cdot \beta$  ( $K_{ДУ}$  – крутизна характеристики датчика кута), яка після посилення в підсилювачі до величини  $U_y = K_y \cdot U_\beta$  ( $K_y$  - коефіцієнт посилення підсилювача) подається на датчик моменту ДМ. Останній прикладає до осі  $Z$  підвісу маятника момент зворотного зв'язку

$$M_{oc} = K_{DM} \cdot U_y = K_{EP} \cdot \beta,$$

де  $K_{DM}$  - крутизна характеристики датчика моменту;

$K_{EP} = K_{ДУ} \cdot K_y \cdot K_{DM}$  - коефіцієнт передачі електричної пружини.

Таким чином, елементами електричної пружини є датчик кута, підсилювач та датчик моменту.

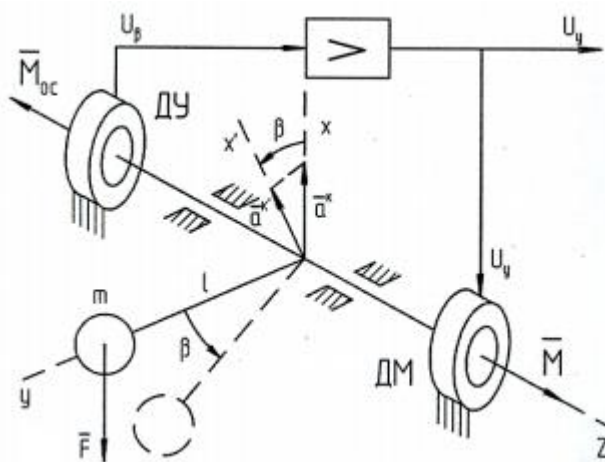


Рис.1.6. Маятниковий акселерометр з електричною пружиною

У сталому режимі момент зворотного зв'язку врівноважить момент сил інерції, так що кут повороту маятника і напруга на виході підсилювача виявляються пропорційною прискоренню:

$$\beta = \frac{m \cdot 1}{K_{\text{ЕП}}} \cdot a^k$$

$$I U_y = \frac{m \cdot 1}{K_{\text{ДМ}}} a^k.$$

При повороті маятника разом з ним на кут повернеться і вісь чутливості. При цьому акселерометр буде вимірювати не всі прискорення  $a^k$ , а його складову  $a^k = a^k \cos \beta$ .

Крім того, акселерометр стане реагувати і на поперечні прискорення, спрямовані уздовж осі  $Y$ . Ця обставина призводить до методичної похибки, зменшення якої можливо шляхом зменшення кута, що досягається збільшенням коефіцієнта посилення підсилювача.

Розглянуті акселерометри мають від'ємний зворотний зв'язок, обумовлений наявністю пружини (механічної або електричної). Тому такі прилади називають компенсаційними.

З огляду на те, що опору з меншим тертям легше виготовити в разі обертального руху маси  $m$ , ніж в разі її поступального руху, то в інерційних системах навігації найбільше застосування знайшли маятникові акселерометри.

Порогова чутливість сучасних акселерометрів з електричною пружиною становить близько  $10^{-4}$  -  $10^{-5}g$ .

Акселерометри мають також методичні похибки, обумовлені власним обертанням Землі і переміщенням ЛА відносно Землі. Ці похибки зручно аналізувати за рівнянням акселерометрів в 1-й або 2-й формі.

Перша форма пов'язує вимірювані прискорення з абсолютними чи лінійними швидкостями ЛА, абсолютними кутовими швидкостями обертання ГСП в інерціальній системі відліку і складовими питомої гравітаційної сили  $\bar{g}_0$ .

Друга форма вимірюваного прискорення пов'язує зі складовими шляхової швидкості, відносними кутовими швидкостями обертання ГСП і складовими питомої сили тяжіння  $g_T$ .

Більш просто виводяться і виглядають рівняння акселерометрів в 1-й формі. Вище було показано, що акселерометр вимірює не абсолютне, а прискорення яке здається  $\bar{a}^k = \bar{a} - g$ , звідки  $\bar{a} = a^k + g$ .



Наведені залежності записані в загальному вигляді, в інерціальній ж системі відліку  $\bar{a} = a^k + \bar{g}_0$ .

Визначимо спочатку значення абсолютного прискорення. У відповідності з теоремою про похідну від вектора по обертаючій системі координат:

$$\bar{a} = \frac{dV_{\text{ін}}}{dt} + \frac{dV_{\text{від}}}{dt} + \bar{\omega}_a^{\text{п}} \times V,$$

де  $\frac{dV_{\text{ін}}}{dt}$  – похідна абсолютної швидкості в інерціальному просторі;

$\frac{dV_{\text{від}}}{dt}$  – похідна абсолютної швидкості в відносній (зв'язаній з Землею) системі координат;

$\bar{\omega}_a^{\text{п}} \times V$  - векторний добуток швидкостей;  $\bar{\omega}_a^{\text{п}}$  - абсолютна кутова швидкість обертання ГСП.

Далі розкладемо  $\bar{a}$  по осях з урахуванням правила для двох векторів:

$$\begin{cases} a_x = \dot{V}_x + \omega_{ay}^{\text{п}} \cdot V_z - \omega_{az}^{\text{п}} \cdot V_y, \\ a_y = \dot{V}_y - \omega_{ax}^{\text{п}} \cdot V_z + \omega_{az}^{\text{п}} \cdot V_x, \\ a_z = \dot{V}_z + \omega_{ax}^{\text{п}} \cdot V_y - \omega_{ay}^{\text{п}} \cdot V_x. \end{cases}$$

Рис.1.7. Розкладення  $\bar{a}$

Тепер пам'ятаючи, що для інерційної системи координат

$$a = a^k + \bar{g}_0,$$

де  $\bar{g}_0$ - вектор питомої гравітаційної сили, визначимо складові абсолютної швидкості, значенням яких і є рівняння акселерометра в 1-й формі:

$$\begin{cases} V_x = V_x(t_0) + \int_{t_0}^t (a_x^k + g_{ox} - \omega_{ay}^{\text{п}} \cdot V_z + \omega_{az}^{\text{п}} \cdot V_y) \cdot dt, \\ V_y = V_y(t_0) + \int_{t_0}^t (a_y^k + g_{oy} - \omega_{ax}^{\text{п}} \cdot V_z - \omega_{az}^{\text{п}} \cdot V_x) \cdot dt, \\ V_z = V_z(t_0) + \int_{t_0}^t (a_z^k + g_{oz} - \omega_{ax}^{\text{п}} \cdot V_y + \omega_{ay}^{\text{п}} \cdot V_x) \cdot dt, \end{cases}$$

Рис.1.8. Рівняння акселерометра

де  $V_x(t_0)$ ,  $V_y(t_0)$ ,  $V_z(t_0)$  – початкові значення абсолютної швидкості;

$g_{ox}, g_{oy}, g_{oz}$  – складові вектора питомої гравітаційної сили;

$a^k_x, a^k_y, a^k_z$  – сигнали акселерометрів.

З рівнянь видно, що для визначення швидкості (а на далі і лінійних координат) інтегрування одних тільки сигналів акселерометрів недостатньо, необхідно враховувати інші члени в підінтегральному вираженні. Ці члени зводяться компенсаційними і неврахування їх призводить до появи основних методичних похибок акселерометрів. Компенсаційні члени мають перший або другий порядок малості і не враховуються тільки в ІКВ-системах. Таке спрощення пояснюється наступними міркуваннями:

$$g^{max}_{ox} \quad g^{max}_{oy} \approx 1,557 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 \text{ - другий порядок малості;}$$

середнє значення вертикальної швидкості  $V_z$  за весь політ близько до нуля і в будь-який момент часу зазвичай менше  $V_x$  і  $V_y$ , - таким чином, членами  $V_z$  також можна знехтувати; компенсацією удаваного догляду ГСП в азимут; через добове обертання Землі (за законом  $\Omega_3 \sin\phi$ ), члени з  $\omega^{\Pi}_{az}$  для максимальних значень швидкостей не перевищують  $3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ ; якщо ж компенсується і догляд ГСП через рух ЛА, то члени  $\omega^{\Pi}_{az}$  мають ще менший порядок малості;  $V_z$ , і особливо вертикальна координата  $z$ , в ІКВ-системах не обчислюються внаслідок обчислювальної нестійкості вертикального каналу; в інших ІНС також через обчислювальну нестійкість каналу обчислюється тільки значення  $V_z$ .

Таким чином, для ІКВ-систем алгоритм обчислення швидкостей виглядає так:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = V_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x^k \cdot dt \\ V_y = V_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y^k \cdot dt \end{array} \right.$$

Рис.1.9. Алгоритм обчислення швидкостей

Повні рівняння акселерометрів в 2-й формі мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x = W_{x0} + \int_{t_0}^t [a_x^k - (\omega_y^{\Pi} + 2\Omega_y) \cdot W_z + (\omega_z + 2\Omega_z) \cdot W_y + g_{mx}] \cdot dt, \\ W_y = W_{y0} + \int_{t_0}^t [a_y^k + (\omega_x^{\Pi} + 2\Omega_x) \cdot W_z + (\omega_z^{\Pi} + 2\Omega_z) \cdot W_x + g_{my}] \cdot dt, \\ W_z = W_{z0} + \int_{t_0}^t [a_z^k - (\omega_z^{\Pi} + 2\Omega_x) \cdot W_y + (\omega_y + \Omega_y) \cdot W_x + g_{mz}] \cdot dt, \end{array} \right.$$

## Рис.1.10. Рівняння акселерометрів

де  $W$  - шляхові швидкості;

$\omega_{x,y,z}^I$  - кутові швидкості обертання ГСП щодо Землі;

$\Omega_{x,y,z}$  - кутові швидкості обертання Землі;

$g_{mx,my,mz}$  - складові питомої сили тяжіння.

У ІНС використовується як 1-я, так і 2-я форми рівнянь. Основою будь-якої ІНС є ІКВ. Всі ІКВ - це фактично ГСП, утримувані в заданому положенні спеціальними гіростабілізаторами.

### 1.2. Класифікація, принципи побудови і роботи гіростабілізаторів

Перші гіростабілізатори (ГС) забезпечували стабілізацію деякої площини, щодо якої вимірювалися кути курсу, крену і тангажу. Далі ГС стали використовувати для стабілізації становища зброї, фотоапаратів та інших пристроїв, в тому числі ГСП в ІНС. За способом утримання платформ і інших елементів ГС підрозділяються на 2 типу: індикаторні і силові.

Принципова схема одновісного індикаторного ГС зображена на (рис.1.11.(а))

При появі зовнішнього моменту  $M_{вн}$  ГСП разом з зовнішньою рамою гіроскопа зміщується від заданого положення і, так як гіроскоп  $\Gamma$  зберігає свою орієнтацію незмінною, на виході датчика кута ДУ1 з'являється сигнал відхилення ГСП. Цей сигнал після посилення подається на двигун стабілізації ДС. ДС вступає в роботу і повертає ГСП і НР в попереднє положення. Динамічні параметри роботи ГС такі, що навіть при максимальних збуреннях ГСП повертаються до колишньої орієнтації не більше, ніж за десяті частки секунди. На (рис.1.11(а)) зображені також:

ДУ2 - служить для вимірювання тангажу (в даному випадку);

ДМ1 - служить для початкового орієнтування НР щодо ГСП (при подачі на ДМ1 керуючого сигналу, гіроскоп разом з НР прецесує в азимут);

ДМ2 - необхідний для виставки ГСП в початкове положення (подача сигналу на ДМ2 викличе, очевидно, прецесію гіроскопа і обертання за допомогою ДС всієї ГСП слідом за гіроскопом).

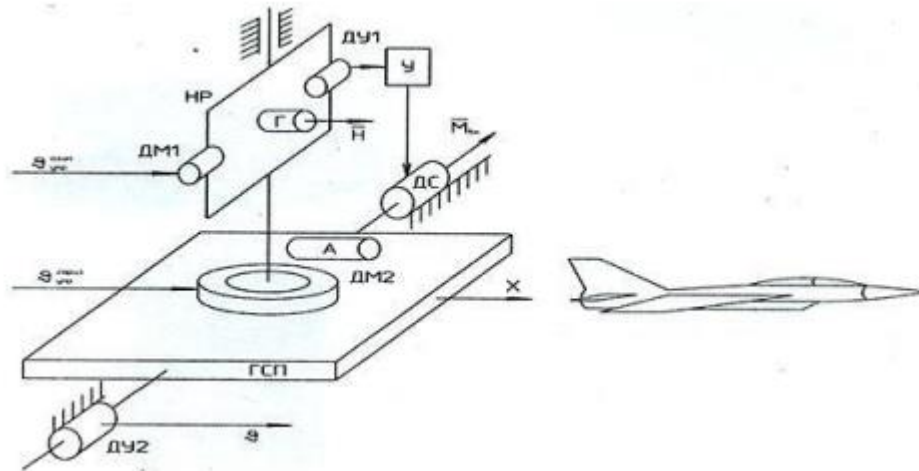


Рис.1.11(а). Принципова схема одновісного індикаторного ГС

У практичних схемах ІНС застосовується тривісний індикаторний ГС, що включає два триступеневих гіроскопа. Таким чином, характерною ознакою індикаторного ГС є наявність 3-ступеневих гіроскопів. Перевагою індикаторного ГС є відсутність силового завантаження гіроскопа (основне зусилля стабілізації розвиває ДС). Недолік - застосування більш складних 3-ступеневих гіроскопів і незначні зміщення ГСП на початковому етапі стабілізації. Принцип дії силового ГС розглянемо по (рис.1.11(б)).

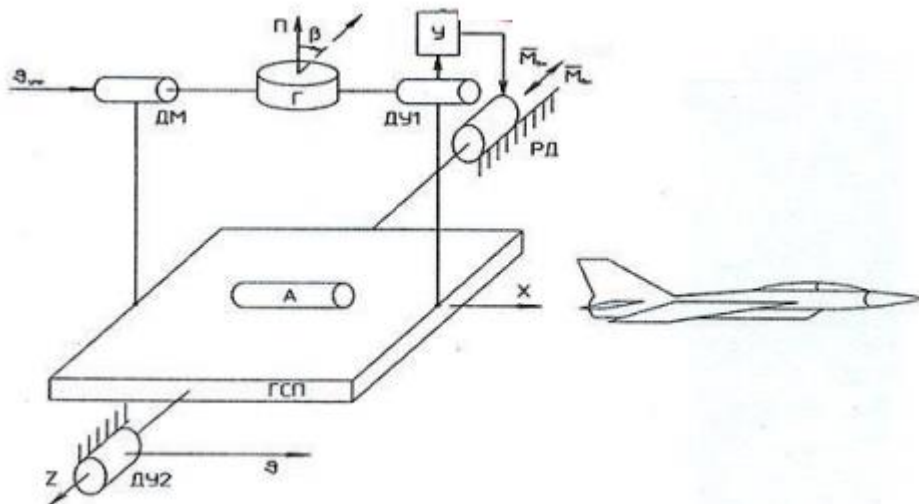


Рис.1.11(б). Принцип дії силового ГС

При появі  $M_{ВН}$  (наприклад, через тертя в опорах ГСП) ГСП зберігає незмінною свою орієнтацію. Це пояснюється тим, що платформа разом з встановленим на ній 2-ступеневим гіроскопом проявляє властивості 3-ступеневого гіроскопа. Наявність  $M_{ВН}$  викликає лише прецесію гіроскопа Г, платформа же за рахунок дії гіроскопічного

моменту залишиться нерухомою. Прецесія Г реєструється датчиком кута ДУ1, сигнал від якого після посилення подається на розвантажувальний двигун РД. Коли момент, створений РД, стане рівним і протилежним  $M_{ВН}$ , прецесія Г припиниться. У разі зникнення  $M_{ВН}$  (припинення еволюцій ЛА)  $M_{РД}$  викличе прецесію Г в зворотний бік. Коли гіроскоп повернеться до початкового стану, сигнал на виході ДУ1 пропадає і  $M_{РД}$  також стає рівним нулю. На практиці зсув гіроскопа не перевищує декількох градусів, а тривалість прецесії - сотих чи десятих часток секунди. Для початкової виставки ГСП на датчик моменту ДМ подається керуючий сигнал, в результаті відбувається прецесія гіроскопа Г разом з ДСП. У схемах ІНС силові ГС, так само як і індикаторні, тривісні. Однак на відміну від індикаторних, в силових ГС використовуються три 2-ступеневих гіроскопа. Перевагою силових ГС є незмінність орієнтації ГСП при появі  $M_{ВН}$  і застосування більш простих 2-ступеневих гіроскопів. Недолік - значне силове навантаження гіроскопів на початковому етапі стабілізації.

На сучасних ЛА знайшли застосування обидва типи ГС. В системі ІКВ-1, наприклад, використовується силовий ГС, в інших літаках індикаторний на основі гіроскопів з внутрішнім кардановим підвісом.

Тож, для стабілізації платформи використовуються гіроскопи. Так, наприклад, стабілізація платформи П, наведеної на (рис.1.12), здійснюється за допомогою двох триступеневих гіроскопів  $G_1$  і  $G_2$ . Сигнали відхилення платформи від заданого положення знімаються з датчиків кута гіроскопів і подаються на відповідні двигуни стабілізації ДС<sub>1</sub>, ДС<sub>2</sub> і ДС<sub>3</sub>, встановлені по осях підвісу гіростабілізатора.

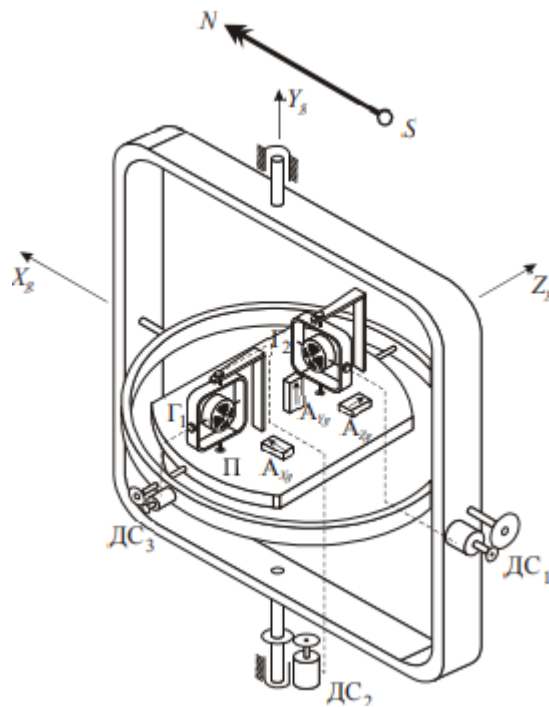


Рис.1.12. Стабілізація акселерометрів за допомогою платформ на двох триступневих гіроскопах

Тривісний гіростабілізатор може бути побудований, також на базі трьох двоступневих гіроскопів. Таким чином, якщо вимірювальні осі акселерометрів орієнтуються точно в площині горизонту і в азимуті, то їх показання будуть відповідати проекції вектора прискорення об'єкта на осі  $OX_g$ ,  $OY_g$ ,  $OZ_g$ .

### 1.3. ІНС напіваналітичного типу

Принцип незворушності лежить в основі інерціальних навігаційних систем з гіростабілізованою платформою, який забезпечується, так званою, інтегральною корекцією, запропонованою радянськими інженерами Є.Б. Левенталем і Л.М. Кофманом в 1932 р. Сутність інтегральної корекції полягає в тому, що сигнал акселерометра інтегрується і подається на датчик моменту гіроскопа, котрий прецесує слідом за істинною вертикаллю, яка змінює своє положення внаслідок переміщення об'єкта.

Розглянемо рух об'єкта в площині меридіана сферичної і необертової Землі. У цьому випадку завдання навігації можна вирішити за допомогою одного гіроскопа і одного акселерометра. Гіростабілізована платформа несе на собі триступневий астатичний гіроскоп з вертикальним розташуванням головної осі і один лінійний акселерометр А (рис.1.13). На осі обертання зовнішнього кільця гіроскопа знаходиться

датчик моменту, який прикладає момент щодо осі пропорційно інтегралу від показань акселерометра. Відповідно до відомих властивостей гіроскопа під дією моменту, прикладеного навколо осі зовнішньої рамки, гіроскопа починає прецесувати навколо осі обертання внутрішньої рамки (кожуха), в результаті чого на виході датчика кута ДУ утворюється сигнал, пропорційний куту повороту внутрішньої рамки щодо зовнішньої. Вихідний сигнал ДУ подається на двигун стабілізації ДС, за допомогою якого гіростабілізована платформа починає розгортатися до тих пір, поки площина зовнішньої рамки не буде перпендикулярна головній осі гіроскопа.

Покажемо, що така система є незбудженими прискоренням об'єкта.

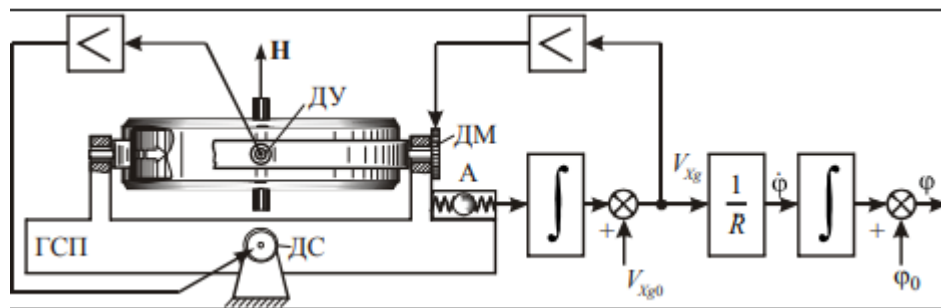


Рис.1.13. Принцип інтегральної корекції

З початковим становищем об'єкта зв'яжемо нормальну систему координат  $O_0X_{g0}Y_{g0}Z_{g0}$  (рис.1.14), де вісь  $O_0X_{g0}$  - спрямована на північ,  $O_0Y_{g0}$  - по вертикалі вгору, а  $O_0Z_{g0}$  - на схід (перпендикулярно площині рисунку).

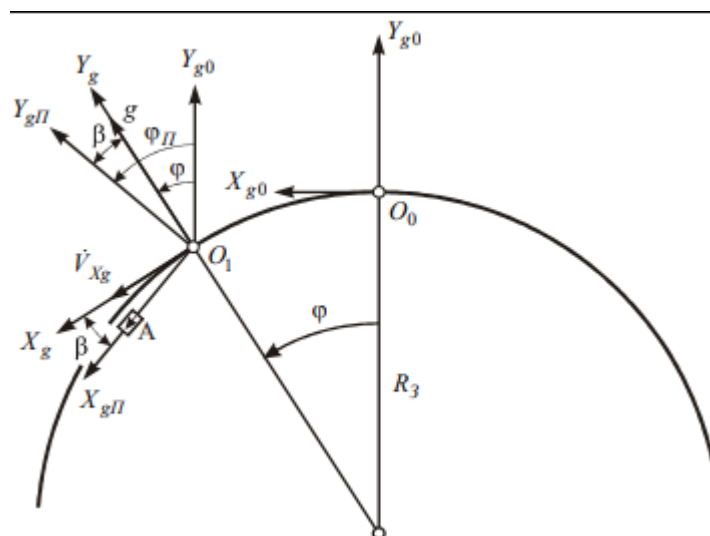


Рис.1.14. До принципу дії інерціальної навігаційної системи

Об'єкт переміщається в точку  $O_1$  в результаті чого сталося прирощення широти на величину  $\varphi$ . З точки  $O_1$  спрямовані осі початкової  $O_1X_{g0}Y_{g0}Z_{g0}$  і поточної  $O_1X_gY_gZ_g$  орієнтації нормальної системи координат. З гіростабілізованою платформою зв'яжемо

систему координат  $O_1 X_{g\Pi} Y_{g\Pi} Z_{g\Pi}$ . Під дією інтегральної корекції гіростабілізована платформа розгортається на приладовий кут  $\varphi_{\Pi}$ , котрий не дорівнює істинному  $\varphi$ . Відхилення дійсної вертикалі  $O_1 Y_g$  від приладової  $O_1 Y_{g\Pi}$  визначається малим кутом  $\beta$ , званим помилкою побудови вертикалі. З (рис.1.14) слідує зв'язок між помилкою побудови вертикалі, істинної  $\varphi$  і приладової  $\varphi_{\Pi}$  широтами:

$$\varphi_{\Pi} = \varphi + \beta.$$

Величина  $\omega_0 = \sqrt{\frac{9,81}{6371000} + 1,24 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}}$  являє собою частоту Шулера, тому з цього впливає умова настройки на період Шулера.

$$\frac{k}{H} = \frac{1}{R_3}.$$

Таким чином, якщо вертикаль в початковий момент часу поставлена точно, а елементи ІНС працюють без похибок, то при русі об'єкта в площині меридіана, гіростабілізованої платформи, а отже і вимірювальна вісь акселерометра будуть зберігати горизонтальне положення незалежно від прискорень об'єкта. У цьому випадку лінійна швидкість об'єкта в північному напрямку і широта визначаються відповідно до співвідношення:

$$V_{Xg} = \int_0^t \dot{V}_{Xg} d\tau + V_{Xg0}; \quad \varphi = \frac{1}{R_3} \int_0^t V_{Xg} d\tau + \varphi_0.$$

Рис.1.15. Співвідношення

Таким чином, основний принцип ІНС напіваналітичного типу полягає у тому, що треба повертати платформу з кутовою швидкістю, що відповідає величині горизонтальної складової швидкості об'єкта, отриманої за допомогою інтегрування прискорення. Система платформа - акселерометр - зворотний зв'язок становить замкнутий контур і може розглядатися як синтезований математичний маятник, що володіє двома властивостями: 1) в положенні рівноваги вимірювальні осі акселерометрів розташовуються перпендикулярно місцевому напрямку сили тяжіння; 2) при русі об'єкта перехід маятника до нового напрямку вертикалі, до нового положення рівноваги, відбувається без коливань, якщо період власних коливань системи налаштований на період Шулера, рівний 84,4 хв.

ІНС, побудована за схемою на (рис.1.13) називається ІНС напіваналітичного типу, так як рішення навігаційного завдання реалізується за допомогою гіростабілізованої платформи і частково за допомогою обчислювального пристрою. В замкнутій контур побудови вертикалі входить тільки один інтегратор, вихідний сигнал



якого, подається на датчик моменту гіроскопа. У зв'язку з цим такі системи також називають ІНС з корекцією за швидкістю.

До похибок ІНС напіваналітичного типу відносяться: вплив неточної початкової виставки платформи, тобто, якщо платформа в початковий момент часу виставлена з похибкою, то в наступному вона буде здійснювати гармонічні коливання з частотою Шулера; вплив похибки акселерометра, тобто похибка у вимірі швидкості також має характер коливань з періодом Шулера і амплітудою, пропорційної величині зсуву нульового відліку акселерометра; вплив власного дрейфу гіроскопа.

#### 1.4. ІНС геометричного типу

Іншим способом побудови ІНС є система, в якій гіростабілізована платформа нерухома відносно інерційного простору, а акселерометр встановлений на спеціальному майданчику побудовника вертикалі (ПВ), що моделює справжню вертикаль або, що те ж саме, площину місцевого горизонту. Така система називається ІНС геометричного типу. Коротко розглянемо цей тип ІНС (рис.1.16).

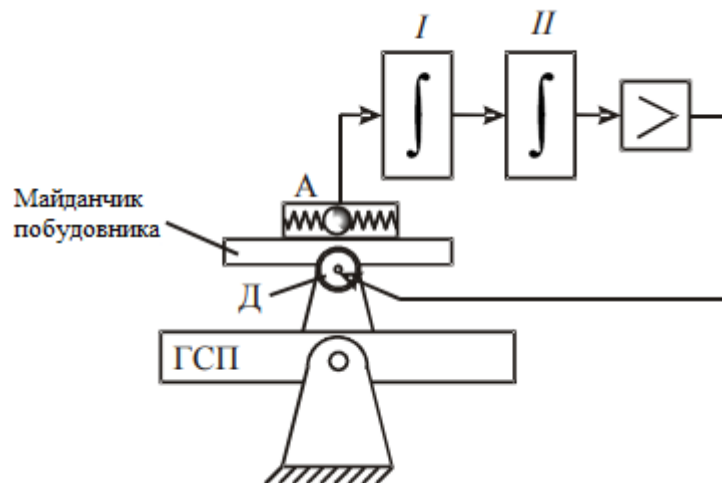


Рис.1.16. ІНС геометричного типу

Поворот майданчика ПВ здійснюється за допомогою двигуна Д, на який подається сигнал, пропорційний другому інтегралу від показань акселерометра А

$$\varphi_{II} = k \int_0^t \int_0^t n dt^2$$

Рис.1.17. Показання акселерометра

де  $\varphi_{II}$  - кут повороту майданчика ПВ щодо ГСП,  $k$  – коефіцієнт ланцюга побудовника вертикалі. Припустимо, як і раніше, об'єкт переміщається в площині меридіана з прискоренням  $V_{Xg}$ , а майданчик ПВ моделює справжню вертикаль з помилкою  $\beta = \varphi_{II} - \varphi$ . У зв'язку з цим вимірювальна вісь акселерометра буде відхилена від площини місцевого горизонту, і як причинами виникнення проекції –  $g\beta$  в вихідному сигналі акселерометра. Таким чином, рівняння запишеться у вигляді

$$\beta = k \int_0^t \int_0^t (\dot{V}_{Xg} - g\beta) d\tau^2 - \varphi.$$

Рис.1.18. Відповідність до формули (рис.1.17)

Двічі диференціюючи за часом рівняння (рис.1.18) і враховуючи, що  $\varphi = \frac{V_{Xg}}{R_3}$ , отримаємо

$$\ddot{\beta} + kg\beta = \dot{V}_{Xg} \left( k - \frac{1}{R_3} \right).$$

Рис.1.19. Формула диференціювання

Рівняння буде однорідним, тобто обурююча права частина буде дорівнювати нулю, якщо виконується рівність

$$k = \frac{1}{R_3}$$

Якщо рівність виконується, то рівняння (рис.1.19) приймає вже знайомий вигляд

$$\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = 0,$$

Рис.1.20. Кінцевий вигляд рівняння

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R_3}}$  - частота Шулера. Співвідношення  $k = \frac{1}{R_3}$  називається умовою настройки ІНС геометричного типу на період Шулера. У ІНС геометричного типу обидва інтегратора входять в ланцюг побудовника вертикалі, завдяки чому їх також називають системами з корекцією по відстані. Канал довготи в ІНС геометричного типу працює аналогічно. Так як ГСП моделює інерційну систему відліку, а майданчик будівника вертикалі - географічну систему координат, то ширину й довжину визначають геометрично, як кути між ГСП і ПВ (рис.1.21).

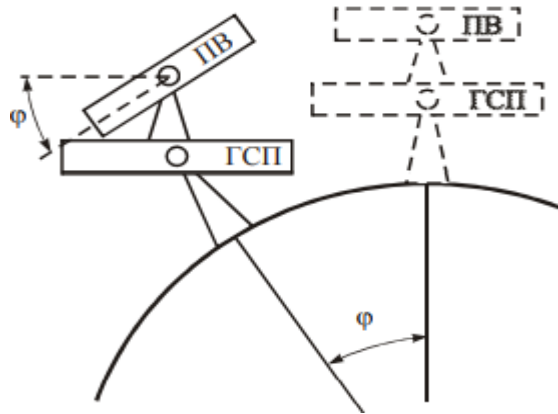


Рис.1.21. Визначення координат в ІНС геометричного типу

Основні особливості ІНС геометричного типу наступні

- 1) в найпростішому випадку система може бути реалізована на базі п'ятикілецевого карданового підвісу. У реальних умовах для забезпечення працездатності ІНС при довільному характері руху об'єкта доводиться ускладнювати систему шляхом введення ряду допоміжних кілець механічного розв'язку;
- 2) зміна орієнтації гіроскопів щодо вектора місцевого гравітаційного прискорення зумовлює зміну швидкості дрейфу гіроскопа за неминучої залишкової незбалансованості;
- 3) незважаючи на порівняльну простоту обчислювального пристрою, ІНС геометричного типу мають складну конструкцію, в зв'язку з чим перевищують за масою і габаритами ІНС інших типів.

Тож, у загальному випадку при побудові інерційних систем необхідно враховувати наступне:

- способи вимірювання навігаційних параметрів ЛА щодо навігаційної системи відліку;
- види орієнтації акселерометрів;
- особливості моделювання систем координат;
- методи обліку гравітаційного прискорення;

- методи обліку початкових параметрів руху.

У зв'язку з цим до складу будь-якої інерціальної системи входять наступні функціональні елементи:

- система акселерометрів, що вимірює складові вектора прискорення руху центру мас ЛА під дією активних сил;
- датчики кутової орієнтації, що моделюють навігаційну систему координат або вимірюють її кутову швидкість обертання;
- датчики первинної і вихідної інформації, в тому числі і даних про гравітаційне поле;
- лічильно-вирішальний пристрій для обчислення навігаційних алгоритмів;
- системи відображення вихідної інформації або видачі вихідних сигналів різним споживачам;
- системи управління і корекції похибок.

## РОЗДІЛ 2. Безплатформні інерціальні навігаційні системи

### 2.1. Основні дані та принципи побудови

Гіростабілізована платформа, оберігаючи акселерометри від впливу кутових переміщень об'єкта, має ряд істотних недоліків: ГСП, будучи прецизійним електромеханічним пристроєм ненадійна, споживає багато енергії, має велику масу і габарити, складна при складанні і дорога. Іншим способом побудови інерціальної навігаційної системи є розміщення акселерометрів і гіроскопів безпосередньо на борту рухомого об'єкта, а функції ГСП виконує бортові обчислювальні машини. У зв'язку з цим такі прилади називають безплатформними (безкарданними) інерціальними навігаційними системами (БІНС) (Strapdown Inertial Navigation System).

Ідеї БІНС фактично були реалізовані ще на початку 30-х років, при дослідженнях входження літака в штопор, зокрема літака Р-5. Група радянських інженерів на чолі з В.С. Ведровим розробила інерційну навігаційну систему, в якій акселерометри і гіроскопічні вимірювачі кутових швидкостей встановлювалися безпосередньо на корпусі літака. При такій приладовій реалізації відпадала необхідність у складній і дорогій ГСП. У тій фактично першій БІНС інформація, одержувана з акселерометрів і гіроскопів, записувалась в польоті за допомогою самописців, а потім математично оброблялася на землі за допомогою механічних арифмометрів, в результаті чого розраховувалися координати центру мас літака і параметри орієнтації.

Практична реалізація першої БІНС була здійснена в системі управління рухом та орієнтації транспортного космічного корабля «Союз-Т». Поява першої БІНС в системі управління рухом космічного апарату є не випадковим. Це пояснюється тим, що космічний апарат після його виведення на орбіту, знаходиться в умовах вільного польоту при малих збуреннях, які зникають.

<i>Кафедра авіоніки</i>							
<i>Виконав</i>	Школьніий С.І			Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою	<i>Літ.</i>	<i>Арк.</i>	<i>Акрушіть</i>
<i>Керівник</i>	Положевець Г.А.				18	29	85
<i>Консульт.</i>					<b>173 «Авіоніка»</b>		
<i>Н-контр.</i>	Левківський В.В.						
<i>Зав. каф.</i>	Павлова С.В.						

До інерціальних чутливих елементів БІНС пред'являються надзвичайно високі вимоги. Гіроскопи та акселерометри, будучи жорстко встановлені на борту об'єкта мають володіти заданою точністю в широкому діапазоні кутових швидкостей і прискорень, а також функціонувати в умовах вібрацій, ударів. У БІНС, використовуваних чутливі елементи - акселерометри і вимірювачі параметрів орієнтації (гіроскопи), можуть бути побудовані на різних фізичних принципах. При цьому кількість вимірювачів має бути такою, щоб забезпечити отримання інформації про вектор уявного прискорення об'єкта, в якому встановлені вимірювальні прилади та про вектор абсолютної кутової швидкості, що характеризує обертання. Залежно від складу інерціальних чутливих елементів БІНС можуть бути побудовані з застосуванням наступних приладів: датчиків кутової швидкості (ДУС) і акселерометрів.

Розглянемо принцип дії безплатформної інерційної навігаційної системи на ДУС і акселерометрах при русі літального апарату (ЛА) уздовж площини меридіана сферичної і Землі, яка не обертається. Зв'яжемо з вихідним положенням ЛА нормальну систему координат  $O_0X_{g0}Y_{g0}Z_{g0}$  (рис.2.1), де вісь  $O_0X_{g0}$  лежить в площині горизонту і спрямована на північ, вісь  $O_0Y_{g0}$  направлена уздовж істинної вертикалі вгору,  $O_0Z_{g0}$  - спрямована на схід (перпендикулярна площині креслення).

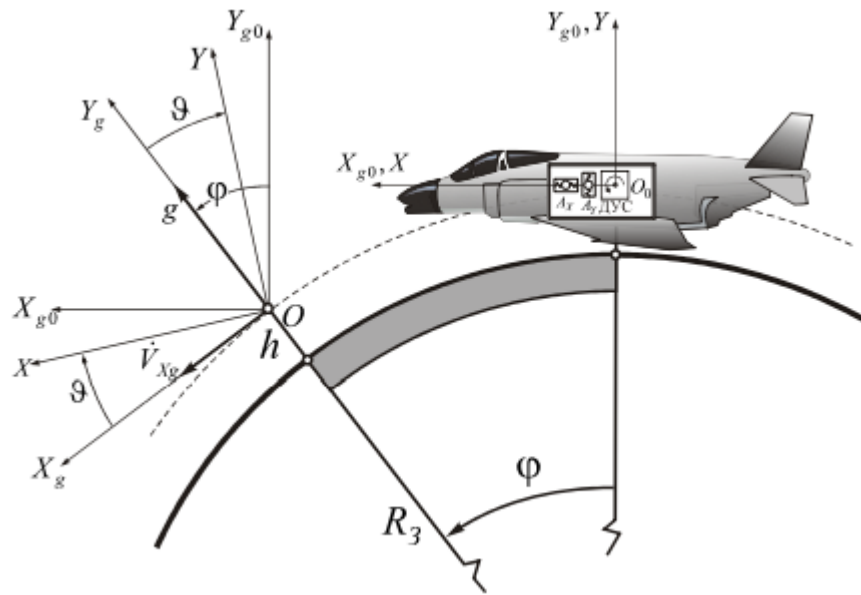


Рис.2.1. До принципу дії БІНС

Припустимо, що в початковий момент часу координата і швидкість ЛА відомі і рівні  $\varphi(t_0)$  і  $(t_0) V_{Xg}$  відповідно. З ЛА зв'яжемо систему координат  $OXYZ$ , де вісь  $OX$  - спрямована по поздовжній осі ЛА, вісь  $OZ$  - уздовж поперечної осі, а  $OY$  перпендикулярна площині крил і спрямована вгору. Передбачається, що в початковий момент часу система координат  $OXYZ$  збігається з  $O_0X_{g0}Y_{g0}Z_{g0}$ . На борту ЛА розміщені два лінійних акселерометра  $A_X$  і  $A_Y$  з вимірювальними осями спрямованими уздовж поздовжньої  $OX$  і нормальної осі  $OY$  літального апарату і гіроскопічний датчик кутової швидкості, який вимірює проекцію  $\omega_Z$  абсолютної кутової швидкості ЛА.

Нехай ЛА перемістився з точки  $O_0$  в ціль  $O$  з координатою  $\varphi$ , котра підлягає визначенню. З точки  $O$  направимо поточну  $OX_g, OY_g$  і початкову орієнтацію осей  $X_{g0}, Y_{g0}$  нормальної системи координат. Очевидно, що якщо відомо напрямок істинної вертикалі  $OY_g$  в кожний момент часу, то завдання навігації буде вирішена виміром кута між осями  $OY_{g0}$  і  $OY_g$  (рис.2.1). Припустимо, що в точці  $O$  пов'язана з ЛА система координат відхилена від географічної на кут тангажу  $\vartheta$ . Нагадаємо, що акселерометри вимірюють не абсолютне прискорення об'єкта, а, так зване, вдаване прискорення, тобто рівнодіюча між абсолютним прискоренням об'єкта та прискоренням сили тяжіння. Вектор удаваного

прискорення  $n$  може бути заданий проекціями  $V_{X_g}$  і  $g$  на ребра  $OX_g$  і  $OY_g$  географічного тригранника  $OX_gY_gZ_g$  (рис.2.2).

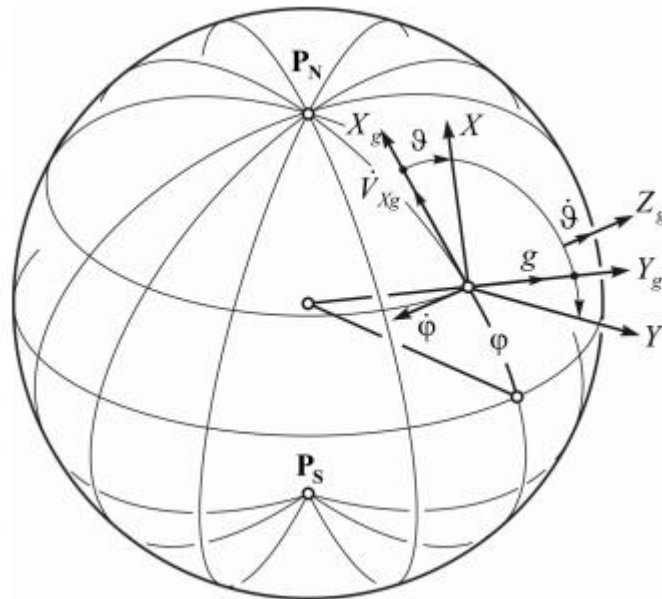


Рис.2.2. Взаємне положення географічного і зв'язного тригранників

За допомогою акселерометрів вимірюються проекція вектора вданого прискорення  $n$  на осі  $OX$  і  $OY$  пов'язаного тригранника, які співпадають з вимірювальними осями акселерометрів. Відповідно до (рис.2.1) проекції удаваного прискорення на вимірювальні осі акселерометрів мають вигляд

$$n_X = V_{X_g} \cos\vartheta + (g + V_{Y_g}) \sin\vartheta;$$

$$n_Y = (g + V_{Y_g}) \cos\vartheta - V_{X_g} \sin\vartheta,$$

де  $V_{X_g}$ ,  $V_{Y_g}$  - прискорення ЛА в північному і вертикальному напрямках відповідно;  $g$  - прискорення сили тяжіння. Якщо здійснити зворотний перехід, тобто перепроєктувати показання акселерометрів в нормальну систему координат

$$n_{X_g} = n_X \cos\vartheta - n_Y \sin\vartheta,$$

то можна визначити лінійне прискорення ЛА в північному напрямку



$$n_{Xg} = (V_{Xg} \cos\vartheta + g \sin\vartheta) \cos\vartheta - (g \cos\vartheta - V_{Xg} \sin\vartheta) \sin\vartheta = V_{Xg}.$$

Дійсно, якщо є інформація про кут  $\vartheta$ , то перепроектувати показання акселерометрів з пов'язаною системою координат в нормальну, можна знайти проекцію прискорення  $V_{Xg}$ . Подальше дворазове інтегрування прискорення  $V_{Xg}$  дозволить знайти координати і швидкість ЛА. Про процес визначення швидкості і координат ілюструється на (рис.2.3).

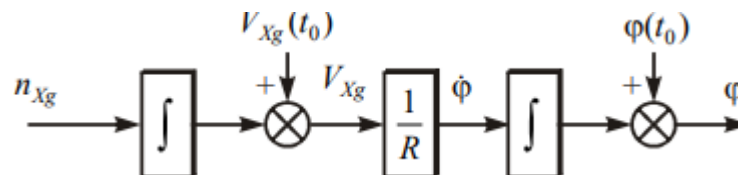


Рис.2.3. Визначення швидкості та координат

Після перерахунку інформації відповідно до рівняння виникає прискорення  $n_{Xg}$

що являє собою північну складову горизонтального прискорення ЛА. На виході першого інтегратора утворюється приріст лінійної швидкості в північному напрямку, яке складається з початкової швидкості ЛА  $V_{Xg}(t_0)$  і утворюється лінійна швидкість  $V_{Xg}$ . Наступний по структурній схемі блок здійснює розподіл лінійної швидкості на радіус-вектор  $R = R_3 + h$  ( $h$  - висота), після чого утворюється кутова швидкість зміни широти ЛА  $\dot{\varphi}$ . Подальше інтегрування дозволяє знайти координату  $\varphi$  з урахуванням її початкового значення  $\varphi(t_0)$ . Швидкість  $V_{Xg}$  і широта  $\varphi$  ЛА знайдені в припущенні, що відомий кут тангажу  $\vartheta$ . Вирішимо задачу визначення кута  $\vartheta$  між пов'язаною і географічною системою координат. гіроскопічний ДУС вимірює проекцію абсолютної кутової швидкості ЛА (рис.2.2)

$$\omega_Z = u_{Zg} + \vartheta = -\dot{\varphi} + \vartheta.$$

тут  $u_{Zg}$  і  $\vartheta$  - переносна і відносна складові кутової швидкості ребра  $OZ$  пов'язаного тригранника. Для того щоб знайти кут  $\vartheta$  необхідно попередньо виключити зі свідчень ДУС переносну кутову швидкість  $u_{Zg} = -\dot{\varphi}$ . Після чого шуканий кут  $\vartheta$  визначається в результаті інтегрування

$$\vartheta = \int_{t_0}^t (\omega_z - u_{z_g}) d\tau + \vartheta(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\vartheta} d\tau + \vartheta(t_0),$$

Рис.2.4. Інтегрування визначення кута  $\vartheta$

де  $\vartheta(t_0)$  - початкове значення кута тангажа. кутову швидкість  $\dot{\vartheta}$  можливо знайти з алгоритму числення координат місця розташування ЛА. Структурна схема північного каналу БІНС представлена на (рис.2.5).

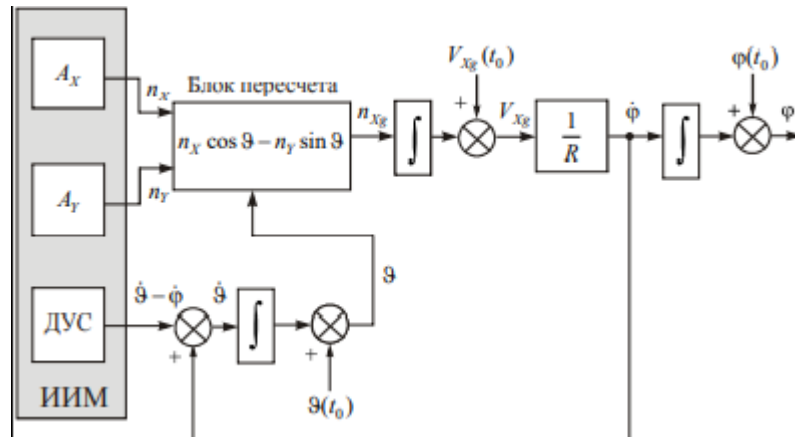


Рис.2.5. Структурна схема північного каналу БІНС

Структурна схема північного каналу БІНС, являє собою, так званий, алгоритм ідеальної роботи, коли акселерометри і ДУС працюють без похибок. Розглянемо вертикальний канал БІНС, що дозволяє визначити вертикальну швидкість і висоту польоту ЛА. Спроекуємо рівності на вісь  $OY_g$

$$\begin{aligned} n_{Yg} &= [\dot{V}_{Xg} \cos \vartheta + (g + \dot{V}_{Yg}) \sin \vartheta] \sin \vartheta + [(g + \dot{V}_{Yg}) \cos \vartheta - \dot{V}_{Xg} \sin \vartheta] \cos \vartheta = \\ &= g + \dot{V}_{Yg}. \end{aligned}$$

Рис.2.6. Рівність на вісь  $OY_g$

Якщо виключити з сигналу  $n_{Yg}$  прискорення сили тяжіння  $g$ , і двічі проінтегрувати прискорення  $V_{Yg}$ , то можна отримати вертикальну швидкість  $V_{Yg}$  і висоту польоту  $h$ , якщо відомі початкові дані про швидкість  $(t_0)V_{Yg}$  і висоті  $h(t_0)$ . Для компенсації прискорення

сили тяжіння необхідно мати модель гравітаційного поля Землі. Блок-схема вертикального каналу БІНС показана на (рис.2.7).

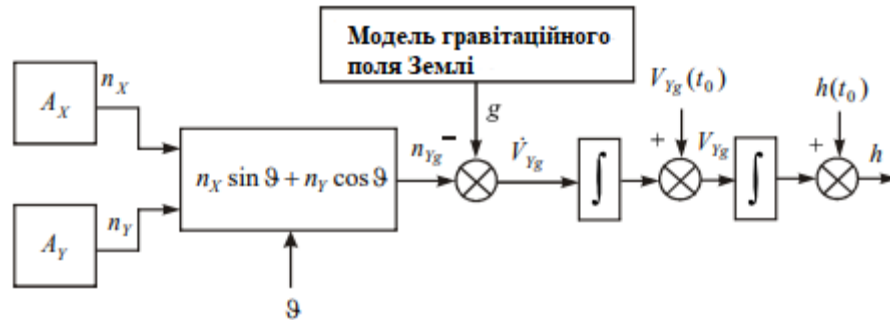


Рис.2.7. Вертикальний канал БІНС

Особливістю вертикального каналу є його нестійкість (необмежене зростання похибок), в зв'язку з чим, в автономному режимі він практично не використовується. Зауважу, що визначення координат місця розташування ЛА (широти  $\varphi$ , висоти  $h$ ), лінійних швидкостей  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$ , а також кута  $\vartheta$ , характеризує орієнтацію ЛА, засновану тільки на вимірах акселерометрів і гіроскопа без залучення будь-якої зовнішньої інформації.

На основі одноканального розгляду можна виділити наступні основні блоки, необхідні для побудови БІНС:

- блок акселерометрів - для визначення проєкцій вектора вданого прискорення  $n$  на осі пов'язаного тригранника;
- блок перерахунку - для перетворення проєкцій вектора уявного прискорення  $n$  на осі навігаційної системи координат (в даному випадку нормальна система координат)
- навігаційний алгоритм - призначений для вироблення координат місця розташування об'єкта та швидкостей і, крім того, формує компонент вектора абсолютної кутової швидкості нормальної системи координат  $u_g$ ;
- блок гіроскопів - для визначення проєкцій вектора абсолютної кутової швидкості на ребра пов'язаного тригранника;

- алгоритм орієнтації - для вирішення завдання орієнтації і формування матриці переходу  $C$ , використовуваної в блоці перерахунку. Алгоритм орієнтації може бути реалізований з використанням різних кінематичних параметрів, такі як кути Ейлера-Крилова, напрямні косинуси, кватерніони і інші.

Алгоритми функціонування БІНС можуть відрізнятися видом системи координат, прийнятої за основну, видом рівнянь орієнтації, використовуваною формою запису прискорень, обраним методом чисельного інтегрування та інше. БІНС можуть відрізнятися гіроскопічними вимірювачами. Тому алгоритми БІНС вельми різні. Розглянемо деякі приклади.

## 2.2. Алгоритми БІНС в інерціальній системі координат

Даний алгоритм реалізує метод числення шляху, в першу чергу, в інерціальній системі координат.

У блоці чутливих елементів акселерометри і гіроскопи можуть бути в мінімальній кількості (3 одновісних акселерометра, 3 датчика кутової швидкості), а можуть мати надлишкову складну структуру, механізми автокомпенсації перешкод. Алгоритми попередньої обробки сигналів можуть містити елементи автокомпенсації перешкод або коригування вимірювань за результатами калібрування параметрів моделі сигналів. Для отримання сигналів в проекціях на осі зв'язаної системи координат проводиться перетворення сигналів чутливих елементів, їх діагностика, внаслідок яких визначають вектор проекцій здаються прискорень  $a_b$  і вектор проекцій кутової швидкості об'єкта  $\omega_b$ .

Оскільки основна прийнята інерціальна система координат, необхідно використовувати матрицю напрямних косинусів між осями пов'язаної  $b$  і інерційної  $i$  систем координат  $C^{ib}$ . Для отримання  $C^{ib}$  використовують рівняння Пуассона

$$C^{ib} = C^{ib} \Omega^{ib}_b$$

де  $\Omega^{ib}_b$  - матриця проєкцій абсолютної кутової швидкості, вимірюваних ДУС:

$$\Omega^{ib}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для вирішення рівняння необхідна матриця початкових значень напрямних косинусів  $C^{ib}_0$ , яку знаходять при початковій виставці БНС. За допомогою отриманої матриці перетворюють проєкції прискорень з пов'язаного базису в інерційні:

$$a_i = C^{ib} a_b.$$

Потім, інтегруючи абсолютне прискорення

$$V_i = a_i + g'_i$$

в інерціальній системі координат з урахуванням початкового значення абсолютної швидкості  $V_{i0}$ , отримують абсолютну швидкість  $V_i$ .

Інтегруючи інерційну швидкість  $V_i$ , з урахуванням початкового радіуса вектора  $r_{i0}$ , отримаємо радіус-вектор  $r_i$ .

Для використання формули, що відповідає основним рівнянням акселерометра, розраховують вектор гравітаційного прискорення  $g'_i(r_i)$ .

$$g'_X = -\frac{g'X}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_Y = -\frac{g'Y}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_Z = -\frac{g'Z}{r} \left(1 + 3\mu \frac{(X^2 + Y^2)}{r^2}\right);$$

$$g' = \frac{g_{\Sigma,0} a^2}{r^2} \left(1 - \beta \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad \beta = 1.437 \cdot 10^{-3}, \quad 3\mu = 3.27 \cdot 10^{-3}, \quad g_{\Sigma,0} = 9.81438 \text{ м/с}^2.$$

Рис.2.8. Більш точні вирази рівнянь

Тут величина радіуса-вектора  $r_i$ , що визначає положення об'єкта, пов'язана з його проєкціями співвідношенням  $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ .

Від інерційних декартових координат можна перейти до сферичних (рис.2.9): широти  $\varphi$ , абсолютної довготи  $\Lambda$  і відносної довготи  $\lambda$

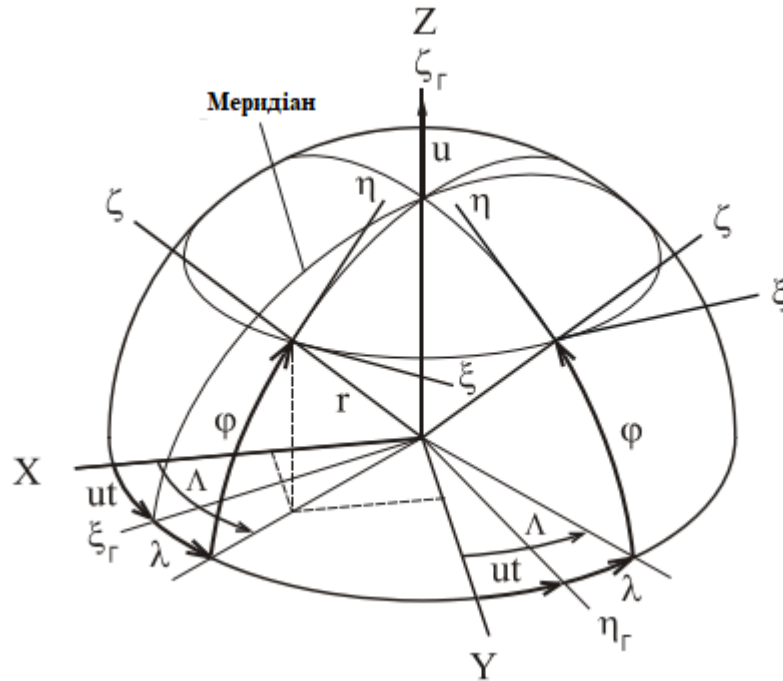


Рис.2.9. Системи координат

$$\varphi = \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \Lambda = \arctg \frac{Y}{X}, \quad \lambda = \Lambda - ut.$$

Рис.2.10. Визначення параметрів

Для визначення параметрів відносного руху (відносної швидкості, кутів курсу, крену і тангажу) необхідно знайти матрицю напрямних косинусів для перетворення інерційних координат в відносні  $C^{gi}$ . Це можна зробити, користуючись (рис.2.9.).

$C^{gi}$	$X$	$Y$	$Z$
$\xi$	$-\sin \Lambda$	$\cos \Lambda$	$0$
$\eta$	$\cos \Lambda \sin \varphi$	$\sin \Lambda \sin \varphi$	$\cos \varphi$
$\zeta$	$\cos \Lambda \cos \varphi$	$\sin \Lambda \cos \varphi$	$\sin \varphi$

Рис.2.11. Визначення  $C^{gb}$

Для визначення кутів курсу, крену і тангажа знайдемо матрицю напрям ляючих косинусів  $C^{gb}$ :

$$C^{gb} = C^{gi} C^{bi}$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}}\right), \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1 - (c_{32}^{gb})^2}}\right).$$

Рис.2.12. Визначення кутів

Складові абсолютної лінійної швидкості в проекціях на осі зі супутнього базису знаходять перепроєктування за формулою

$$V_g = C^{gi} V_i.$$

У скалярному вигляді  $V_\xi = -V_X \sin \Lambda + V_Y \cos \Lambda$ ,

$V_\eta = V_X \cos \Lambda \sin \varphi + V_Y \sin \Lambda \sin \varphi + V_Z \cos \varphi$ ,

$V_\zeta = V_X \cos \Lambda \cos \varphi + V_Y \sin \Lambda \cos \varphi + V_Z \sin \varphi$ .

Від абсолютних швидкостей можна перейти до відносних

$$v_E = V_\xi - uR_E \cos \varphi, \quad v_N \equiv V_\eta, \quad v_H \equiv V_\zeta.$$

При вирішенні рівняння Пуассона, досить вирішувати 6 диференціальних рівнянь, а ще три напрямних косинуса знаходити з співвідношень типу. У підсумку, реалізація цього алгоритму вимагає рішення 13 диференціальних рівнянь.

Розглянемо алгоритм в географічному супутньому базисі з рівнянням Пуассона. Оскільки основною прийнята система координат  $g$ , необхідно виконувати матрицю напрямних косинусів  $C^{gb}$  між осями пов'язаного  $b$  і з супровідного базису  $g$ . Для отримання  $C^{gb}$  використовують рівняння Пуассона, яке називають узагальненим рівнянням, оскільки в ньому враховано переносний рух

$$C^{gb} = C^{gb} \Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig} C^{gb}.$$

Для вирішення рівняння необхідна матриця початкових значень напрямних косинусів  $C^{gb}_0$ , яку знаходять при початковій виставці БНС.

За допомогою отриманої матриці перетворюють проекції прискорень з пов'язаного базису в супровідний:

$$a_g = C^{gb} a_b.$$

Відносне прискорення знаходять шляхом інтегрування рівняння

$$v_g = a_g - (u_g + \omega_g) \times v_g + g_g.$$

Для інтегрування рівнянь необхідно ввести початкове значення  $v_{g0}$ . При інтегруванні вводять початкові значення широти і довготи  $\varphi_0, \lambda_0$ .

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}}\right), \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1 - (c_{32}^{gb})^2}}\right).$$

Рис.2.13. Визначення кутів



При вирішенні рівняння Пуассона досить вирішувати 6 диференціальних рівнянь, а ще три напрямних косинуса знаходити з співвідношень. У підсумку, реалізація цього алгоритму вимагає рішення 12 диференціальних рівнянь.

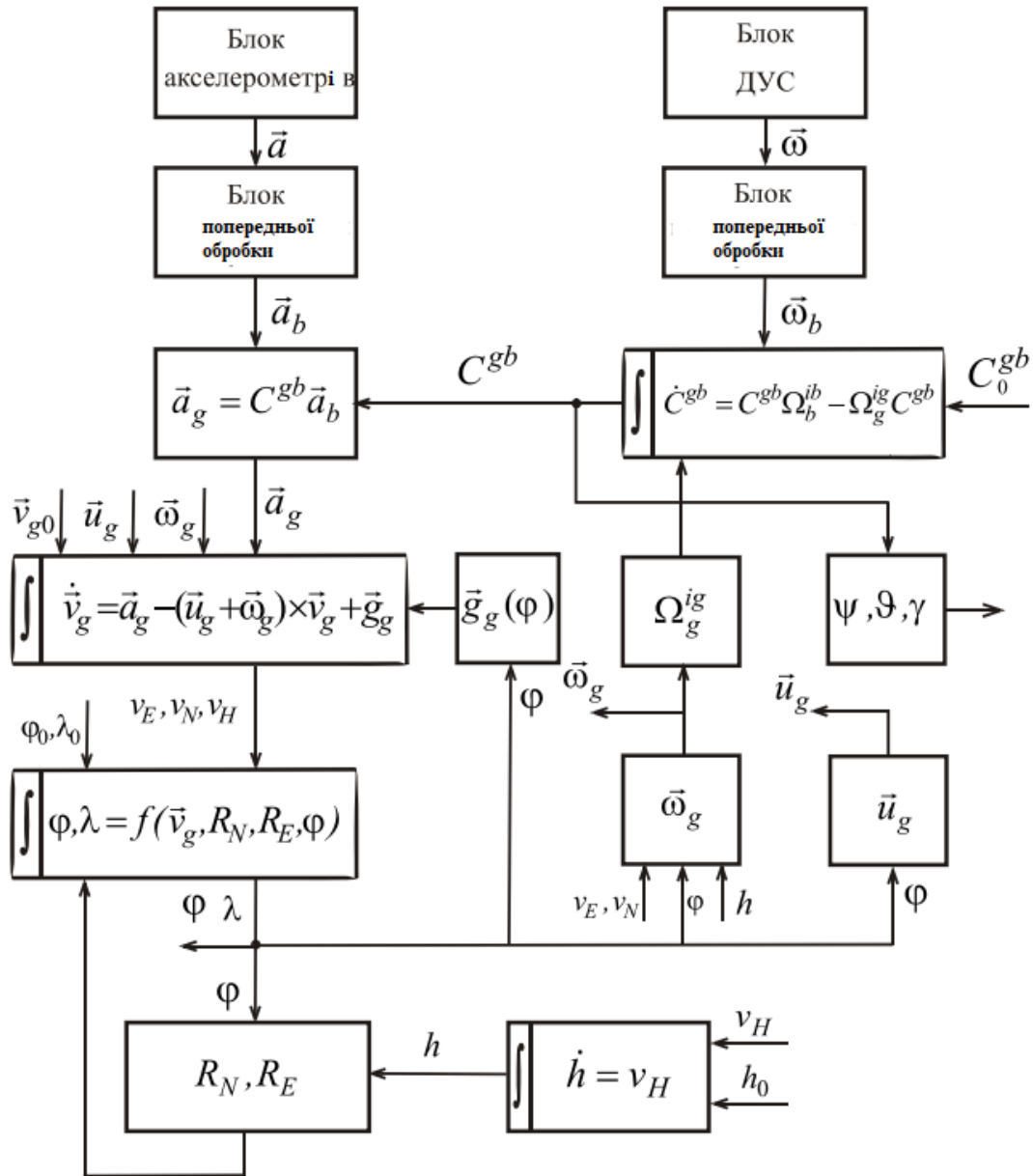


Рис.2.14. Структурна схема алгоритму БНС в географічному супровідному базисі

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi}.$$

Рис.2.15. Широту і довготу визначають шляхом інтегрування рівнянь

Розглянемо алгоритм з рівнянням Родріга-Гамільтона. Відмінною особливістю цього алгоритму є застосування замість кінематичного узагальненого рівняння Пуассона рівняння в параметрах Родріга-Гамільтона (параметрах кватерніона) виду

$$\Lambda^{gb} = \frac{1}{2} \Omega \cdot \Lambda^{gb}.$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_\xi) & -(\omega_y - \omega_\eta) & -(\omega_z - \omega_\zeta) \\ \omega_x - \omega_\xi & 0 & \omega_z + \omega_\zeta & -(\omega_y + \omega_\eta) \\ \omega_y - \omega_\eta & -(\omega_z + \omega_\zeta) & 0 & \omega_x + \omega_\xi \\ \omega_z - \omega_\zeta & \omega_y + \omega_\eta & -(\omega_x + \omega_\xi) & 0 \end{bmatrix}.$$

Рис.2.16. Матриця кутових швидкостей

В результаті вирішення цього диференціального рівняння знаходять параметри Родріга-Гамільтона  $\Lambda^{gb} = [\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]^T$ .

Отримавши параметри Родріга-Гамільтона, знаходять напрямні косинуси  $C^{gb}$  відповідно до формул. В іншому алгоритмі аналогічний попередньому. Відзначимо, що використання кінематичних рівнянь в параметрах Родріга-Гамільтона дозволяє зменшити число диференціальних рівнянь, які використовуються в алгоритмі, до 10. Наведемо ці рівняння в скалярній формі:

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -(\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_1 - (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_2 - (\omega_{zc} - \omega_\zeta)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_0 + (\omega_{zc} + \omega_\zeta)\lambda_2 - (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 = (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_0 - (\omega_{zc} + \omega_\zeta)\lambda_1 + (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = (\omega_{zc} - \omega_\zeta)\lambda_0 + (\omega_{yc} + \omega_\eta)\lambda_1 - (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{v}_E = a_\xi + (u \sin \varphi + \omega_\zeta)v_N - (2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h})v_\zeta, \\ \dot{v}_N = a_\eta - (u \sin \varphi + \omega_\zeta)v_E - \frac{v_N \cdot v_\zeta}{R_1 + h}, \\ \dot{v}_\zeta = a_\zeta + \frac{v_N^2}{R_2 + h} + \frac{v_E^2}{R_1 + h} + 2uv_E \cos \varphi + g; \\ \dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi}, \quad \dot{h} = v_\zeta. \end{cases}$$

Рис.2.17. Скалярна форма

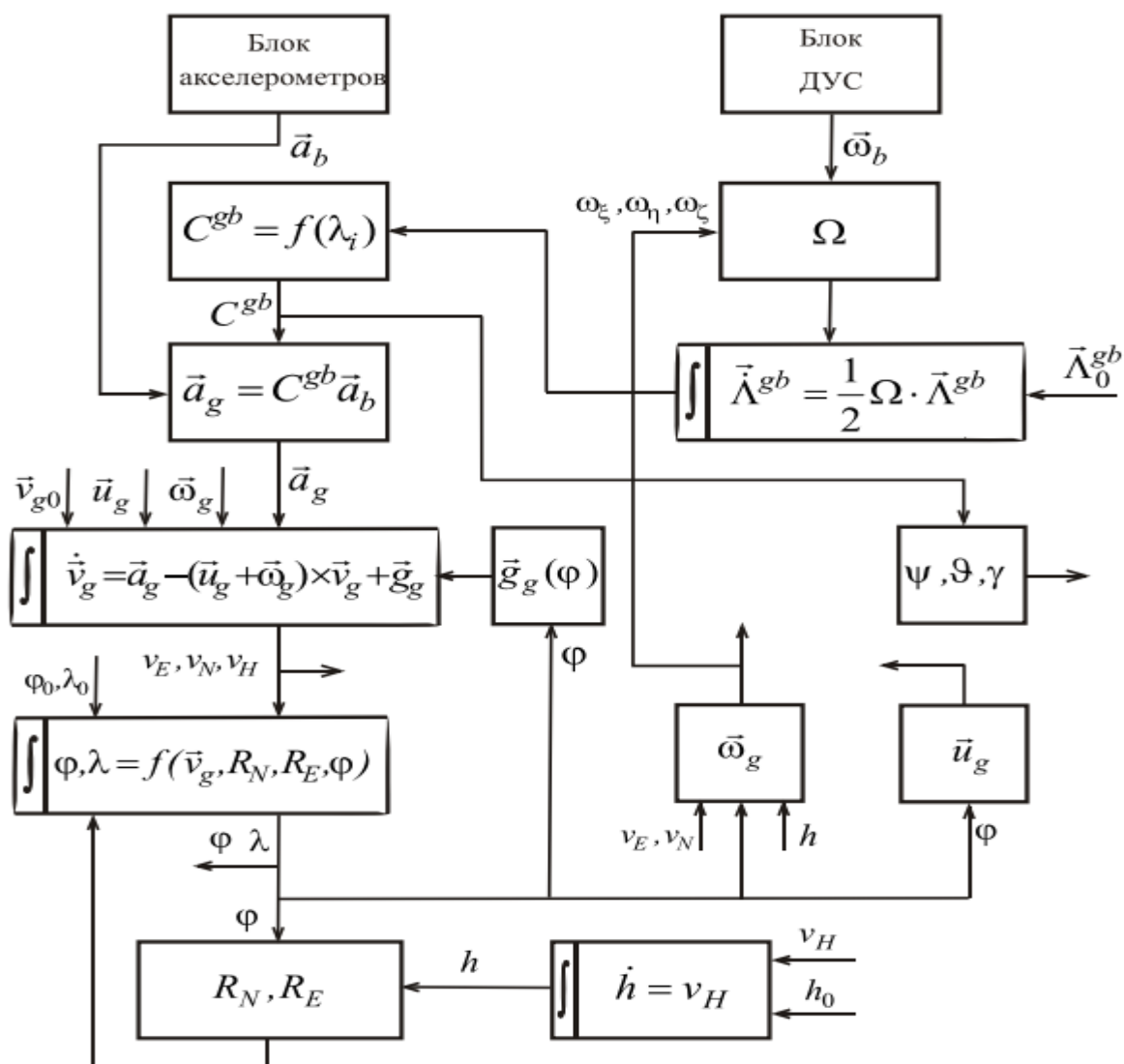


Рис.2.18. Структурна схема алгоритму з інтегруванням рівняння в параметрах Родріга-Гамільтона в географічному супровідному базисі

Розглянемо алгоритм з вектором орієнтації. В даному алгоритмі БНС для визначення орієнтації обчислюється вектор орієнтації  $\vec{\phi} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2} \Omega \vec{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \text{ctg} \frac{\phi}{2}\right) \Phi^2 \vec{\omega},$$

Рис.2.19. Інтегрування рівняння

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2}\Omega\vec{\phi}.$$

Рис.2.20. Спрощене рівняння

Необхідну для подальших обчислень матрицю напрямних до синусів можна визначити за точними формулами, або використовуючи наведену нижче чисельну процедуру. Коли знайдені компоненти вектора Ейлера  $\phi_{i,x}$   $\phi_{i,y}$   $\phi_{i,z}$  на інтервалі інтегрування обчислюється матриця напрямних косинусів  $\Delta C_i$ , що описує поворот від вихідної системи до пов'язаної на цьому інтервалі.

$$\Delta C = e^{\Phi} = I + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Phi^3 + \dots = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi).$$

Рис.2.21. Формула співвідношення (з урахуванням малого кута  $\phi$ ), де  $I$ - одинична матриця

Матрицю напрямних косинусів для  $i$ -го моменту  $C_i$  визначають шляхом перемноження  $C_i = C_{i-1} \Delta C_i$ .

Якщо вхідна інформація є абсолютна кутова швидкість, яка вимірюється датчиками кутової швидкості (вектор  $\omega$  і відповідна йому матриця  $\Omega$ ), то вектор Ейлера покаже поворот щодо вихідного інерціального базису  $i$ , а визначається матриця напрямних косинусів може бути визначена  $C \equiv C^{ib}$ .

$$\bar{\omega}^o = \bar{\omega} - (C^{gb})^T \bar{\omega}_g;$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_x = \omega_x^o - (-\omega_z^o \phi_y + \omega_y^o \phi_z) / 2; \\ \dot{\phi}_y = \omega_y^o - (\omega_z^o \phi_x - \omega_x^o \phi_z) / 2; \\ \dot{\phi}_z = \omega_z^o - (-\omega_y^o \phi_x + \omega_x^o \phi_y) / 2; \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Delta C_i^{gb} = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi);$$

$$C_i^{gb} = C_{i-1}^{gb} \cdot \Delta C_i^{gb};$$

$$\bar{a}_g = [a_\xi \quad a_\eta \quad a_\zeta]^T = C^{gb} \bar{a}_b;$$

$$\begin{cases} \dot{v}_E = a_\xi + (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_N - (2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h}) v_\zeta, \\ \dot{v}_N = a_\eta - (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_E - \frac{v_N \cdot v_\zeta}{R_1 + h}, \\ \dot{v}_\zeta = a_\zeta + \frac{v_N^2}{R_2 + h} + \frac{v_E^2}{R_1 + h} + 2uv_E \cos \varphi + g; \end{cases}$$

Рис.2.22. Рівняння алгоритму БНС з вектором орієнтації

$$\dot{\phi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi}, \quad \dot{h} = v_\zeta.$$

Рис.2.23. Визначення кутів

Відзначимо, що використання вектора орієнтації, так само, як і кінематичних рівнянь в параметрах Родріго-Гамільтона, дозволяє зменшити число диференціальних рівнянь, які використовуються в алгоритмі, до 8 - порівняно з 12 при використанні рівнянь Пуассона.

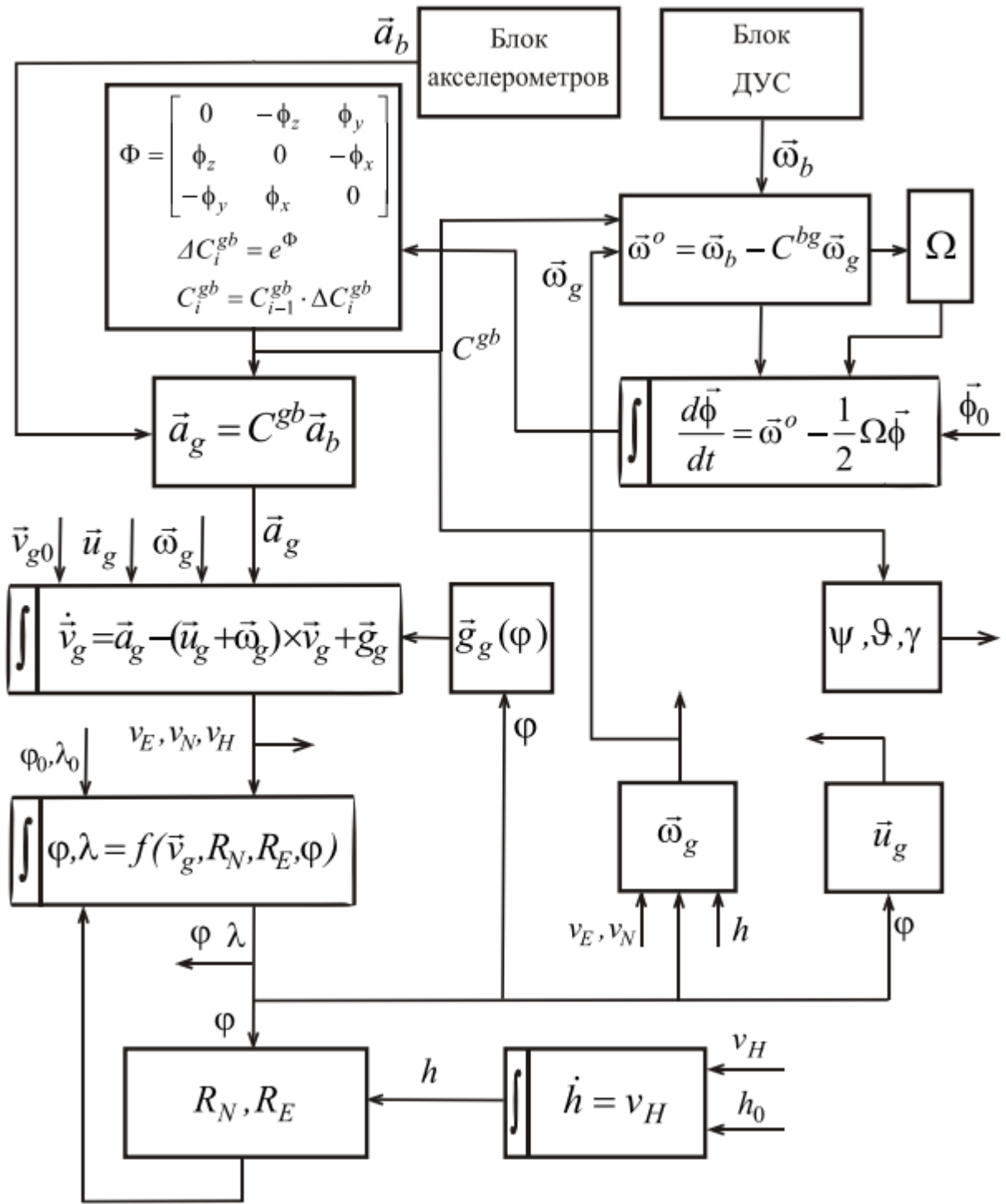


Рис.2.24. Структурна схема алгоритму з інтегруванням вектора орієнтації в географічному супровідному базисі

## 2.6. Початкова виставка БІНС

Алгоритми роботи БІНС описуються системою диференціальних рівнянь, і для їх вирішення необхідно задати початкові умови, які і визначаються в процесі початкової виставки.

Суть алгоритму БІНС, так само як і платформної ІНС, полягає в інтегруванні прискорень (двічі) для визначення поточних значень лінійної швидкості і координат об'єкту. Для інтегрування рівнянь необхідно задати початкові умови - 3 проекції початкової лінійної швидкості і 3 координати. БІНС не може автономно визначити ці початкові параметри, для цього потрібна зовнішня інформація. У багатьох випадках БІНС включають при нерухомому відносно Землі об'єкті. В цьому випадку проекції лінійної швидкості, наприклад, в осях географічного супровідного тригранника дорівнюють нулю. А вісь координати місця об'єкта повинні бути введені ззовні, наприклад, від приймача СНС.

Для визначення орієнтації також необхідно задати початкові кути. Це початкові умови для диференціальних рівнянь Ейлера. Для рівняння Пуассона необхідно задати початкову матрицю напрямних косинусів. Для рівнянь в кватерніонах необхідно, відповідно, поставити початковий кватерніон орієнтації.

На відміну від початкової лінійної швидкості і координат, початкові кути орієнтації можуть бути визначені автономно самою БІНС, хоча можливо отримати ці кути і ззовні.

У цьому підрозділі розглянемо початкову виставку БІНС на нерухому основу. У безплатформної інерціальної навігаційної системи початкова виставка, в основному, проводиться аналітично. За інформацією, яка поступала від чутливих елементів БІНС, визначаються початкові значення параметрів - кутів Ейлера-Крилова, напрямних косинусів, інших параметрів. Така виставка є автономною так як не вимагає залучення зовнішньої інформації. Розглянемо виставку БІНС з датчиками кутової швидкості. На (рис.2.25) показані  $O\xi\eta\zeta$  - географічний супровідний тригранник,  $Oxuz$  - тригранників, пов'язаних з блоком чутливих елементів БІНС.



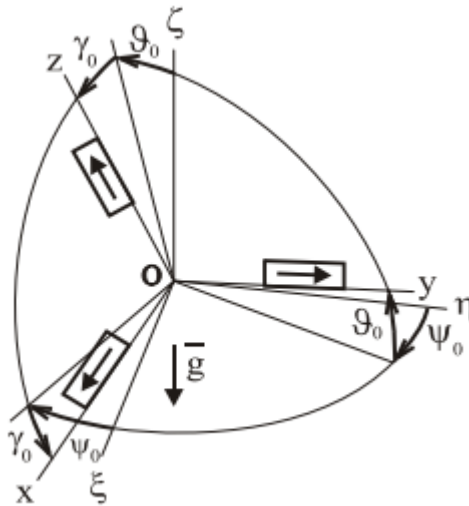


Рис.2.25. Початкове положення БІНС

Чутливими елементами являються акселерометри і, наприклад, датчики кутової швидкості (ДУС), який вимірює абсолютну кутову швидкість. Це можуть бути поплавкові ДУС, ДУС на динамічно - настроюваних гіроскопах, лазерні гіроскопи, волоконно - оптичні гіроскопи, твердотільні хвильові гіроскопи.

$C^{gb}$	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$c_{11} = \cos \gamma_0 \cos \psi_0 + \sin \gamma_0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{12} = \cos \vartheta_0 \sin \psi_0$	$c_{13} = \cos \psi_0 \sin \gamma_0 - \sin \psi_0 \cos \gamma_0 \sin \vartheta_0;$
$\eta$	$c_{21} = -\cos \gamma_0 \sin \psi_0 + \sin \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{22} = \cos \vartheta_0 \cos \psi_0;$	$c_{23} = -\sin \psi_0 \sin \gamma_0 - \cos \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$
$\zeta$	$c_{31} = -\cos \vartheta_0 \sin \gamma_0;$	$c_{32} = \sin \vartheta_0;$	$c_{33} = \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0.$

Рис.2.26. Таблиця напрямних косинусів

Акселерометри вимірюють проекції вектора прискорення сили тяжіння  $g$

$$g_x = g \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 = -gc_{31};$$

$$g_y = -g \sin \vartheta_0 = -gc_{32};$$

$$g_z = -g \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0 = -gc_{33}.$$

На нерухомому відносно Землі підставі проекції кутової швидкості обертання супутніх тригранників  $O\xi\eta\zeta$  мають вигляд

$$\omega_\xi = 0, \omega_\eta = u \cos \varphi, \omega_\zeta = u \sin \varphi,$$

де  $u = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ 1 / с}$  - кутова швидкість обертання Землі,  $\varphi$  - широта.

Датчики кутової швидкості вимірюють абсолютні кутові швидкості

$$\omega_x = \omega_\eta c_{21} + \omega_\zeta c_{31};$$

$$\omega_y = \omega_\eta c_{22} + \omega_\zeta c_{32};$$

$$\omega_z = \omega_\eta c_{23} + \omega_\zeta c_{33}.$$

Відмітимо, що  $\omega_y = \omega_\eta \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 + \omega_\zeta \sin \vartheta_0$ .

Для того, щоб забезпечити початковими умовами алгоритм функціонування БІНС, необхідна інформація про кутове положення об'єкту (кути  $\psi_0, \gamma_0, \theta_0$ ) і інформація про напрямні косинуси між осями  $Oxyz$  і  $O\xi\eta\zeta$ .

$$\vartheta_0 = \arcsin(-g_y/g) \text{ або } \vartheta_0 = -\arctg(-g_y \cdot \sin \gamma_0 / g_x) \text{ або } = \arctg\left(\frac{c_{32}}{\sqrt{1-c_{32}^2}}\right);$$

$$\gamma_0 = -\arctg(g_x/g_z), \quad g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2};$$

$$c_{31} = -g_x/g, \quad c_{32} = -g_y/g, \quad c_{33} = -g_z/g.$$

$$\psi_0 = \arccos(\omega_y - \omega_\zeta \sin \vartheta_0) / \omega_\eta \cos \vartheta_0.$$

$$c_{21} = (\omega_x - \omega_\zeta c_{31}) / \omega_\eta, \quad c_{22} = (\omega_y - \omega_\zeta c_{32}) / \omega_\eta, \quad c_{23} = (\omega_z - \omega_\zeta c_{33}) / \omega_\eta.$$

Отримавши шість напрямних косинусів, інші три можна знайти зі співвідношень:

$$c_{11} = c_{22} c_{33} - c_{23} c_{32},$$

$$c_{12} = c_{23} c_{31} - c_{21} c_{33},$$

$$c_{13} = c_{21} c_{32} - c_{22} c_{31}.$$

Якщо відомі всі напрямні косинуси, то початкове значення курсу можна знайти із співвідношення

$$\psi_0 = \operatorname{arctg} (c_{12} / c_{22} ).$$

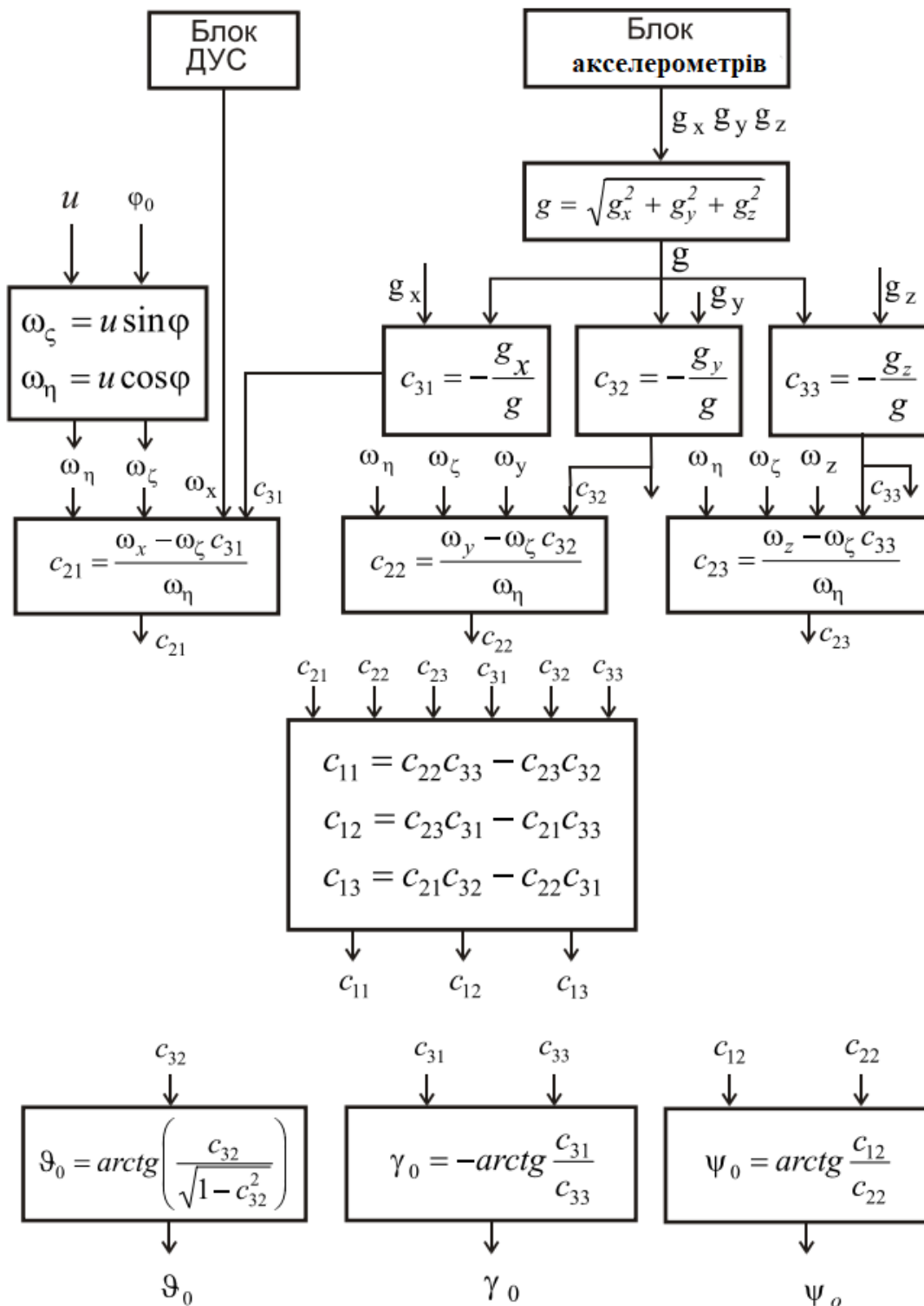


Рис.2.27. Структурна схема алгоритму початкової виставки

Приклад чисельної оцінки похибок наведено на (рис.2.28). Аналіз виразів, показує, що похибки на початковій виставці БНС залежать від широти і мають мінімуми в залежності від положення об'єкта в азимут. Ці висновки підтверджуються при моделюванні похибок на ЕОМ. З останнього графіка видно, що при реальних похибках чутливих елементів бажано, щоб вихідне положення об'єкта в азимуті було близько до значенням  $\psi_0 = -45^\circ, 135^\circ$ . Це відповідає залежності для даного прикладу, де визначальну роль відіграє похибка датчиків кутової швидкості.

$$\Delta\psi_0 = -(\cos \psi_0 \Delta\omega_x + \psi_0 \Delta\omega_y) / \omega_\eta$$

а) при  $\varphi = 50^\circ, \Delta\omega_i = 0.01^\circ/\text{год}, \psi_0 = 0^\circ$ ; б) при  $\varphi = 50^\circ, \Delta g_i = 1.e-4g, \psi_0 = 0^\circ$ ; в) при  $\Delta g_i = 1.e-4g, \Delta\omega_i = 0.01^\circ/\text{год}, \psi_0 = 0^\circ$ ; г) при  $\Delta g_i = 1.e-4g, \Delta\omega_i = 0.01^\circ/\text{ч}, \varphi = 50^\circ$

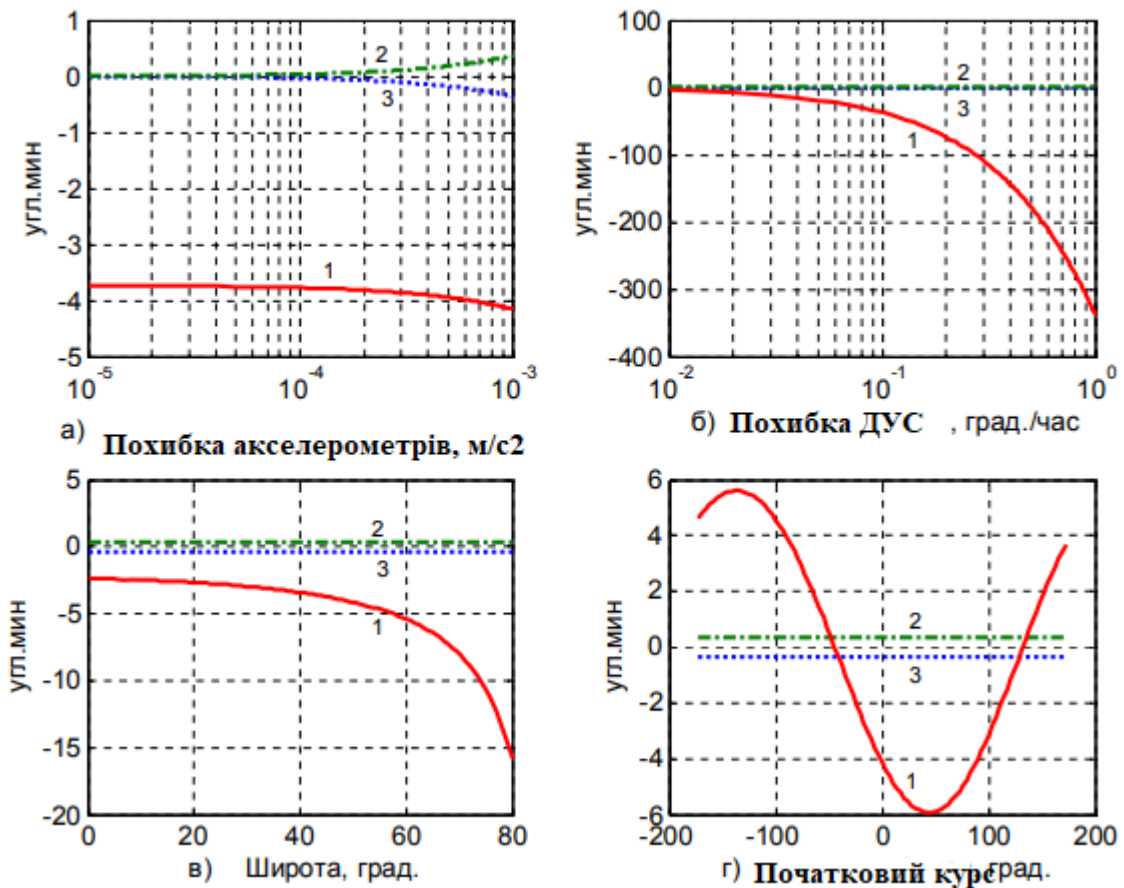


Рис.2.28. Похибки початкової виставки  $\Delta\psi_0 - 1$ ,  $\Delta\theta_0 - 2$ ,  $\Delta\gamma_0 - 3$ .

З цього розділу можна виділити, що: безплатформні інерціальні навігаційні системи стали основою навігаційних систем комплексів сучасних рухомих об'єктів. Це зумовлено тим, що вони надають повну інформацію про навігаційні параметри руху - курс, тангаж, крен, прискорення, швидкість руху та координата об'єкта. При цьому вони майже автономні, так як вимагають мінімум зовнішньої інформації. Завдяки можливості визначенню кутового положення об'єкта з високою точністю в будь-якому діапазоні кутів та високою частотою видачі інформації, БНС на теперішній час не має альтернативних варіантів. В даний час в системі інерціальної навігації починають широко застосовувати БНС на основі волоконно-оптичних гіроскопів із замкнутим контуром зворотної зв'язку.

Алгоритми функціонування БНС можуть відрізнятися від системи координат, прийнятої для основного, виду рівнянь орієнтації, які використовують формозапис прискорень, обраний методом численного інтегрування та інші. БНС може відрізнятися від використання гіроскопічних вимірювачів. Тому алгоритми БНС досить різні.

## РОЗДІЛ 3. Методи оптимальної фільтрації похибок в системах ІНС

### 3.1. Метод формування вимірювань для компенсації похибок автономної ІНС

Сучасні інерціальні навігаційні системи, що складаються з акселерометрів, розташованих на гіростабілізованій платформі, мають похибки, обумовлені, в основному, дрейфом гіроприладів. Одною з причин появи дрейфу гіроскопів є перехресні кутові швидкості, що виникають при здійсненні об'єктом, на якому встановлена ІНС, складного руху.

Найбільш повна компенсація похибок системи можлива за допомогою алгоритму лінійної фільтрації з використанням зовнішнього джерела інформації. Однак ІНС, яка коректується від зовнішнього датчика інформації, втрачає таку свою цінну якість, як автономність.

Компенсація помилок ІНС за допомогою методів лінійної фільтрації без використання зовнішніх вимірювань відома тільки для випадку руху несучої ІНС об'єкта з постійною швидкістю. При цьому в якості рівнянь об'єкта в алгоритмі фільтрації використовуються рівняння помилок автономної ІНС, а сигнали з акселерометрів в умовах руху об'єкта з постійною швидкістю приймаються за вимірювання. У практичних додатках об'єкт здійснює, як правило, складно прискорений рух, тому використовувати цей підхід для компенсації помилок не представляється можливим. Підвищити точність вихідної інформації ІНС, використовуючи тільки внутрішні зв'язки, годі й накладаючи обмеження на режим польоту об'єкта.

Компенсація помилок ІНС передбачає формування сигналів корекції, пропорційних помилок системи в визначенні швидкості, кутах відхилення ГСП щодо супроводжувачого тригранника і дрейфу ГСП.

<i>Кафедра авіоніки</i>							
<i>Виконав</i>	Школьний С.І.			Безплатформна інерціально-навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою	<i>Літ.</i>	<i>Арк.</i>	<i>Акрушів</i>
<i>Керівник</i>	Положевець Г.А.				1	8	55
<i>Консульт.</i>							85
<i>Н-контр.</i>	Левківський В.В.				<b>173 «Авіоніка»</b>		
<i>Зав. каф.</i>	Павлова С.В.						

Ці помилки автономної ІНС в відсутності зовнішнього датчика інформації не піддаються безпосередньому виміру, тому для формування компенсаційного сигналу необхідно оцінити помилки системи за допомогою алгоритму фільтрації. В якості рівнянь об'єкта в алгоритмі фільтрації прийняті рівняння помилок ІНС, виражені через кути відхилення ГСП щодо опорної системи координат, а в якості вимірювань можна прийняти кути відхилення ГСП від площини горизонту і заданого напрямку в азимут, сформовані на основі інформації, що знімається з датчиків кутів прецесії гіроскопів. Розглянемо спосіб формування вимірювань докладніше.

Рухи гіроскопів щодо ГСП описуються наступною системою рівнянь:

$$J\delta + h\delta + H\Phi_1 = H\Phi_2\delta + H\Phi_3\Phi_2 + M_1$$

$$J\lambda + h\lambda + H\Phi_2 = H\Phi_1\lambda - H\Phi_3\Phi_1 + M_2$$

$$J\nu + h\nu + H\Phi_3 = H\Phi_2\nu - H\Phi_1\Phi_2 + M_3$$

де  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  - кутові координати орієнтації ГСП щодо обраного супроводжуючого тригранника;  $\delta, \lambda, \nu$  - кути прецесії гіроскопів;  $J$  - момент інерції гіроскопа відносно осі прецесії;  $H$  - власний кінетичний момент гіроскопа;  $h$  - питомий момент сил швидкісного тертя навколо осі прецесії гіроскопа;  $M (i = 1, 2, 3)$  - інші малі ті, що підбурюють моменти, мають випадковий характер, і в подальшому не розглядаються. Рівняння руху гіроскопів в першому наближенні можна представити в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} J\delta + h\delta + H\Phi_1 &= 0 \\ J\lambda + h\lambda + H\Phi_2 &= 0 \\ J\nu + h\nu + H\Phi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

З огляду на, що кути прецесії безпосередньо вимірюються датчиками кутів гіроскопів, кути орієнтації ГСП в першому наближенні визначаються наступним чином:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{H} \int (J\delta + h\delta) dt$$



$$\Phi_2 = -\frac{i}{H} \int (J\lambda + h\lambda) dt$$

$$\Phi_3 = -\frac{i}{H} \int (J\nu + h\nu) dt$$

Підставим вираження першого наближення в вихідну систему і визначимо кути орієнтації ГСП у другому наближенні

$$\Phi_1 = -\frac{J_r}{H} \delta - \frac{h}{H} \delta + \frac{1}{H} \int \left[ (J_r \ddot{\lambda} + h \dot{\lambda}) \delta - \frac{1}{H} (J_r \ddot{\vartheta} + h \dot{\vartheta}) (J_r \dot{\lambda} + h \lambda) \right] dt$$

$$\Phi_2 = \frac{J}{H} \dot{\lambda} + \frac{h}{H} \lambda + \frac{1}{H} \int \left[ (J \ddot{\delta} + h \dot{\delta}) \lambda + \frac{1}{H} (J \ddot{\vartheta} + h \dot{\vartheta}) (J \dot{\delta} + h \delta) \right] dt$$

$$\Phi_3 = -\frac{J}{H} \dot{\vartheta} - \frac{h}{H} \vartheta + \frac{1}{H} \int \left[ (J \ddot{\lambda} + h \dot{\lambda}) \vartheta + \frac{1}{H} (J \ddot{\delta} + h \dot{\delta}) (J \dot{\lambda} + h \lambda) \right] dt$$

Рис.3.1. Кути орієнтації ГСП

Таким чином, отримані формалізовані залежності кутів орієнтації ГСП від кутів прецесії гіроскопів. Сформовані згідно з формулами кути орієнтації можна використовувати в алгоритмі оцінки в якісних вимірах. Однак слід звернути увагу, що отримані кути  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  відрізняються від істинних кутів орієнтації ГСП. Відмінність обумовлена тим, що підінтегральні функції отримані методом послідовного наближення. Кути орієнтації ГСП у третьому наближенні буде міститися в підінтегральних функціях членів третього порядку малості, кількісної ролі якої настільки незначні, що їх, як правило, не вживають і обмежують обчисленням кутових орієнтацій ГСП лише у другому наближенні. Таким чином, використовуючи інформацію з датчиків кутів гіроскопів, можна неперервно обчислити кути орієнтації ГСП. У якості алгоритму оцінки необхідного використання адаптивний алгоритм, здатний функціонувати при відсутності апріорної інформації про статистичні характеристики вхідних та обчислювальних шумів. Така необхідність обумовлена тим, що у практичних додатках коваріаційної матриці вхідних шумів, що включає зміщення нуля і дрейф акселерометрів, дрейф гіроскопів, як правило, невідома. Апріорна коваріаційна матриця

імерційного шуму включає дисперсії помилки формування кутів відхилень ГСП, обумовлених прийнятими наближеннями, також невідома.

Представлений адаптивний фільтр за сформованим вимірюванням відновлюється весь вектор стану, що включає помилки ІНС у визначенні швидкості, кутів відхилення та дрейфи ГСП. Оцінка тривалості стану використовується для компенсацій похибок ІНС у вихідній інформації.

Представлений метод компенсації помилок ІНС дозволяє в достатньому ступені компенсації похибки системи, не за допомогою зовнішнього джерела інформації, тобто збереження автономності систем. У відомих методах компенсації помилок ІНС як автономної, так і тої що коректує від зовнішнього джерела інформація із застосуванням алгоритмів фільтрації, компенсації азимутального відхилення ГСП щодо супроводжуючого тригранника не виробляється. Обумовлено це тим, що по вимірюванням положень або швидкості азимутального положення об'єкта є не спостережуваним. Розроблений спосіб формування вимірів для алгоритму фільтрації дає можливість оцінити азимутальний кут відхилення ГСП і компенсувати його у вихідній інформації ІНС.

Використання запропонованого методу компенсації помилок ІНС дозволяє значно підвищити точність вихідної інформації про навігаційні параметри об'єкта. Найкраща повна компенсація помилок ІНС виробляється з використання методів лінійної фільтрації. Однак компенсацію похибок ІНС можна засудити, застосовуючи лише внутрішні зв'язки системи та модель помилки ІНС. Формування компенсаційних сигналів передбачається проводити на основі інформації з датчиків кутів гіроскопів.

Компенсаційні сигнали, пропорційні обуреним моментам, подаються на моменти датчиків гіроскопів або враховуються в вихідній інформаційній системі. При компенсації помилок ІНС в вихідній інформації необхідно сформувати сигнали, пропорційні кутам відхилення ГСП щодо супроводжуючого тригранника і помилок ІНС

в визначенні швидкості. Кути відхилення ГСП щодо супроводжувачого тригранника визначаються за допомогою інтегрування виразів для його кутових швидкостей, отриманих в першому приближенні. Похибки ІНС у визначенні швидкості формуються в відповідності до рівнянь помилок ІНС наступним чином:

$$\delta V_x = \int (-g\Phi_1 + f_1\Phi_3)dt,$$

$$\delta V_y = \int (g\Phi_2 + f_x\Phi_3)dt.$$

де  $f_x, f_y$  - проекції абсолютного прискорення ЛА на осі ГСП.

У рівняннях кути відхилення ГСП щодо супроводжувачого тригранника визначаються виразами, а проекції горизонтального абсолютного прискорення ЛА на осі ГСП вимірюються безпосередньо акселерометрами. Цей метод відрізняється меншою точністю. Щодо низької точності компенсації обумовлено тим, що сформовані кути відхилення платформи не адекватні істинним кутам їх відхилення щодо супроводжувачого тригранника. До переваг запропонованого методу формування компенсаційного сигналу слід віднести значно менший обсяг машинної пам'яті, необхідний для реалізації компенсаційних помилок. Таким чином, отримані сигнали, що дозволяють компенсувати помилки ІНС в вихідну інформацію. Ці сигнали легко реалізовані на борту ЛА в БЦВМ. Компенсаційні сигнали являють собою залежності кутів відхилення і дрейфів ГСП, а також помилок ІНС у визначенні швидкості від кутів прецесії гіроскопів.

Застосування запропонованого способу компенсації помилок ІНС дозволяє значно підвищити точність вихідної інформації про навігаційні параметри ЛА. Представлені алгоритми дозволяють підвищити точність навігаційної інформації як в автономному режимі функціонування ІНС так і при корекції від зовнішніх вимірників.

Алгоритм фільтра Калмана через свою уявну простоту і легкість реалізації є основним засобом обробки вимірювань в навігаційних системах, які використовують супутниковий метод визначень. Для встановлення ваг надходячих вимірювальних даних

потрібні статистичні характеристики їх помилок, а також рівняння, що надають зв'язок змінних, що визначають поточний стан системи, з вимірами і між собою. Фільтр Калмана є інструментом, що дозволяє на основі математичної моделі системи побудувати оптимальні оцінки змінних по виконаним вимірам. До переваг алгоритму слід віднести його рекуррентну природу, ефективно яка виявляється при роботі в реальному часі.

Використання фільтра Калмана для корекції ІНС ЛА важко через відсутність апріорної інформації про вхідні і вимірювальні шуми. Застосування адаптивного фільтра дозволяє істотно підвищити точність навігаційних визначень ЛА. В автономному режимі корекція здійснюється шляхом використання адаптивного алгоритму для якого сформовані вимірювальні сигнали на основі сигналів з датчиків кутів прецесії.

### 3.2. Оптимальний фільтр Калмана

Для переходу до побудови оптимального фільтра Калмана постановкою та вирішенням задач оптимальної фільтрації в понятті Н. Винера. Багатомірна система визначається як система з  $l$  - входами та  $n$  - виходами, які пов'язані за допомогою матричної імпульсної перехідної функції (МИПФ)  $K(t, \tau)$ . Нехай  $Y(t)$  -  $l$  - мірний вектор входу фільтра,  $X(t)$  -  $n$  - мірний вектор виходу. Тоді зв'язок між векторами  $X(t)$  і  $Y(t)$  визначається інтегралом:

$$X(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) Y(\tau) d\tau$$

$$X(t_0) = 0$$

Нехай  $Y(t)$  - дійсний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією  $R_{yy}(t, \tau)$ . Позначимо норму похідною квадратної матриці  $B$  через  $\|B\|$  і визначимо її наступним чином:

$$\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)}$$

Нехай на вхід багатовимірного фільтра надходить спотворений сигнал як сума корисного сигналу  $M(t)$  і перешкоди  $N(t)$ , тобто

$$Y(t) = M(t) + N(t)$$

де  $M(t)$  і  $N(t)$  - 1 - мірні вектори з відомими кореляційними функціями  $R_{MM}(t, \tau)$  і  $R_{NN}(t, \tau)$ .

Припустимо, що існує ідеальний вихід  $X(t)$  деякої системи, який визначає бажаний вихід і пов'язаний з корисним сигналом співвідношенням 41

$$X(t) = \int_{t_0}^t K_{\text{ИД}}(t, \tau) \times M(\tau) d\tau$$

де  $K_{\text{ИД}}(t, \tau)$  - МПФ ідеальної системи. Розглянемо вектор помилок

$$X'_{\sigma}(t) = X(t) - X(t)$$

Завдання полягає в тому, щоб вибрати таку фізичну реалізовану матричну ПФ,  $K^*(t, \tau)$ , щоб математичне сподівання квадрата норми помилок було мінімальним

$$M\{\|X_{\sigma}(t)\|^2\} = \min K(t, \tau)$$

де  $K(t, \tau) = 0$  для  $t < \tau$ , а норма має вигляд  $\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)}$ .

Залежно від того, яке завдання стоїть: прогнозування, фільтрація або згладжування, визначається МПФ ідеальної системи. У задачі фільтрації  $X(t) = M(t)$ , тобто  $K_{\text{ИД}}(t, \tau) = I \cdot \delta(t - \tau)$ .

При такій постановці завдання мінімум середньоквадратичної помилки визначається МПФ,  $K^*(t, \tau)$ , одержуваної з узагальненого рівняння Вінера - Хопфа для багатовимірних систем:

$$R_{MY}(t, \tau) = \int_0^t K^*(t, s) \cdot R_{YY}(s, \tau) ds$$

Відомо, що якщо на вхід системи надходить випадковий сигнал  $Y(t)$ , що є стаціонарним випадковим процесом, оптимальну матричну передавальну функцію  $K^*(s)$  багатовимірного фільтра можна отримати факторизації раціональної матриці спектральних щільностей. Отже, постановка задачі фільтрації за Колмогоровим -Вінера така:

- встановлено порядок взаємно корельованих випадкових процесів у вигляді функцій часу  $m(t)$  і  $n(t)$  з кореляційними функціями  $R_{mm}(\tau)$ ,  $R_{nn}(\tau)$ , спектральні щільності  $S_{mm}(\omega)$  і  $S_{nn}(\omega)$ ;  $m(t)$  і  $n(t)$  - стаціонарні, ергодичні, центровані випадкові функції.
- потрібно знайти ІФП  $k^*(\tau)$  фільтра, оптимальним чином виділяє реалізацію випадкового процесу  $m(t)$  у вигляді деякого сигналу  $X(t)$  в умовах, коли на його вхід надходить аддитивна суміш  $m(t) + n(t)$ .

$$\sigma^2(t) = m(t) - X(t), \text{ т.е. } M[\sigma^2(t)] = \sigma^2 = \min$$

$$R_{Ym}(\tau) = \int_0^{\infty} k^*(u) \cdot R_{YY}(\tau - u) du \quad \text{при } \tau \geq 0$$

Рис.3.2. Критерій оптимальності є мінімум СКО

тому  $R_{YY}(\xi) = R_{YY}(-\xi)$ , причому  $R_{YY}(\tau)$  - кореляційна функція сигналу  $Y(t) = m(t) + n(t)$ , визначається за формулою

$$R_{YY}(\tau) = R_{mm}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$R_{Ym}(\tau)$  - взаємна кореляційна функція сигналу на вході  $Y(t)$  і корисного вхідного сигналу  $m(t)$ . Після перетворення по Фур'є:

$$S_{Ym}(s) / s=j\omega = W^*(s) S_{YY}(s) / s=j\omega$$

У разі ж нестационарного випадкового процесу рішення інтегрального рівняння Вольтера 1-го роду навіть для скалярного випадку представляє серйозні труднощі, не кажучи вже про векторному. Калман в своїх роботах модифікував постановку завдання

багатовимірної фільтрації Вінера, надавши їй форму проблеми простору стану. В результаті такої модифікації був отриманий фільтр Калмана, який здійснює процедуру рекурсивного оцінювання, коли підлягає оцінюванню сигнал є вихідним сигналом лінійної нестационарної динамічної системи. Нехай вхідний випадковий процес фільтра  $Y(t)$  є зашумленим виходом формуючого фільтра, описуваного наступним рівнянням:

$$X^*(t) = A(t) X(t) + G(t) N_1(t)$$

$X(t_0) = X^0$  - випадковий вектор початкових умов, де  $N_1(t)$  - гаусовський білий шум з статистичними характеристиками:

$$M \{N_1(t)\} = 0, R_{N_1 N_1}(t, \tau) = S_1(t) \delta(t - \tau)$$

$S_1(t)$  - позитивно певна симетрична матриця інтенсивності. Припускаємо відсутність кореляції між шумом  $N_1(t)$  і вектором  $X^0$ , тобто

$$M \{X^0 N_1^T(t)\} = 0$$

Доповнимо умови попередніх рівнянь матричним алгебраїчним рівнянням виходу вимірювань:

$$Y(t) = C(t) X(t) + N_2(t)$$

де  $N_2(t)$  - гаусовській білий шум з характеристиками:

$$M \{N_2(t)\} = 0, R_{N_2 N_2}(t, \tau) = S_2(t) \delta(t - \tau)$$

Причому сигнали  $N_1(t)$  і  $N_2(t)$ , а також  $X(t)$  і  $N_2(t)$  некорельовані. Припускаємо, як і раніше, що шум  $N_1(t)$  моделі джерела повідомлень і  $N_2(t)$  шум вимірювань є некорельованими білими гаусовими шумами. Тоді рішення задачі оптимального фільтра з несуміщеною оцінкою і мінімальною середньоквадратичною помилкою виходить шляхом вибору матриці коефіцієнтів

$$K_{\phi}^*(t) = D_{\sigma\sigma}(t) C^T(t) S_2^{-1}(t) \quad t \geq t_0$$

Рис.3.3. Вибір матриці коефіцієнтів

$$\hat{X}^* = [A(t) - K_{\Phi}^*(t)C(t)]X + K_{\Phi}^*(t)Y(t)$$

Рис.3.4. Для диференціального рівняння оптимального фільтра

$$\begin{aligned} \dot{D}_{\sigma\sigma}(t) = & A(t) \cdot D_{\sigma\sigma}(t) + D_{\sigma\sigma}(t) \cdot A^T(t) + G(t) \cdot S_1(t) \cdot G^T(t) \\ & - D_{\sigma\sigma}(t) \cdot C^T(t) \cdot S_2^{-1}(t) \cdot C(t) \cdot D_{\sigma\sigma}(t) \end{aligned}$$

Рис.3.5.  $D_{\sigma\sigma}(t)$  - рішення матричного рівняння Ріккати з початковою умовою  $D_{\sigma\sigma}(t_0) =$

$$D_{00}$$

Розглянемо дискретне лінійне рівняння, що описує динамічний об'єкт, наприклад, зміна похибок ІНС.

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1, k}x_k + G_{k+1, k}W_k$$

де  $x_k$  -  $n$ -вектор стану;  $W_k$  -  $r$ -вектор вхідного обурення;  $\Phi_{k+1, k}$  -  $(n \times n)$  - матриця об'єкта;  $G_{k+1, k}$  -  $(n \times r)$  - матриця входу.

Вхідні обурення передбачаються  $r$ -мірним дискретним аналогом гаусового білого шуму з нульовим математичним очікуванням і відомою ковариаційною матрицею:  $M(W_j W_k^T) = Q_k \delta_{j, k}$ , де  $Q_k$  - невід'ємна певна матриця розмірності  $(r \times r)$ ;  $\delta_{j, k}$  - символ Кронекера,

що означає  $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k \\ 0, & \text{якщо } j \neq k \end{cases}$

Частина вектора стану вимірюється:  $z_{k+1} = H_{k+1}x_{k+1} + V_{k+1}$

Тут  $z_{k+1}$  -  $m$ -вектор вимірювань;  $V_{k+1}$  -  $m$ -вектор помилок вимірювання;  $H_{k+1}$  -  $(m \times n)$  - матриця вимірювань. Помилки вимірів передбачаються  $m$ -мірним дискретним аналогом гаусового білого шуму, для якого  $M(V_{k+1}) = 0$ ,

$$M(V_j V_{k+1}^T) = R_{k+1} \delta_{j, k+1};$$



де  $R_{k+1}$  - невід'ємна певна матриця розмірності  $(m \times m)$ .

Помилки вимірювання (інакше вимірювальний шум) і вхідні обурення (інакше вхідний шум) некорельовані:  $M(V_j W_k^T) = 0$  при будь-яких  $j$  і  $k$

Початкове значення вектора стану вважаємо гаусовим випадковим вектором з нульовим математичним очікуванням, незалежних від вхідних збурень помилок вимірів:  $M(x_0 W_k^T) = 0$ ;  $M(x_0 V_{k+1}^T) = 0$  для будь-якого  $k$ .

Коваріаційна матриця  $M(x_0 x_0^T) = P_0$  є невід'ємно певну матрицю розмірності  $(n \times n)$ . На основі математичного очікування об'єкта і апріорної інформації про статистичні характеристики вхідних і вимірювальних шумів і, здійснюючи вимірювання частини вектора стану, потрібно оцінити вектор стану так, щоб функціонал  $J$  приймав мінімальне значення.

$$J_k = M[(x_k - \hat{x}_k)^T (x_k - \hat{x}_k)] = \min$$

Рис.3.6.  $x_k$  оцінка вектора стану.

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{x}_k + K_{k+1} v_k$$

Рис.3.7. Оптимальна оцінка вектора стану

де  $K_{k+1}$  -  $(n \times m)$  -матриця посилення фільтра;  $v_{k+1} = z_{k+1} - H_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{x}_k$ ,  $x_k$  - обновлювана послідовність. Рівняння має наступний фізичний сенс. На основі оцінки вектора стану і матриці об'єкта проводиться прогноз для наступного кроку обчислення оцінки. Одночасно проводиться корекція цього прогнозу за допомогою використання обновлюваної послідовності. Обновлювана послідовність являє собою суму помилки прогнозу і вимірювального шуму. Матриця посилення фільтра визначає вагу, з яким входить обновлювана послідовність в оцінку вектора стану. В разі проведення ідеальних вимірів, тобто коли вимірювальний шум відсутня, матриця посилення вибирається

максимальною. Чим більше вимірювальний шум, тим з меншою вагою враховується обновлювана послідовність при формуванні оцінки вектора стану.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= \Phi_{k+1, k} \hat{x}_k + K_{k+1} v_{k+1} \\ P_{(k+1)/k} &= \Phi_{k+1, k} P_k \Phi_{k+1, k}^T + Q_k \\ K_{k+1} &= P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{(k+1)/k}\end{aligned}$$

Рис.3.8. Вигляд фільтра Калмана

Тут  $P_{(k+1)/k}$  - завжди апріорна ковариаційна матриця помилок оцінювання;  $P_{k+1}$  - апостеріорна ковариаційна матриця помилок оцінювання. За допомогою фільтра Калмана здійснюється не тільки відновлення всього вектора стану системи, а й пригнічується вплив вимірювального шуму. Початковими умовами на кожному новому циклі алгоритму служать оцінка стану системи і величина, що характеризує її похибку. У разі скалярної змінної такої характеристики є дисперсія, яка тим більше, чим сильніше розкид індивідуальних значень щодо справжнього. Поширена оцінка дисперсії – середньоквадратичне відхилення, тобто квадрат стандартного відхилення, - висловлює ступінь розкиду величини щодо середнього. Узагальненням дисперсії для вектора, тобто сукупності скалярних величин, служить ковариаційна матриця. Її діагональні елементи є дисперсіями відповідних складових вектора, а недіагональні - ковариація, що характеризують взаємозв'язок між парою складових. Сукупність вимірів, віднесених до кожного з моментів часу, узагальнює вектор вимірювань. Алгоритм послідовно обробляє знову надходячих векторів вимірювань, враховуючи при цьому значення, обчислені на попередньому циклі. Ця особливість відрізняє алгоритм фільтра Калмана від нерекурентних алгоритмів, яким для роботи потрібно зберігати весь масив даних, що обробляються. На наступному кроці за допомогою оброблюваних на даному циклі вимірювань уточнюються початкові умови. Для цього алгоритм обчислює вагу поправок до них на основі ковариаційних матриць оцінки стану і вимірювань. Чим меншою

похибкою характеризуються вимірювання в порівнянні з оцінкою стану системи, тим більшу вагу вони отримують. Відносні ваги невідомих, що визначають вектор стану системи, залежать від ступеня їх впливу на вектор вимірів: більшу вагу отримують ті змінні, внесок яких в вимірюванні більше. Уточнення початкових умов на основі надійшли на даному циклі вимірювань, в загальному випадку, призводить до зменшення невизначеності в оцінці стану системи. виправлені таким чином початкові умови і є вихідними даними фільтра Калмана на кожному циклі. На заключному етапі роботи алгоритму відбувається підготовка до вступу нового вектора вимірювань. На основі заданого лінійного перетворення, зв'язує наступний вектор стану з попереднім, прогнозується оцінка стану системи, віднесена до моменту наступного вимірювання. При побудові коваріаційної матриці прогнозованого вектора стану фільтром Калмана враховується можливість спотворення моделі, яка описує поведінку системи, деяким випадковим процесом з відомими статистичними параметрами. Оскільки конкретні значення обурюючого ефекту не можуть бути відомі, ця обставина сприяє підвищенню невизначеності прогнозу. По мірі послідовної обробки нових вимірів відбувається накопичення фільтром корисної інформації, тому якщо елементи вектора стану впевнено виражаються через виміряні величини, то сумарна похибка оцінок, як правило, повинна знижуватися. Однак оскільки разом з поліпшенням точності оцінок на етапі їх уточнення має місце її зниження при побудові прогнозу, то ці тенденції, компенсуючи один одного, надалі призведуть до стабілізації невизначеності, що характеризує оцінку стану системи. В випадку відсутності фактора, що вносить обурення в процес переходу системи з одного стану в інший, похибка оцінок в результаті досягне нуля. Змінюється в процесі роботи алгоритму ступінь невизначеності оцінки стану системи тягне за собою і зміну ваг, що обчислюються на другому кроці; дана обставина виділяє фільтр Калмана як алгоритм з змінними вагами.

Традиційні методи оцінювання передбачають використання повної математичної моделі досліджуваного процесу. Ця обставина ускладнює реалізацію традиційних

алгоритмів оцінювання на борту об'єкта в умовах дефіциту машинної пам'яті. Скалярний підхід дозволяє істотно зменшити обсяг машинної пам'яті, необхідний для організації процедури оцінювання, а також скоротити час рахунку. Скалярні алгоритми являють собою формули зі змінними коефіцієнтами, що дозволяють проводити оцінювання окремо кожної компоненти вектора стану. Для синтезу скалярних алгоритмів оцінювання необхідно сформулювати скалярне рівняння моделі для компоненти вектора стану і приведені вимірювання. Для перевірки працездатності алгоритмів оцінювання використана математична модель похибок ІНС.

$$x_k = \Phi_{xk-1} + W_{k-1}$$

$$x_k = \begin{bmatrix} x \\ \delta V \\ \varphi \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -gT & 0 \\ 0 & T/R_0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_k = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 0 \\ \omega_{k-1} \end{bmatrix}$$

Рис.3.9. Матриці кутів

$B$  - зміщення нуля акселерометра,  $B = 10^{-2}$ ,  $\omega_{k-1}$  - дискретний аналог білого гаусового шуму. Припустимо, що вимірюється тільки друга компонента вектора стану, тобто  $z_k = H_{xk} + V_k$ , де  $z_k$  - вектор вимірювань  $H = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,  $V_k$  - вимірювальний шум, який являє собою дискретний аналог білого гаусового шуму;  $W_{k-1}$  і  $V_k$  - незалежні процеси. ФК оцінює весь вектор стану і пригнічує вимірювальний шум. Оцінка буде оптимальною, якщо правильно обрані апріорні значення матриць  $Q$  і  $R$ .  $\sigma_{\delta V} = 35.0727$  м / хв. В оптимальному випадку  $Q = 10^{-13}$ ,  $R = 2500$ . Похибка ІНС, обумовлена неточністю виставки ГСП щодо площини горизонту є синусоїдальні коливання з періодом Шулера. При функціонуванні ІНС на досить тривалих інтервалах часу похибки можуть досягати неприпустимо великих величин. Тому необхідно коригувати ІНС за допомогою різних джерел зовнішньої навігаційної інформації.

В даний час типова ситуація, коли при досить адекватних лінійних моделях процесів і вимірювань, уявлення про збурення виявляється нічим не обґрунтованим. Величини ковариації приймаються з високим ступенем свавілля, без проведення будь-яких експериментів і випробувань, які можуть бути як натурними, так і чисельними. Ситуація ускладнюється тим, що відповідні експериментальні визначення щільності ймовірності і ковариаційних похибок найчастіше вкрай важко провести, а також тим, що характер обурень і величини ковариацій можуть істотно залежати від динаміки об'єкта і умов зовнішнього середовища. У цих умовах зникає гарантія точного оцінювання стану. Однак незважаючи на все це, використання фільтра Калмана часто дозволяє отримати прийнятний практичний результат, що підтверджується в ході випробувань технічних систем і їх подальшою експлуатацією.

При неможливості зробити однозначне заключення про випадкову природу тих чи інших похибок, характер їх функцій розподілу, кореляційних властивостях або величинах ковариацій виникають питання про доцільність використання фільтра Калмана та про розгляд альтернативних підходів до оцінювання вектора похибок безплатформної інтегрованої навігаційної системи. Альтернативою стохастичному підходу до опису похибок може служити опис похибок як статистично невизначених, про які відомо лише те, що вони локалізовані в деяких обмежених множинах. Межі множин задаються на основі апріорної інформації про похибки, або обчислюються. Завдання безлічі допустимих значень для кожної похибки (скаляра) в найпростішому випадку вимагає завдання пари чисел, що визначає межі безлічі.

Рівняння фільтра Калмана дуже зручні для реалізації на бортових цифрових обчислювальних машинах, оскільки прості в обчислювальному плані і не вимагають великого обсягу машинної пам'яті.

### 3.3. Адаптивний фільтр Калмана, фільтр Язвінського та компактний алгоритм фільтрації

Адаптивні алгоритми оцінювання, які є прямими модифікаціями фільтра Калмана працюють аналогічним чином. Відмінність від фільтра Калмана полягає в адаптивному визначенні коваріаційних матриць вхідного і вимірювального шумів. Адаптивний алгоритм оцінювання, здатний функціонувати в умовах відсутності достовірної статистичної інформації про вхідному шумі відрізняється від фільтра Калмана видом рівняння для визначення апіорної коваріаційної матриці помилок оцінювання, яке записується в такій формі:

$$P_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} P_k \Phi_{k+1,k}^T + K_k M [v_{k+1} v_{k+1}^T] K_k^T$$

$$K_{k+1} = \begin{cases} P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T [M(v_{k+1} v_{k+1}^T)]^{-1} \\ P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T]^{-1} \end{cases}$$

при  $\begin{cases} \text{diag}[M(v_{k+1} v_{k+1}^T)] > \text{diag} H_{k+1} P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T \\ \text{diag}[M(v_{k+1} v_{k+1}^T)] \leq \text{diag} H_{k+1} P_{(k+1)/k} H_{k+1}^T \end{cases}$

Рис.3.10. Адаптивний алгоритм оцінювання, здатний функціонувати без апіорної інформації про статистичні характеристики вхідного і вимірювального шумі

Обчислення математичного очікування в адаптивному алгоритмі проводиться у відповідності з наступною формулою:

$$M(v_k v_k^T) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (v_j v_j^T)$$

З результатів моделювання можна зробити висновки про те, що адаптивний фільтр Калмана з мінімальною помилкою виробляє фільтрацію в порівнянні зі звичайним скалярним алгоритмом фільтрації і ефективніше працює при відсутності достовірної апіорної інформації про вхідний шум.

Розбіжність фільтра Калмана, обумовлена відсутністю достовірної апріорної інформації про коваріаційну матрицю вхідного шуму є однією з найбільш часто зустрічних причин обмежують застосування фільтра Калмана для оцінки стану динамічних об'єктів.

Фільтр Язвінського дозволяє запобігти розбіжності процесу фільтрації за рахунок адаптивної оцінки коваріаційної матриці вхідного шуму в процесі функціонування алгоритму. Фільтр Язвінського відноситься до сімейства кореляційних алгоритмів. Адаптивна оцінка коваріаційної матриці вхідного шуму здійснюється на основі статистичної обробки сигналів вимірювального комплексу ЛА, доступна інформація про досліджуваний процес міститься в оновлюваній послідовності. Тому для синтезу адаптивного ланцюга в алгоритмі Язвінського запропоновано використовувати статистичні властивості оновлюваної послідовності.

Розглянемо фільтр Язвінського для оцінювання похибок навігаційної системи ЛА, що працює спільно з РЛС. Рівняння похибок навігаційної системи ЛА мають вигляд:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + G w_k$$

де  $x_{k+1}$  -  $n$ -вектор стану;  $W_k$  -  $r$ -вектор вхідного обурення;  $\Phi$  -  $(n \times n)$  - матриця об'єкта.

Вхідні обурення передбачаються  $r$  - мірним дискретним аналогом гаусового білого шуму з нульовим математичним очікуванням і відомої коваріаційною матрицею:

$$M [w_{jw} w_k^T] = Q_k \delta_{j,k}$$

де  $Q_k$  - невід'ємне певна матриця розмірності  $(r \times r)$ ;  $\delta_{j,k}$  - символ Кронекера, що означає

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k \\ 0, & \text{якщо } j \neq k \end{cases}$$

Часто вектор стану вимірюється

$$z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + V_{k+1}$$

Тут  $z_{k+1}$  -  $m$  - вектор вимірювань;  $V_{k+1}$  -  $m$  - вектор помилок виміру;  $H$  ( $m \times n$ ) - матриця вимірювань.

Помилки вимірювання (інакше вимірювальний шум) і вхідні обурення (інакше вхідний шум) некорельовані:  $M(V_j W_k^T) = 0$  при будь-яких  $j$  і  $k$ . Початкове значення вектора стану гаусовим випадковим вектором з нульовим математичним очікуванням, не залежних від вхідних збурень помилок вимірювань:  $M(x_0 W_k^T) = 0$ ;  $M(x_0 V_{k+1}^T) = 0$  для будь-якого  $k$  також як і фільтри Калмана.

Потрібно на основі математичного очікування об'єкта і апріорної інформації про статистичні характеристики вхідних і вимірювальних шумів і, здійснюючи вимірювання частини вектора стану, потрібно оцінити вектор стану так, щоб функціонал  $J$  приймав мінімальне значення.

$$J_k = M[(x_k - \hat{x}_k)^T] = \min$$

Розглянемо алгоритм Язвінського для діагональної матриці вхідного шуму виду  $Q = q \cdot I$ . Тут  $I$  - одинична матриця. Для спрощення викладок покладемо в рівнянні вимірювань матрицю вимірювань такого вигляду:  $H = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$  Таке припущення не впливає на спільність подальших міркувань, так як існує можливість використання скалярної форми уявлення алгоритмів або послідовної фільтрації. Язвінський визначає значення коваріаційної матриці вхідного шуму, при якому найбільш вірогідна поява миттєвого значення оновлюваної послідовності  $y_k$ . Визначення такого значення проводиться шляхом максимізації щільності ймовірності появи оновлюваної послідовності  $y_k$ .



$$P(\gamma_k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [M(\gamma_k^2)]^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\gamma_k^2 [M(\gamma_k^2)]^{-1}}$$

$$P(\gamma_k) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(\gamma_k - M\gamma_k)^2}{2\sigma_{\gamma_k}^2}}$$

Рис.3.11. Щільність ймовірності  $P_{k-1}(q)$

$$P(\gamma_k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [H\Phi \cdot P_{k-1}\Phi^T H^T + qHQG^T H^T + R]^{-\frac{1}{2}} * \exp[-\frac{1}{2}\gamma_k^2 (H\Phi \cdot P_{k-1}\Phi^T H^T + qHQG^T H^T + R)^{-1}]$$

Рис.3.12. З огляду на прийнятий вид коваріаційної матриці вхідного шуму

$$\frac{dp(\gamma_k)}{dq} = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} HH^T [M(\gamma_k^2)]^{-\frac{3}{2}} * \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_k^2 [M(\gamma_k^2)]^{-1}\} \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_k^2 \cdot [M(\gamma_k^2)]^{-1}\} + \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \gamma_k^2 HGG^T H^T [M(\gamma_k^2)]^{-\frac{5}{2}} = 0$$

Рис.3.12. Після диференціювання  $P(\gamma_k)$  по  $q$  і прирівнюючи результати

Нулю

Спростуючи цей вираз отримаємо умову самостійності:

$$\gamma_k^2 = M(k^2_{\gamma})$$

Вираз для коваріаційної матриці обновлюваної послідовності має вигляд:

$$M(\gamma_k^2) = HP_{k/k+1} \cdot H^T + R$$

Вираз дозволяє оцінювати значення матриці вхідного шуму адаптивним чином після отримання кожного наступного вимірювання  $z_k$ . Апріорна матриця помилок оцінювання в цьому випадку, з урахуванням попередніх рівнянь, визначається наступним чином:

$$P_{k/k+1} = \Phi P_{k-1} \Phi^T + q_k HGG^T H^T$$

$$\hat{q}_{k-1} = \begin{cases} \frac{\gamma_k^2 - H\Phi P_{k-1} \Phi^T H^T - R}{HGG^T H^T} & \text{при } \hat{q} > 0 \\ 0 & \text{при } \hat{q} < 0 \end{cases}$$

Рис.3.13. Отримаємо фізичний зміст попередніх рівнянь

Фізичний зміст виразу полягає в наступному. Якщо  $q_k > 0$  це говорить про те, що обновлювана послідовність не спроможна до своєї статистики. Тому ковариаційну матрицю помилок оцінювання необхідно збільшувати. Природно мається на увазі - збільшення норми ковариаційної матриці. Наслідком збільшення ковариаційної матриці помилок оцінювання є збільшення норми матриці посилення фільтра. Таким способом збільшується вага вимірів в формуванні оцінок вектора стану. Якщо ж  $q_k \leq 0$ , то цей випадок відповідає ситуації, коли значення обновлюваної послідовності невелика і обґрунтовано до своєї статистики. Тоді в алгоритмі приймається  $q_k = 0$ , так як за визначенням скалярна величина  $q$  завжди позитивна.

Недоліками фільтра Язвінського є необхідність мати достовірну статистичну інформацію про ковариаційну матрицю вимірювального шуму і можливі помилки, зумовлені використанням для обчислення оцінки вектора стану тільки одного значення обновлюваної послідовності. В умовах малих вхідних шумів можлива поява ситуації коли з'являються випадкові сплески вимірювального шуму (аномальні вимірювання) при досить великих значеннях апіорної ковариаційної матриці вимірювального шуму.

$$\| Q \| \ll \| R \|$$

Таким чином, величина  $\gamma_k^2 - H\Phi \cdot P_{k-1} \Phi^T H^T - R$  виявляється занадто малою. Тому невідомо чим обумовлена малість цієї величини - малим вхідним шумом або аномальним виміром (великим вимірювальним шумом). Для усунення останнього недоліку Язвінський пропонує використовувати в фільтрі не одне значення обновлюваної послідовності, а деяке значення, численно на кінцевій вимірювальній вибірці.

При різкій зміні динаміки польоту, наприклад, в разі стратегічного маневру ухилення від атакуючих ракет, має місце ситуація коли реальна матриця системи не відповідає своїй математичній моделі.

Для того, щоб сигнал оцінки відповідав своєму реальному значенню, необхідно зменшувати ширину вікна Язвінського з метою збільшення ваги, з яких надходять дані об'єкту в фільтр. При цьому критерієм варіювання ширини вікна фільтра будемо вважати наявність перевантаження, яка буде реєструватися і обчислюватися по значенням сигналів, які надходять від системи GPS. Виходячи з цих даних, буде формуватися керуючий вплив зміни (збільшення / зменшення) вікна фільтра.

Також, розглянемо автономну ІНС, що складається з гіростабілізованої платформи (ГСП) і встановлених на ній акселерометрів. ГСП побудована на базі трьох двоступеневих гіроскопів. В експлуатаційних умовах об'єкт, на якому встановлена ІНС, здійснює всілякі рухи навколо центру мас. Це призводить до обуреного моменту навколо осей підвісу ГСП ІНС в об'єкті.

Найбільш небезпечними є періодичні або знакозмінні ті, хто підбурює моменти. Пов'язано це з тим, що в умовах знакозмінних збурень ГСП навколо осей прецесії «детектуються» систематичні складові обурюють гіроскопічні моменти, що призводять до систематичного дрейфу вільної ГСП. ГСП, використовувані в ІНС, забезпечені інтегральною корекцією з налаштуванням на період Шулера. Систематичні складові обурюють гіроскопічні моменти викликають коливання ГСП навколо осей стабілізації з періодом Шулера, при цьому вихідна інформація ІНС за пройденим об'єктом шляху матиме наростаючу згодом похибку, пропорційну систематичному дрейфу ГСП. Розглянутий в цьому розділі систематичний дрейф ГСП є методичною похибкою і може бути зменшений тільки його алгоритмічною компенсацією, а не технологічними методами. До недавнього часу він не брався до уваги в зв'язку з малістю щодо похибок, викликаних іншими факторами. Однак істотне збільшення тонічних характеристик ІНС на сучасному етапі розвитку інерціальної навігації призвело до того, що систематичний

дрейф ГСП, викликаний обуреними гіроскопічними моментами, став порівняємо з іншими систематичними складовими. Збурення гіроскопічного моменту навколо осі прецесії гіроскопа виникає при збуренні ГСП і описується нелінійною функцією, містить кутову швидкість коливань ГСП навколо осі стабілізації і кута прецесії відповідного гіроскопа. Формування компенсаційного сигналу пов'язане з труднощами в отриманні інформації про кути і кутових швидкостях ГСП навколо осей стабілізації.

Отже, використання фільтра Калмана для корекції ІНС на БІНС ЛА важке через відсутність апріорної інформації про входні і вимірювальних шуми. Застосування адаптивного фільтра дозволяє істотно підвищити точність навігаційних визначень ЛА. В автономному режимі корекція здійснюється шляхом використання адаптивного алгоритму для якого сформовані вимірювальні сигнали на основі сигналів з датчиків кутів прецесії, що дуже важливо для визначень просторового положення повітряного судна.

#### **3.4. Безплатформна інерціальна навігаційна система з удосконаленим обчислювачем пристрою**

Похибка інерціального датчика прискорення або кутової швидкості включає три основних групи похибок за умов, що сигнал перевищує поріг чутливості, датчик експлуатується в межах заявленої виробником смуги пропускання і не входить в насичення:

- некомпенсовані систематичні похибки;
- некалібровані псевдовипадкові похибки;
- власний шум датчика.

Причиною появи не компенсуються систематичними похибками є похибкою калібрування, або повна відсутність калібрування, що дозволяє компенсувати вплив того

чи іншого чинника на показання датчика. До прикладу, датчик може бути відкалібрований на знятті температури, але недостатньо якісно.

Або характеристики датчика можуть змінитися під впливом, наприклад, короткочасного стресового впливу (з моменту калібрування пройшов тривалий час). Також, будши відкаліброваним на зміну будь-яких параметрів, датчик може бути не відкалібрований на зміну іншим. Наприклад, традиційним є калібрування на зміну температури, але далеко не завжди проводиться калібрування на перехресне перевантаження, на вібрації, що знаходяться за межами смуги пропускання, на зміну напруги живлення або на зміну радіаційного фону. Похибки калібрування нелінійної перехідної характеристики датчика також відносяться до даного класу похибок. Результуюча величина похибок описаної групи, як правило, менше власного шуму датчика.

Некалібровані псевдовипадкові похибки характерні для деяких типів датчиків. Наприклад, для мікромеханічних акселерометрів і ДУС характерна наявність псевдовипадковостей від включення до включення датчика компоненти зміщення нуля. Причиною появи власних шумів датчика є особливості фізичного пристрою чутливого елемента і підсистем знімання сигналу, термічний шум мікроелектроніки. Власний шум у багатьох випадках з високим ступенем адекватності може бути охарактеризовано як білий гаусів з нульовим математичного очікуванням. Нескомпенсовані систематичні похибки і некалібровані псевдовипадкові похибки, як правило, групуються і розглядаються у вигляді єдиної змінної. Модель похибок інтегрованої системи доповнюється фільтром, описуючи найбільш істотні кореляційні властивості цієї змінної. Однак далеко не у всіх випадках можна однозначно відповісти про кореляційні властивості похибок.

Крім того, особливістю інерційних датчиків є істотна залежність кореляційних властивостей похибки від динаміки об'єкта. Тому в якості альтернативи може бути

запропоновано опис похибки інерціального датчика у вигляді безлічі допустимих значень.

Тож, у якості удосконалення розглянемо БІНС на основі МЕМС з попереднім використанням фільтрів для зменшення похибок вимірів. Через обмеження на розміри і масу БІНС оглядових систем будуються на базі мікроелектромеханічних (МЕМС) датчиків. Такі датчики мають велику зону нечутливості і невисоку точність. З урахуванням вказаних особливостей БІНС-МЕМС повинні спиратися на базову високоточну БІНС (для чого ми і розглянули особливості використання фільтрів Калмана), що входить до складу навігаційного комплексу ЛА. Крім того, БІНС-МЕМС не можуть автономно виконати початкову виставку за кутами орієнтації. Тому початкова виставка таких БІНС реалізується за інформацією від базової системи. Взаємна підтримка інтегрованих інерційних систем, що включають супутникові приймачі, необхідна не тільки для безперервної корекції координат БІНС-МЕМС, а й для уточнення кутів орієнтації місць установки оглядових систем.

Технології мікроелектромеханічних систем безперервно розвиваються і кожним роком яких, точність стає більше. Зменшення розмірів і вимог до живлення датчиків робить їх більш універсальними в користуванні. Ще одна з переваг МЕМС технологій є те, що вихідний сигнал цифровий, що в свою чергу покращує якість і швидкість обробки даних, особливо з обчислювачів.

Однією з передових компаній які розробляють МЕМС технології є Sensoror - норвезький виробник і розробник інерціальних датчиків і датчиків тиску. З 2009 року компанія зосередилася на випуску МЕМС гіроскопів, а основну лінійку продуктів склали гіроскопи ST202, STIM210 і інерційний вимірювальний модуль STIM300, який представлений на (рис.3.14). Незважаючи на розміри 39мм на 45мм на 22мм STIM 300 містить в собі 3 гіроскопи, 3 акселерометри і 3 інклінометри, які наближаються по точності до волоконно-оптичних гіроскопів. Датчик стійкий до впливів магнітного поля

і удару, частота оновлення даних 2000 Гц і має цифровий вихід RS422 зі швидкістю передачі 1,84 Mbit c.



Рис.3.14. Інерціальний вимірювальний модуль STIM300

До основних характеристик STIM 300 відносяться: температурний діапазон  $-40 +85^{\circ}\text{C}$ , діапазон гіроскопа  $\pm 400^{\circ}/\text{с}$ , дрейф гіроскопа  $0,15^{\circ} / \sqrt{\text{h}}$ , дрейф акселерометра  $0,07 \text{ м} / \text{с} / \sqrt{\text{h}}$ , нестабільність нуля гіроскопа  $0,5^{\circ} / \text{год}$ , нестабільність нуля акселерометра  $0,05 \text{ mg}$ , діапазон акселерометра  $\pm 10\text{g}$ .

Внутрішня конструкція модулів містить в собі демпфери ударних навантажень і вібрацій для реалізації вимірювань в додатках, схильним до таких дій. Цифрова обробка даних проводиться всередині модулів, даючи користувачеві можливість варіювати конфігурацію пристрою, наприклад змінювати налаштування фільтрів, частоту вибірки, склад вихідних даних, вихідні формати.

STIM 300 знайшов своє місце в системах орієнтації безпілотних апаратів, системах збору портативних цільових транспортних засобів, в системах стабілізації і при автоматизованому виробництві в промисловості.

Порівнявши інерційні навігаційні системи, побудованих на волоконно-оптичних гіроскопах з інерціальним вимірювальним модулем моделі ADIS16485. При чому ціна першої системи була близько 30000 \$, а MEMS датчики всього 1000 \$. В результаті було встановлено, що в цивільному застосуванні, для вирішення завдання орієнтації і навігації, точності ADIS16485 більш ніж достатньо. Відмічу, що технічні характеристики ADIS16485 на порядок гірше, ніж

STIM300. Ці результати говорять про те, що найближчим часом точнісні характеристики MEMS інерційних вимірювальних модулів дозволять використовувати їх і в прецизійних навігаційних системах.

Найбільш поширеним є використання кватерніонів рівняння орієнтації. Вважається, що воно записується в найбільш простий для обчислювальної машини формі і не вироджується при складних еволюціях руху об'єкта. Однак, використання кватерніонної алгебри змушує проводити постійні перетворення кватерніона орієнтації в матрицю напрямних косинусів, або поточні кути орієнтації. Це завдання вимагає додаткових обчислювальних потоків і зменшує швидкодію обчислювачів.

Друга частина алгоритмічного забезпечення БІНС полягає в організації процесів чисельного інтегрування відповідного рівняння орієнтації. Тут теж спостерігається неоднозначність. Раніше розроблені алгоритми чисельного інтегрування створювалися під аналогові сигнали класичних інерціальних чутливих елементів – кільцевих лазерних і волоконно-оптичних гіроскопів. Їх застосування для сучасних мікромеханічних систем викликає деякі труднощі. Разом з тим, широко використовувані MEMS датчики все ще досить грубі, тому для них використовують елементарні алгоритми чисельного інтегрування такі як метод трикутника, або трапеції.

Без застосування алгоритмів фільтрації і роздільних незалежних вимірювань акселерометрів і гіроскопів результат навігаційних обчислень буде відрізнятися від справжньої траєкторії. Так, корекція на базі фільтра Калмана забезпечує калібрування гіроскопів в режимі онлайн, передаючи значення коригувань в блок обчислень і визначаючи характеристики поточного зміщення гіроскопів. Акселерометри забезпечують видачу опорної інформації про просторове положення об'єкта, використовуючи земну гравітацію.

В основному роль акселерометрів в курсовертикалей полягає в забезпеченні опорної інформації про початкове положення і корекції просторового положення шляхом компенсації дрейфу гіроскопів під час руху.



Дослідження алгоритму роботи безплатформної інерціальної навігаційної системи показали що в якості чутливих елементів для створення БНС використовувався досить грубий інерційний вимірювальний модуль.

Тобто, використовуючи МЕМС для побудови БНС а також адаптивних фільтрів Калмана, реалізація на основі структури алгоритмів комплексування забезпечує взаємну підтримку БНС і підвищує інформаційну надійність бортових вимірювально-обчислювальних комплексів.

## ВИСНОВКИ

Тема дипломної роботи є надзвичайно актуальною, так як для забезпечення різних об'єктів інерціальної (автономної) інформації про параметри руху (координати, швидкості, параметрів орієнтації корпусу об'єкта) затребувані і знаходять широке застосування безплатформні інерціальні навігаційні системи.

БІНС набули поширення в зв'язку з тим, що вони мають ряд переваг в порівнянні з платформними системами: відносно низькі показники вартості, маси, габаритів, енергоспоживання, більш висока надійність. При переході до безплатформної технології побудови ІНС пред'являються підвищені вимоги до точності, стійкості до зовнішніх впливів (вібрації, зміна температури, удари) інерційних датчиків, які працюють у великому діапазоні лінійних прискорень, кутових швидкостей.

В дипломній роботі, як показує дослідження, інерціальні навігаційні системи дозволяють автономно визначати місце розташування і орієнтацію рухомих об'єктів без зовнішніх джерел інформації. Застосування в таких системах високотехнологічних датчиків, виконаних по МЕМС-технологій для удосконалення обчислювача пристрою при загальному підвищенні надійності, забезпечує зниження габаритів і ваги бортового навігаційного обладнання, зменшує витрати на його розробку і виробництво, а отже, і вартість таких систем. Крім того, МЕМС-датчики в ряді випадків дозволяють застосовувати обладнання в більш жорстких умовах експлуатації, що, в свою чергу, розширює спектр застосувань БІНС.

Корекція БІНС від зовнішніх джерел інформації з застосуванням різних алгоритмів дозволяє істотно знизити похибки одержуваної навігаційної інформації. Для найбільш повної компенсації похибок у вихідній інформації необхідно попередньо оцінити помилки БІНС, що я і розглянув у другому розділі. Оцінити помилки можливо, скориставшись алгоритмами оптимального оцінювання. Реалізація на основі такої структури алгоритмів комплексування забезпечує взаємну підтримку БІНС і підвищує

інформаційну надійність бортових вимірювально-обчислювальних комплексів. Представлені алгоритми комплексування спираються на застосування методу векторного узгодження навігаційних параметрів базових і БНС з удосконаленим обчислювачем на базі мікроелектромеханічних датчиків, а також на застосуванні процедур компенсації помилок чутливих елементів.

Представлені алгоритми дозволяють підвищити точність навігаційної інформації як в автономному режимі функціонування БНС так і при корекції від зовнішніх вимірників.

Алгоритм фільтра Калмана через свою уявну простоту і легкість реалізації є основним засобом обробки вимірювань в навігаційних системах. Фільтр Калмана є інструментом, що дозволяє на основі математичної моделі системи побудувати оптимальні оцінки змінних по виконаним вимірам. До переваг алгоритму слід віднести його рекурентну природу, ефективно яка виявляється при роботі в реальному часі. Використання фільтра Калмана для корекції БНС ЛА важко через відсутність апріорної інформації про вхідні і вимірювальні шуми. Застосування адаптивного фільтра дозволяє істотно підвищити точність навігаційних визначень ЛА. В автономному режимі корекція здійснюється шляхом використання адаптивного алгоритму для якого сформовані вимірювальні сигнали на основі сигналів з датчиків кутів прецесії.

Результати роботи показали теоретичну працездатність розробленого алгоритму фільтрації для надійної роботи БНС з використанням удосконаленого обчислювача, а також використовуючи методи компенсації похибок можливо збільшити точність роботи БНС і інерціальних систем управління і, відповідно, є важливим і актуальним завданням в авіаційній та ракетно-космічній техніці.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агеев В.М., Павлова Н.В. Приборные комплексы летательных аппаратов и их проектирование. - М.: Машиностроение, 1990.
2. Богословский С.В., Дорофеев А.Д. Динамика полета летательных аппаратов. Учебное пособие. - СПб ГУАП, СПб., 2002.
3. Ивахненко А.Г., Мюллер Й.Я. Самоорганизация прогнозирующих моделей - Киев, Техника, 1985.
4. Неусыпин А.К., Неусыпин К.А. Алгоритмическое обеспечение систем навигации и наведения. - М.: Изд. Сигналь МПУ, 1999.
5. Неусыпин К.А. Современные системы и методы наведения, навигации и управления летательными аппаратами. - М.: МГОУ, 2009.
6. Неусыпин К.А., Кулагин В.П. Нетрадиционные методы оценивания. - М.: Сигналь МПУ, 1998.
7. Неусыпин К.А., Мирахмедов Р.А., Мирбабаев Ф.А. Методы повышения точности измерительных систем. - Ташкент, НАВРУЗ, 1992.
8. Неусыпин К.А., Пролетарский А.В., Цибизова Т.Ю. Системы управления летательными аппаратами и алгоритмы обработки информации. - М.: Изд. МГОУ, 2006.
9. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации: М.: МГУ, 1982.
10. Фам Суан Фанг, Кэ Фан, Ким Чже Су. Исследование интеллектуальных систем управления ЛА. //Автоматизация и современные технологии. - 2006, №7.
11. Ричард Л. (Richard B. Langley), University of New Brunswick. RTK GPS. - Журнал GPS World, Advanstar Communications, 859 Willamette Street, Eugene, OR 97401, USA, 1999.
12. U.S. Naval Observatory, Статус GPS системы, - Washington, DC, 2003.

13. ГЛОНАСС. Информационный бюллетень № 1. - М.: Координационный научно-информационный центр, 1999.
14. Варавва В. Г., Голован А. А., Парусников Н. А. О стохастической мере оцениваемости // Коррекция в навигационных системах и системах ориентации искусственных спутников Земли. Издательство МГУ Москва, 1986. С. 4–9.
15. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (автономные системы). М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966
16. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979.
17. Козлов А. В., Сазонов И. Ю. Калибровка инерциальных навигационных систем на грубых стендах с учетом разнесения чувствительных масс ньютонометров // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2013. № 3 (189).
18. Leick A., Rapoport L., Tatarnikov D. GPS satellite surveying. John Wiley & Sons, 2015.