МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет
Факультет економіки та бізнес-адміністрування

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ, ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ТА ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ»

Галузь знань: 05 "Соціальні та поведінкові науки»
Спеціальність 051 «Економіка»
Спеціалізація «Економічна кібернетика»

Київ 2018

Національний авіаційний університет

Кафедра економічної кібернетики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ, ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ТА ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ»

Галузь знань: 05 "Соціальні та поведінкові науки»
Спеціальність 051 «Економіка»
Спеціалізація «Економічна кібернетика»

Київ 2019

УДК 330.342.3..519.86:(076.5)
ББК У.в631р
Т34

Рецензенти:

М.Є. Рогоза, д-р екон. наук, проф.
(Полтавський університет споживчої кооперації)

Г.Ф. Іванченко, к-т екон. наук, доц.
(ДВНЗ «Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана)

Олешко Т.І. Методичні рекомендації до виконання домашнього завдання з дисципліни «Теорія ігор в економіці»- К.-НАУ.-2019-46 с.

Методична розробка з дисципліни «Теорія ігор в економіці» розроблена для проведення практичних занять, організації самостійної роботи, виконання домашнього завдання студентами , які навчаються за спеціальністю «Економіка» спеціалізації «Економічна кібернетика».

Призначена для студентів-магістрів спеціалізації «Економічна кібернетика».

НАУ, 2019

ВСТУП

В останні три десятиліття спостерігається стрімке підвищення інтересу до теорії ігор і значне зростання її ролі. Без неї в даний час вже немислима сучасна економічна теорія, причому область застосування теорії ігор постійно розширюється.

З економічної точки зору суть теорії ігор в тому, щоб допомогти економістам розуміти і передбачати те, що може відбуватися в економічних ситуаціях, і зараз навряд чи можна знайти область економіки, де основні концепції теорії ігор не були б необхідними для розуміння сучасної економічної літератури.

Дана методична розробка сприяє системному вивченню дисципліни «Теорія ігор в економіці» студентами, що навчаються за спеціалізацією «Економічна кібернетика» і включає питання для обговорення, практичні завдання, домашнє завдання, контрольні запитання та завдання для самостійної роботи студентів, список літератури.

Практичні заняття з даної дисципліни проводяться з метою вивчення та засвоєння студентами теоретичних питань, пов'язаних із застосуванням теорії ігор до різних питань економіки. Рівень засвоєння студентами теоретичного матеріалу перевіряється за допомогою опитування з основних питань теми.

Рішення задач в рамках практичних занять дозволяє студентам застосувати теоретичні знання, отримані на лекціях, до аналізу різних ситуацій в іграх в умовах конфлікту або розбіжності інтересів.

Контрольні питання і завдання призначені для перевірки якості засвоєння лекційного матеріалу. Відповіді на контрольні запитання та завдання готуються студентами самостійно і перевіряються викладачами на практичних заняттях. Завдання для самостійної роботи покликані закріпити отримані технічні навички розв'язання типових задач, розібраних на практичних заняттях.

Домашнє завдання спрямовано на поглиблення практичної підготовки студентів та складено за індивідуальними даними студентів. Воно охоплює статичні гри з повною інформацією, повторювані гри і статичні гри з неповною інформацією. Виконання домашнього завдання завершується написанням звіту у відповідності з наведеними в даних методичних вказівках вимогами.

Наприкінці методичних вказівок даються завдання, пропоновані студентам при здачі заліку з дисципліни.

Розділ 1. Практичні заняття

Тема 1. *Введення в теорію ігор*

Заняття 1

Питання для обговорення

1. Предмет теорії ігор і його історія. Теорія Неймана-Моргенштерна.

2. Поведінка суб'єкта в умовах розбіжності інтересів (конфлікту).

3. Прийняття оптимального рішення в умовах конфлікту.

Практичні завдання

1. Кожен з двох партнерів, не знаючи ходу іншого, називає цифру 1 або 2, причому при збігу названих цифр другого платить перший одну одиницю виграшу, а в іншому випадку другий отримує від свого супротивника стільки ж.

Уявити гру в матричній формі і пояснити, як впливає рішення, прийняте кожним гравцем, на поведінку партнера.

2. Гравці вибирають цілі числа від 1 до k. Якщо перший вибрав x, а другий y, то перший отримує (x-y) одиниць виграшу, якщо x≥y, і платить (x + y) одиниць виграшу, якщо x <y. Розглянути випадок, коли k = 5.

Уявити гру в матричній формі і визначити найбільш вигідні з погляду виграшу ходи гравців.

3. Перший гравець називає одне їх чисел 1 або 2, а другий - одне з чисел 1, 2, 3, При цьому кожен їх партнерів намагається вгадати, яке з чисел назве супротивник. Якщо обидва партнери вгадали або помилилися одночасно, то гра закінчується внічию. Якщо ж вгадав один з них, то він отримує виграш, рівний числу, названому противником.

Уявити гру в матричній формі та визначити найбільш вигідну тактику кожного гравця з урахуванням багаторазового повторення гри.

Завдання для самостійної роботи

1. Вивчити основні способи формалізації переваг гравців і функцій їх корисності.

2. Сформулювати теорему про очікуваної корисності.

3. Показати, як формулюється корисність грошей.

4. Викласти основні положення теорії Севіджа.

Заняття 2

Питання для обговорення

1. Класифікація ігор: за характером отримання інформації, по виду функції виграшу, за кількістю гравців і стратегій.

2. Розгорнута і нормальна форми подання гри.

3. Зв'язок матричної і нормальної форм.

Практичні завдання

1. Підприємство випускає швидкопсувну продукцію, яку воно може відразу відправити споживачеві (стратегія А), відправити на склад для зберігання (стратегія Б) або піддати додатковій обробці (стратегія В) для тривалого зберігання.

У свою чергу, споживач може негайно придбати цю продукцію (стратегія I), придбати її протягом невеликого відрізка часу (II) або зажадати її після тривалого періоду часу (III).

Якщо підприємство вибере стратегію А, то додаткові витрати на зберігання і обробку продукції не будуть потрібні.

Однак, якщо при цьому споживач застосує стратегію II або тим більше III, то підприємство зазнає збитків через псування частини продукції. Навпаки, якщо підприємство вибере стратегію В, а споживач - стратегію I, то виникнуть невиправдані витрати на консервацію продукції.

Визначити оптимальне співвідношення між продукцією, що відправляється споживачеві на склад і на додаткову обробку, керуючись «мінімаксним критерієм» (гарантований середній рівень збитку), при наступної матриці витрат:

	I	II	III
А	2	5	8
Б	7	6	10
В	12	10	8

2. Для опалення приміщення необхідно придбати паливо. Однак витрата палива і ціни на нього залежать від погоди в зимовий час (м'яка, нормальна або сувора зима; див. Таблицю):

Таблиця 1. *Потреба в паливі і його ціна*

Погода	М’яка	Нормальна	Сувора
Витнати, тон	5	10	18
Ціна, ден. од./тонна	10	16	20

В даний час вугілля може бути придбаний за мінімальною ціною (10 ден. Од. / Т), та невикористаний надлишок вугілля можна реалізувати весни за ціною 5 ден. од. / т. Можна обрати одну з трьох стратегій в закупівлі вугілля: 5 т, 10 т і 18 т.

Припускаючи, що подібних приміщень мається 100, визначити оптимальну стратегію в утворенні запасів, керуючись «мінімаксним критерієм».

3. Магазин може завезти в різних пропорціях товари трьох типів (А, Б і В). Їх реалізація, а отже, і отримувана магазином прибуток залежать від виду товару і стану попиту. Припускаючи, що останній може характеризуватися трьома станами (I, II, III) і враховуючи, що попит пов'язаний зі зміною моди та прогнозування його неможливо, визначити оптимальні пропорції у закупівлі товарів з умови середньої гарантованого прибутку при наступної матриці прибутків:

	I	II	III
А	20	15	10
Б	16	12	14
В	13	18	15

Контрольні питання

1. Що таке хід гравця?

2. Що таке стратегія гравця і чим вона відрізняється від ходу?

3. Що називають інформаційним безліччю гравця?

4. У чому полягає завдання теорії ігор?

5. Що є рішенням гри?

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати завдання 1 з розділу 2.

2. Виконати завдання 2 з розділу 2.

3. Виконати завдання 3 з розділу 2.

рекомендована література

1. Акімов В. П. Основи теорії ігор: навч. посібник / - М .: МДІМВ - Університет, 2008.- С.3-5, 8-21.

2. Данилов В. І.Лекції з теорії ігор: навч. посібник / - М .: РЕШ, 2002.- С. 7-13, 19-23, 29-32.

3. Меньшиков І. С. Лекції з теорії ігор та економічному моделюванню. - М .: МЗ Пресс, 2007.- С. 10-11, 30-31.

4. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет, 2001.- С. 9-12, 23-28.

Тема 2. Статичні гри з повною інформацією

Питання для обговорення

1. Визначення статистичних ігор з повною інформацією.

2. Домінування стратегій, суворе домінування, рівновага в домінуючих стратегіях. Послідовне виключення строго домінованих стратегій.

3. Рівновага Неша.

4. Існування рівноваги Неша і змішані стратегії. Обчислення рівноваги Неша в змішаних стратегіях.

Практичні завдання

1. Три гравця вибирають одну з трьох альтернатив: А, В або С. Альтернатива вибирається за правилом простої більшості. Кожен з гравців голосує тільки за одну альтернативу. Якщо жодна з альтернатив не набере більшості, то буде обрана альтернатива А. виграші гравців залежно від обраної альтернативи наступні:

$$u_1(A)=2,\quad u_1(B)=1,\quad u_1(C)=0,$$
$$u_2(A)=0,\quad u_2(B)=2,\quad u_2(C)=1,$$
$$u_3(A)=1,\quad u_3(B)=0,\quad u_3(C)=2.$$

Знайти в цій грі все рівноваги Неша.

2. Формуються два виборчі блоки, які претендуватимуть на місця в законодавчих зборах міста. Кожен з блоків може вибрати одну з трьох орієнтацій: «ліву» (L), «праву» (R) або «екологічну» (E). Кожна з орієнтацій може залучити 50%, 30% і 20% виборців відповідно. Відомо, що якщо цікавить їхня орієнтація не представлена на виборах, то виборці з відповідної групи не голосуватимуть. Якщо блоки виберуть одну і ту ж орієнтацію, то голоси відповідної групи виборців розділяться порівну між ними. Мета кожного блоку - отримати найбільшу кількість голосів. Скласти матрицю гри і знайти всі рівноваги Неша.

3. Два гравці грають в наступну гру. Кожен називає один з трьох предметів: «камінь», «ножиці» або «папір». Гравець, який назвав камінь, перемагає гравця, який назвав ножиці (ножиці тупляться об камінь), гравець, який назвав ножиці, перемагає гравця, який назвав папір (ножиці ріжуть папір), а гравець, який назвав папір, перемагає гравця, який назвав камінь (камінь можна загорнути в папір). Що виграв гравець отримує 1, програвший отримує -1. Якщо названі предмети збіглися, то кожен гравець отримує 0. Знайти всі рівноваги Неша, у тому числі в змішаних стратегіях.

Контрольні питання

1. Як графічно відображаються виграші покупців і продавців при конкурентному рівновазі?

2. Що називають ринковою силою учасників ринку?

3. У чому полягають завдання учасників ринку з точки зору теорії ігор?

4. Як записуються виграші гравців у дуополии Курно?

5. Що таке умови першого порядку і яку роль вони відіграють в пошуку рівноваги Неша?

6. Що таке функція найкращого відповіді гравця на дії партнерів?

7. Як визначається рівновага Неша в термінах функцій відгуку?

8. Як враховується чутливість до ціни конкурента у виграші гравця в дуополии Бертрана?

9. Як інтерпретується рівновагу Неша в дуополії Бертрана?

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати завдання 4 з розділу 2.

2. Вивчити основні теоретико-ігрові підходи до арбітражним механізмам на ринку праці.

3. Розглянути протиріччя між індивідуальної та колективної раціональністю на прикладі проблеми громад.

Рекомендована література

1. Акімов В. П. Основи теорії ігор: навч. посібник / - М .: МДІМВ - Університет, 2008.- С. 22-37, 59-80.

2. Данилов В. І.Лекціі з теорії ігор: навч. посібник / - М ..: РЕШ, 2002.- С. 24-28, 33-44.

3. Меньшиков І. С. Лекції з теорії ігор та економічному моделюванню. - М .: МЗ Пресс, 2007.- С. 9-55.

2. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет, 2001.- С. 30-55, 57-78.

Тема 3. Динамічні гри з повною інформацією

Питання для обговорення

1. Повна і досконала інформація.

2. Алгоритм зворотного індукції.

3. Нормальна і розгорнута форми подання динамічної гри.

4. Досконале в під іграх рівновагу Неша.

Практичні завдання

1. Пірати ділять здобич. У піратів корабля є сувора ієрархія. Ранг 1 має самий «крутий» пірат (капітан), ранг 2 - наступний по лютості пірат і т. Д. Ранг має самий м'який член зграї. Піратам вдалося пограбувати торговий корабель, і їм потрібно поділити здобич: золотих монет. У них прийнята така процедура поділу. Першим розподіл монет пропонує пірат з найвищим рангом. Якщо хоча б половина піратів (рахуючи пропонує поділ) згодна з цією пропозицією, то на цьому гра і кінчається. Однак, якщо більшість проти висунутого пропозиції, то, слідуючи своїй традиції, вони змушують пропонував йти по краю борта із зав'язаними очима, поки нещасний не впаде у воду. Після цього процедура повторюється. Пірати хочуть залишитися в живих, але жадібні і мстиві: вони цінують своє життя вище будь-якої кількості монет, але якщо і те, і інше забезпечено, то вони хочуть побачити якомога більше своїх побратимів, що йдуть по краю борту із зав'язаними очима.

Як ви думаєте, позиція капітана при такій процедурі поділу є сильною або слабкою? Запишіть свій прогноз до детального дослідження гри.

Знайдіть поділ за допомогою зворотного індукції.

Збігся Чи ваш прогноз з тим, що вийшло в пункті (б)?

1.Припустимо, що в послідовних переговорах з нескінченним числом періодів гравці мають різні фактори дисконтування: δ_1 - для гравця 1 і δ_2- для гравця 2. Доведіть на основі зворотного індукції, що гравець 1 пропонує в першому періоді рішення

$$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

гравцеві 2, і той погоджується.

2. Три олігополіста діють на ринку з зворотною функцією попиту $P(Q)=a-Q$, де $Q=q_1+q_2+q_3$ и q_i - обсяг випуску фірми **(i)** У кожної фірми граничні витрати с постійні і немає фіксованих витрат. Фірми вибирають обсяг свого випуску наступним чином: фірма 1 обирає $q_1 \geq 0$; фірми 2 і 3, дізнавшись q_1 обираюсь одночасно q_2 та q_3 відповідно. Яке буде вчинене за під іграм рівновагу Неша?

Контрольні питання

1. Скільки стратегій мають гравці в двоходовий динамічної грі?

2. Як раціональність гравців проявляється у виборі ходів?

3. Що таке чиста стратегія гравця в динамічної грі з повною інформацією?

4. Як визначаються інформаційні безлічі гравців в динамічній грі з повною інформацією?

5. Що таке під гра?

6. Чим відрізняються рівновагу Неша і досконале в подиграх рівновагу Неша?

7. Що означають рівноваги порожніх погроз?

8. Як формується вимога динамічної узгодженості?

9. Що таке власна подигра?

10. Як практично вибрати з усього безлічі рівноваг Неша вчинені у під іграх рівновагу Неша?

Завдання для самостійної роботи

1. Вивчити підходи Штакельберга і Гермейера до двоходовий грі.

2. Сформулювати загальну модель динамічної гри з повної та досконалої інформацією.

3. Розглянути критику алгоритму зворотного індукції.

рекомендована література

1. Акімов В. П. Основи теорії ігор: навч. посібник / - М .: МДІМВ - Унверсітет, 2008.- С. 80-92.

2. Меньшиков І. С. Лекції з теорії ігор та економічному моделюванню. - М .: МЗ Пресс, 2007.- С. 44-55.

3. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет, 2001.- С. 83-105.

Тема 4. Повторювані гри

Заняття 1

Питання для обговорення

1. Ігри з кінцевим числом повторень.

2. Нескінченне гри.

3. Народна теорема і її наслідки

Практичні завдання

1. Гра з одночасним вибором ходів (див. Таблицю 2) повторюється двічі, причому рішення, вибране на першому кроці, стає відомим до початку другого кроку. Дисконтування відсутня. Мінлива x більше 4, так що (4,4) не є рівновагою в одно-кроковій грі. Для яких значень x наступна стратегія для кожного гравця відповідає здійсненого по під іграм рівноваги Неша?

Вказівка граємо Q_i на 1 кроці. Якщо результат першого кроку - (Q_1,Q_2), то граємо P_i, на другий крок. Якщо рішення першого кроку - (y,Q_2), причому - $y \neq Q_1$, тоді граємо R_i на другому кроці. Якщо рішення першого кроку (Q_2,z), причому $Q_2 \neq z$, то вибираємо S_i на другому кроці. Якщо рішення на першому кроці (y,z) причому $y \neq Q_1$ та $Q_2 \neq z$, то вибираємо P_i на другому кроці.

Таблиця 2.

Матриця виграшів гравців у завданні 1

	*P*2	*Q*2	*R*2	*S*2
*P*1	2, 2	*x*, 0	-1, 0	0, 0
*Q*1	0, *x*	4, 4	-1, 0	0, 0
*R*1	0, 0	0, 0	0, 2	0, 0
*S*1	0, -1	0, -1	-1, -1	2, 0

2. Гра з одночасним вибором ходів (приводиться нижче в таблиці 3) повторюється двічі, причому результат першого кроку стає відомим до початку другого кроку. Дисконтування відсутня. Чи можна досягти виграшів (4, 4) на першому кроці при скоєному за під іграми у рівновазі Неша в чистих стратегіях? Якщо це можливо, то опишіть стратегію, що реалізовує це.

Якщо ні, то поясніть, чому.

Таблиця 3

Матриця виграшів гравців у завданні 2.

	L	*C*	*R*
T	3, 1	0, 0	5, 0
M	2, 1	1, 2	3, 1
B	1, 2	0, 1	4, 4

Заняття 2

Питання для обговорення

1. Змова в олігополії Курно.

2. Модель ефективної зарплати.

3. Грошова політика держави і корпорації.

практичні завдання

1. Згадаймо статичну модель дуополії Бертрана (з однорідним продуктом): фірми оголошують ціни одночасно; попит для фірми i дорівнює $a-p_i$, якщо $p_i<p_j$, 0, якщо $p_i>p_j$ та $(a-p_i)/2$, якщо $p_i=p_j$; граничні витрати рівні $c<a$. Розглянемо нескінченно повторювану гру, засновану на цій одно-крокової грі. Покажіть, що фірми можуть використовувати релейні стратегії (перемикальна при будь-якому відхиленні на рівновагу Неша в одно-крокової грі), щоб підтримувати рівень монопольної ціни в скоєному за під іграми рівновазі Неша, тоді і тільки тоді, коли $\delta \geq 1/2$.

2. Припустимо, попит змінюється випадково в нескінченно повторюється грі Бертрана: в кожному періоді попит дорівнює a_H з імовірністю π і з імовірністю $1-\pi$; рівні попиту в різні періоди незалежні. Припустимо, що в кожному періоді рівень попиту стає відомим фірмам до того, як вони призначать ціни для цього періоду. Які рівні монопольних цін (p_H і p_L) відповідають двом рівням попиту? Знайдіть найменше значення δ^*, для якого обидві фірми можуть використовувати релейні стратегії, щоб підтримувати рівень монопольної ціни (т. Е. Вибирати p_i, коли попит дорівнює a_i для $i=H,L$) в скоєному за під іграм рівновазі Неша. Для кожного значення d між ½ і δ^* знайдіть таку найбільшу ціну $p(\delta)$, що в скоєному за під іграм рівновазі Неша фірми можуть використовувати релейні стратегії, щоб підтримувати ціну $p(\delta)$, коли попит високий, і ціну p_L, коли попит низький.

Контрольні питання

1. Як визначаються стратегії гравців у двократному повторенні дилеми укладеного?

2. Який зв'язок існує між рівновагою Неша в статичній грі і досконалим в під іграх рівновагою Неша в повторюваної вихідної статичної грі?

3. Що таке релейна стратегія?

4. Що означає покарання гравця за відхилення від рівноважної релейного стратегії?

5. У чому сенс народної теореми?

6. Який зв'язок між спільними змішаними стратегіями і кооперативними траєкторіями в повторюваної грі?

Завдання для самостійної роботи

1. Вивчити кооперативне поведінку гравців в повторюваних іграх.

2. Сформулювати поняття рівноваги у спільних змішаних стратегіях.

3. Сформулювати арбітражну схему Неша.

4. Визначити сенс стабільності на основі загроз.

5. Виконати завдання 5 з розділу самостійної роботи.

рекомендована література

1. Акімов В. П. Основи теорії ігор: навч. посібник / - М .: МДІМВ - Університет, 2008.- С.99-116.

2. Данилов В. І.Лекціі з теорії ігор: навч. посібник / - М .: РЕШ, 2002.- С.85-91.

3. Меньшиков І. С. Лекції з теорії ігор та економічному моделюванню. - М .: МЗ Пресс, 2007.- С.85-105.

4. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет, 2001.- С.105-115.

Тема 5. Статичні гри з неповною інформацією

Заняття 1

Питання для обговорення

1. Дуополія Курно з неповною інформацією.

2. Умова узгодження уявлень

3. Сімейний суперечку з малими випадковими параметрами.

Практичні завдання

1. Розглянемо ДУОПОЛІЯ Курно для ринку з зворотною функцією попиту $P(Q)=a-Q$, де $Q=q_1+q_2$ - загальний попит на ринку. Обидві фірми мають однакові функції витрат $c_i(q_i)=cq_i$, але попит є невизначеним: високим ($a=a_H$) з імовірністю θ або низьким ($a=a_L$) з вірогідність $1-\theta$. Інформація асиметрична: фірма 1 знає, який попит (високий чи низький), а друга фірма - ні. Всі опис ситуації загальновідомо. Обидві фірми вибирають розмір випуску одночасно. Яке безліч стратегій для кожної фірми? Припустіть, що параметри a_H, a_L, θ і такі, що рівноважні випуски позитивні. Знайдіть рівновагу Байеса-Неша в цій грі.

2. Розглянемо ДУОПОЛІЯ Бертрана з асиметричною інформацією і диференційованою продукцією. Попит на продукцію фірми i дорівнює $q_i(p_i, p_j)=a-p_i-b_ip_j$.
Витрати будемо вважати рівними нулю для обох фірм. Чутливість попиту фірми i до ціни фірми j може бути високою або низькою. Точніше, для кожної фірми величина b_i може приймати значення b_H з імовірністю θ і b_L - з імовірністю $1-\theta$. Кожна фірма знає свою чутливість, але не знає чутливість конкурента. Цей опис загальновідомо. Які безлічі дій, типів, подання та функції виграшу для даної гри? Які безлічі стратегій? За яких умов у цій грі існує симетричне рівновагу Байеса-Неша в чистих стратегіях? Знайдіть цю рівновагу.
Заняття 2

Питання для обговорення

1. Простий аукціон.

2. Подвійний аукціон.

3. Дизайн економічних механізмів.

Практичні завдання

1. Розгляньте аукціон із закритими ставками по першій ціною, в якому оцінки покупців незалежні і однаково рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Покажіть, що

якщо число покупців рівно n, то заявки за ціною $(n-1)/n$ від індивідуальної оцінки вартості складають рівновагу Байеса-Неша для цього аукціону.

2. Розгляньте аукціон із закритими ставками по першій ціною, в якому оцінки покупців незалежні і однаково розподілені на відрізку $[0,1]$ з позитивною функцією щільності $f(v_i)$. Знайдіть симетричне рівновагу Байеса-Неша для випадку двох учасників.

3. Розглянемо іншу інтерпретацію подвійного аукціону. Нехай є фірма і працівник, причому фірма знає, який у неї виграш m від діяльності працівника на даній позиції, а робочий знає свої альтернативні можливості v. Операція означає, що працівник приймається на роботу, а ціна операції дорівнює його зарплаті w. Якщо угода укладена, то фірма виграє $m-w$, а працівник виграє w. Якщо немає угоди, то виграш фірми дорівнює нулю, а виграш працівника дорівнює.

Припустимо, що m і v розподілені незалежно і рівномірно на відрізку $[0,1]$. Знайдіть лінійне рівновагу в цьому подвійному аукціоні.

Контрольні питання

1. Що називають байєсівської грою?

2. Як визначається рівновагу Байеса-Неша?

3. Що розуміється під стратегією гравця в байеской грі?

4. Що таке тип гравця?

5. Що таке порогові стратегії?

6. Що таке аукціон із закритими заявками по першій ціні?

7. Як формулюється умова вдосконалення угоди в подвійному аукціоні?

8. Як розраховується виграші гравців у подвійному аукціоні?

9. Що називають прямим механізмом?

10. Як формулюється принцип виявлення?

Завдання для самостійної роботи

1. Вивчити, як визначається незалежність (некорреліровванні) типів в статичній грі з неповною інформацією.

2. Розглянути рішення гри «Вибір комп'ютера» з неповною інформацією в симетричному варіанті.

3. Вивчити гру «Вахтер» як статичну з неповною інформацією.

4. Гра «Вибір Комп'ютера» в несиметричному варіанті.

рекомендована література

1. Данилов В. І.Лекціі з теорії ігор: навч. посібник / - М .: РЕШ, 2002.- С. 98-103.

2. Меньшиков І. С. Лекції з теорії ігор та економічному моделюванню. - М .: МЗ Пресс, 2007.- С. 121-128, 131-141.

3. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет, 2001.- С. 121-136.

Тема 6. Сигнальні гри

Питання для обговорення

1. Бінарна сигнальна гра.

2. Досконале байесовськими рівновагу.

3. Безкоштовні сигнали. Бінарна гра з безкоштовними сигналами.

4. Безперервна гра з безкоштовними сигналами.

Практичні завдання

1. Знайти приховує вчинене байесовськими рівновагу, в якому відправник будь-якого типу грає r в наступній сигнальної грі:

2. Розглянемо сигнальну гру с 3 типами

Знайти всі приховують вчинені байєсовські рівноваги, в яких відправник будь-якого типу грає l.

Контрольні питання

1. Що таке сигнал з точки зору теорії ігор?

2. З яких етапів складається динамічний сценарій сигнальної гри з двома учасниками?

3. Як графічно зображується бінарна сигнальна гра?

4. Як формулюється алгоритм пошуку досконалого байєсівського рівноваги в бінарній сигнальної грі?

5. Що таке виявляють і приховують стратегії?

6. Що таке приховує рівновагу?

Завдання для самостійної роботи

1. Вивчити застосування сигналів на ринку праці до моделі Спенса.

2. Сформулювати і розглянути сигнальну гру «Підприємець та інвестор».

3. Розглянути застосування сигналів до моделювання грошової політики держави стосовно корпорацій.

рекомендована література

1. Акімов В. П. Основи теорії ігор: навч. посібник / - М .: МДІМВ - Університет, 2008.- С.154-162.

2. Печерський С. Л., Бєляєва А. А. Теорія ігор для економістів. Вступний курс: навчальний посібник - Спб .: Європейський університет., 2001.- С.139-167.

Розділ 2. Самостійна робота

Варіант завдання слід вибирати як залишок від цілого ділення на 30 суми номерів букв прізвища студента. Номери букв брати з таблиці першого індивідуального завдання.

Завдання 1. Визначити верхню і нижню ціну гри та наявність сідлової точки в наступних антагоністичних іграх:

№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 10 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 10 & 8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 8 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 6 & 6 \\ 9 & 0 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 10 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 9 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 9 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 10 & 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 10 \\ 1 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 0 \\ 8 & 7 & 7 \\ 10 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 9 & 7 & 10 \\ 5 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Завдання 2. Графічно вирішити гру:

№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця
1	$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 9 \\ 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 10 & 10 \\ 8 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \\ 6 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 10 & 7 \\ 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 8 \\ 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 4 \\ 10 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 9 \\ 4 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 8 \\ 6 & 5 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \\ 10 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 6 & 10 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 7 \\ 10 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 7 \\ 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \\ 2 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \\ 4 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 8 \\ 9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Завдання 3. Звести матричну гру до задачі лінійного програмування і вирішити її симплекс - методом (рекомендується застосування комп'ютерної програми MS Excel з використанням інструменту «Пошук рішення»):

№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця	№ п/п	Матриця
1	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 8 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 10 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & 7 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 8 & 0 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 6 & 5 \\ 10 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 10 \\ 8 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 3 & 9 \\ 10 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 & 9 & 4 \\ 7 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 10 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 8 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 9 & 9 \\ 3 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

10	$\begin{pmatrix}10 & 6 & 3 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 0 & 7 & 8\\ 9 & 5 & 1 & 6 & 3\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}9 & 5 & 8 & 10 & 6\\ 1 & 4 & 9 & 8 & 4\\ 0 & 8 & 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}4 & 9 & 4 & 7 & 3\\ 8 & 10 & 8 & 4 & 2\\ 8 & 4 & 9 & 1 & 5\end{pmatrix}$

Завдання 4. За наведеній матриці статичної гри двох гравців знайти всі рівноваги Неша, у тому числі в змішаних стратегіях, і записати рішення гри у вигляді вектору. Побудувати графічно функції найкращих відповідей кожного гравця.

Номер варіанту	Матриця
1	$\begin{pmatrix}(0,2) & (4,4)\\ (3,3) & (2,0)\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}(2,3) & (0,0)\\ (1,1) & (3,2)\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}(4,5) & (0,2)\\ (2,0) & (5,4)\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}(0,2) & (2,0)\\ (3,2) & (2,3)\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}(0,0) & (0,-1)\\ (1,-3) & (-2,-2)\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}(1,1) & (0,2)\\ (2,0) & (-3,-3)\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}(4,7) & (2,2)\\ (1,1) & (4,7)\end{pmatrix}$
Номер варіанту	Матриця
8	$\begin{pmatrix}(2,3) & (1,1)\\ (0,0) & (3,2)\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}(5,3) & (2,2)\\ (1,1) & (3,5)\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}(7,8) & (1,3)\\ (3,1) & (8,7)\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}(8,4) & (1,2)\\ (2,1) & (4,8)\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}(6,6) & (0,3)\\ (3,0) & (1,2)\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}(5,5) & (0,2)\\ (2,0) & (1,0)\end{pmatrix}$

14	$\begin{pmatrix} (7,7) & (0,3) \\ (3,0) & (3,2) \end{pmatrix}$
Номер варіанту	Матриця
15	$\begin{pmatrix} (8,8) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} (3,7) & (1,0) \\ (0,1) & (7,3) \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} (5,12) & (0,0) \\ (1,1) & (12,5) \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} (3,7) & (2,0) \\ (1,1) & (7,3) \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} (3,11) & (2,2) \\ (0,0) & (11,3) \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} (1,12) & (0,0) \\ (-1,-1) & (12,1) \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} (2,1) & (3,-1) \\ (-2,0) & (4,2) \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} (4,3) & (1,-4) \\ (0,1) & (2,3) \end{pmatrix}$
Номер варіанту	Матриця
23	$\begin{pmatrix} (2,4) & (-2,1) \\ (-3,0) & (5,2) \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} (-1,2) & (3,-2) \\ (2,1) & (0,1) \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} (3,2) & (2,-1) \\ (-4,0) & (2,4) \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} (2,2) & (0,-1) \\ (-1,2) & (3,2) \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} (2,3) & (-1,1) \\ (0,-2) & (2,0) \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} (3,6) & (1,4) \\ (2,1) & (4,3) \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} (3,0) & (-5,3) \\ (1,3) & (1,1) \end{pmatrix}$

30	$\begin{pmatrix} (1,0) & (-2,1) \\ (-1,4) & (1,3) \end{pmatrix}$

Завдання 5. Побудувати в нормальній формі гри з двома повтореннями G (2) на основі ігор, матриці яких наведені в завданні 4.

Розділ 3. Індивідуальні заняття

Завдання по темі «Статичні гри з повною інформацією»

1. Кожен з двох гравців (i = 1,2) має по три стратегії: a, b, c і x, y, z відповідно. Взявши своє ім'я як нескінченну послідовність символів типу іваніваніваніван ...., Задайте виграші першого гравця так: u1 (a, x) = "і", u1 (a, y) = "в", u1 (a, z) = "а" , u1 (b, x) = "н", u1 (b, y) = "і", u1 (b, z) = "в", u1 (c, x) = "а", u1 (c, y) = "н", u1 (c, z) = "і". Підставте замість кожної літери імені її порядковий номер в алфавіті, для чого скористайтеся таблицею:

Таблиця 4. Числові коди символів російського алфавіту

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		а	б	в	г	д	е	ё	ж	з
1	и	й	к	л	м	н	о	п	р	с
2	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы
3	ь	э	ю	я						

Аналогічно використовуючи прізвище, задайте виграші другого гравця, u2 ().

а) Чи є у вашій грі домінуючі і строго домінуючі стратегії? Якщо є, то утворюють вони рівновагу в домінуючих стратегіях?

б) Яким буде результат послідовного відкидання строго домінованих стратегій?

в) Знайдіть рівноваги Неша цієї гри, в тому числі в змішаних стратегіях (якщо вони існують).

2. Складіть по імені, прізвища та по батькові гру трьох гравців, у кожного з яких по дві стратегії (0 або 1), за тим же принципом, як і в задачі 1. Дайте відповідь на ті ж питання, що і в п. 1.

Наприклад, у студента, ім'я, по батькові та прізвище якого Конрад Карлович Міхельсон, виграші в буквеному вираженні запишуться так:

$\bar{u}(0,0,0) = (\text{к}, \text{м}, \text{к}),$
$\bar{u}(0,0,1) = (\text{о}, \text{и}, \text{а}),$
$\bar{u}(0,1,0) = (\text{н}, \text{х}, \text{р}),$
$\bar{u}(0,1,1) = (\text{р}, \text{е}, \text{л}),$
$\bar{u}(1,0,0) = (\text{а}, \text{л}, \text{о}),$
$\bar{u}(1,0,1) = (\text{д}, \text{ь}, \text{в}),$
$\bar{u}(1,1,0) = (\text{к}, \text{с}, \text{и}),$
$\bar{u}(1,1,1) = (\text{о}, \text{о}, \text{ч})$

а в числовій формі вони мають такий вигляд:

$\bar{u}(0,0,1)=(12,14,12),$

$\bar{u}(0,0,1)=(16,10,1),$

$\bar{u}(0,1,0)=(15,23,18),$

$\bar{u}(0,1,1)=(18,6,13),$

$\bar{u}(1,0,0)=(1,13,16),$

$\bar{u}(1,0,1)=(5,30,3),$

$\bar{u}(1,1,0)=(12,19,10),$

$\bar{u}(1,1,1)=(16,16,25).$

Завдання по темі «Повторювані ігри»

Є наступна матриця, аналогічна матриці гри «Дилема ув'язненого»:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	L	a a	0 c
R	c 0	b b	

Значення a дорівнює залишку від ділення суми кодів літер імені студента на 10, значення b дорівнює 10 плюс залишок від ділення суми кодів літер батькові студента на 10, а значення з одно 20 плюс залишок від ділення суми кодів літер прізвища студента на 10.

Побудувати в нормальній формі гру з двома повтореннями вихідної гри і визначити в цій грі все рівноваги Неша і показати, які з них будуть досконалими в подиграх рівновагами Неша (СПРН).

Завдання по темі «Статичні ігри з неповною інформацією»

Розглянути гру «Вибір комп'ютера» з неповною інформацією, де значення корисностей (виграші) гравців слід розставити відповідно до кодів особистих даних студента:

			Игрок 2				
			Любит IBM	Любит Mac			
			IBM	Mac	IBM	Mac	
Игрок 1	Любит IBM	IBM	a a	0 b	c a	b b	[π]
Mac	b 0	c c	0 0	a c			
Любит Mac	IBM	a c	0 0	c c	b 0	[1-π]	
Mac	b	c	0	a			

b	a	b	a
		[π]	[1-π]

Значення а одно 20 плюс залишок від ділення суми кодів літер імені студента на 10, значення b дорівнює залишку від ділення суми кодів літер батькові студента на 10, а значення з одно 10 плюс залишок від ділення суми кодів літер прізвища студента на 10.

Дослідити кожен результат гри на предмет того, чи буде він рівноважним по Байеса-Нешу, і якщо так, то за яких значеннях ймовірностей π наявності любителів IBM.

Розділ 4. Завдання до заліку

Варіанти 1-20. У статичній грі з повною інформацією трьох гравців гравець 1 вибирає стратегію з безлічі $\{A_1, A_2\}$, гравець 2 обирає з безлічі $\{B_1, B_2\}$, а гравець 3 - з безлічі $\{C_1, C_2\}$. Знайти безліч рівноваг Неша, якщо функції виграшу гравців задані наступними парами матриць:

№ варіанту	Функції виграшу гравців		
1	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}4&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}4&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}2&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}-3&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}4&3\\2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}5&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$
2	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}2&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}4&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}-3&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}0&-2\\3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$
3	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}2&1\\2&5\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}-2&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}4&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$
4	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}-3&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}1&3\\2&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$
5	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}4&6\\1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}2&-2\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix}4&-3\\2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix} \\ \qquad B_1\quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix}-5&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\end{cases}$

6	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$

№ варіанту	Функції виграшу гравців		
7	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
8	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
9	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
10	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
11	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
12	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$
13	$u_1=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_2=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$	$u_3=\begin{cases} C_1 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \\ C_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{cases}$

№ варіанту	Функції виграшу гравців		
14	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
15	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
16	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
17	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
18	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
19	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$
20	$u_1=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{pmatrix}2 & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_2=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$	$u_3=\left\{\begin{array}{lcc} C_1 & \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\\ & B_1\ \ B_2 & \\ C_2 & \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}A_1\\ A_2\end{matrix}\end{array}\right.$

Варіанти 21 - 30. У наступній статичної грі з повною інформацією знайти всі рівноваги Неша, у тому числі в змішаних стратегіях.

№ варіанту	Матриця гри	№ варіанту	Матриця гри

21	$\begin{bmatrix} 1,2 & 3,-1 & 2,3 \\ 2,1 & 4,2 & 1,1 \\ 3,0 & 0,-2 & 0,0 \end{bmatrix}$	26	$\begin{bmatrix} 2,-4 & 3,0 & 2,1 \\ 0,1 & -4,2 & 2,-1 \\ 1,1 & 0,1 & 1,0 \end{bmatrix}$
22	$\begin{bmatrix} -1,1 & 2,0 & 1,1 \\ 2,-1 & 0,2 & 3,3 \\ 1,1 & 2,-2 & 0,-1 \end{bmatrix}$	27	$\begin{bmatrix} 3,4 & 2,4 & 5,2 \\ 2,0 & 6,0 & 1,1 \\ 0,2 & 0,-4 & 1,1 \end{bmatrix}$
23	$\begin{bmatrix} 2,1 & 1,0 & 4,3 \\ 0,-3 & 3,1 & 1,0 \\ 2,0 & 2,-4 & 0,1 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} -2,-1 & 2,-1 & 1,2 \\ 3,1 & -4,1 & 2,2 \\ -3,0 & 0,-3 & 0,0 \end{bmatrix}$
24	$\begin{bmatrix} 2,1 & 1,2 & 1,0 \\ -2,1 & 0,0 & 3,2 \\ 3,3 & 2,-1 & 1,1 \end{bmatrix}$	29	$\begin{bmatrix} -4,2 & 2,-2 & 1,1 \\ 0,2 & 2,0 & 0,2 \\ 3,-1 & 1,-2 & 5,4 \end{bmatrix}$
25	$\begin{bmatrix} 2,0 & 0,-2 & 0,1 \\ 4,1 & 0,0 & 1,3 \\ 2,4 & 1,-2 & 3,1 \end{bmatrix}$	30	$\begin{bmatrix} -1,2 & 1,-1 & 2,0 \\ -1,-1 & 0,2 & 3,-1 \\ 3,0 & 0,0 & 1,2 \end{bmatrix}$

Варіанти 31 - 40. У наступний схемах динамічних ігор з повною інформацією (див. Малюнки 1-4) виграші гравців взяти з статичних ігр варіантів 21-30 відповідно. Провести процес зворотної індукції, представити гру в нормальній формі і знайти в ній всі скоєні в підіграх рівноваги Неша.

Рис. 1. Схема варіантів 31-33

Рис. 2. Схема варіантів 34-36

Рис. 3. Схема варіантів 37,38

Рис. 4. Схема варіантів 39,40

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

на тему «Конфліктні ситуації і матричні ігри»

Мета роботи: отримати навики побудови математичної моделі та аналізу конфліктної ситуації.

Порядок виконання роботи

1.Вивчити необхідний теоретичний матеріал та ознайомиться з прикладами ігрового моделювання конфліктів [2, 3, 4, 6, 7].

2.Навести приклад конфліктної ситуації, побудувати її математичну модель та,провести необхідний аналіз, згідно з варіантом індивідуального завдання. Розрахунки можна виконувати за допомогою додатка Microsoft Excel або програм, що самостійно написані студентом, у середовищі Matlab 6.1.

3.Скласти платіжну матрицю гри «Страхування автомобілів».

4.Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

-постановку задачі;

-опис та аналіз ходу розв’язання задачі;

-висновки за результатом виконаної роботи.

Варіант завдань вибирається згідно списку.

Короткі теоретичні відомості

За умов ринкової економіки все частіше мають місце ***конфліктні ситуації***, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець — покупець (монополія —

монопсонія). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об’єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, можуть об’єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор — це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають ***іграми***.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***. Задачею кожного гравця є знаходження ***оптимальної стратегії***, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об’єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

Класифікація ігор

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається парною (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є множинною.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра — скінченна, в іншому разі — нескінченна.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо гру з нульовою сумою. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри — з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про кооперативну гру, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається некооперативною.

Матричні ігри двох осіб

Найчастіше розглядається гра з двома гравцями, в якій виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають ***грою двох осіб з нульовою сумою***. Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Отже, маємо два гравці А і В (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця А — A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця В — B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються спеціальними функціями, які залежать від стратегій гравців, як правило, у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця А;

$\varphi_2\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця В.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)+\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\equiv 0$.

Тоді в разі, якщо $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)=\varphi\left(A_i;B_j\right)$, то $\varphi_2\left(A_i;B_j\right)=-\varphi\left(A_i;B_j\right)$.

Отже, мета гравця А — максимізувати величину $\varphi\left(A_i;B_j\right)$, а гравця В — мінімізувати її. Нехай $\varphi\left(A_i;B_j\right)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю А:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям A_i, а стовпці — стратегіям B_j.

Матриця А називається ***платіжною***, а також ***матрицею гри***. Елемент цієї матриці a_{ij} — це виграш гравця А, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець В — стратегію B_j.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибирання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію у наступному.

Нехай гравець А вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює min a_{ij}, тобто навіть тоді, якщо гравець В і знав би стратегію гравця А. Передбачаючи таку можливість, гравець А має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a=\max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця А позначається A_{i_0} і має назву ***максимінної***, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається ***нижньою ціною гри***.

Гравець В, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця А. Стратегія гравця В позначається через B_{j_0} і називається ***мінімаксною***, а величина його програшу — ***верхньою ціною гри***, тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon,$$

тобто, якщо $a = \beta = \upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***. В такому разі виграш гравця А (програш гравця В) називається ***значенням гри*** і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$. Цілком визначені ігри називаються ***іграми з сідловою точкою***, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця А (програшу гравця В) і є сідловою точкою. В цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій — максимінної для гравця А та мінімаксної для гравця В, тобто якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад. Фірма виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл. 1:

Таблиця 1

СОБІВАРТІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ УСТАТКУВАННЯ, тис. ум. од.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5,$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5,$$

$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ — нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 — також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10,$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9,$$

$\beta = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ — верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення. Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки(стовпці)), називаються ***дублюючими***. Якщо всі елементи i-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів j-го рядка (стовпця), то кажуть, що i-та стратегія гравця А (гравця В) є ***домінуючою*** над j-ою.

Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Приклад. Маємо гру гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

Гравець В

$$\text{Гравець А}\begin{pmatrix}6 & 3 & 8 & 5 & 9\\6 & 5 & 7 & 6 & 6\\2 & 1 & 5 & 4 & 7\\4 & 4 & 3 & 8 & 8\end{pmatrix}.$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання.

Оптимізацію гри почнемо з визначення домінуючих стратегій для кожної із сторін, а також виключення із дальшого аналізу невигідних і дублюючих стратегій.

Визначимо домінуючі стратегії. Перша стратегія гравця А домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій противника є не гіршими, ніж за вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші, ніж відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша, ніж перша і може бути виключена із платіжної матриці.

Продовжуючи аналіз можливих дій гравця В, легко помітити, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 8 & 5\\6 & 5 & 7 & 6\\4 & 4 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

За вибору гравцем А першої стратегії залежно від дій гравця В він може отримати 6, 3, 8 або 5 одиниць виграшу. Але у будь-якому разі його виграш буде не меншим від $\min\{6,3,8,5\}=3,$ тобто незалежно від поведінки гравця В. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем А другої стратегії, то, міркуючи аналогічно, з'ясуємо, що його гарантований виграш становитиме $\min(6,5,7,6)=5.$ Для третьої стратегії маємо: $\min(4,4,3,8)=3.$

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати: $\alpha=\max\{3,5,3\}=5,$ а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною у даній грі.

Гравець В, який намагається мінімізувати свій програш, вибираючи першу стратегію, може програти 6,6 або 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця А гравець В може програти не більше ніж $\max\{6,6,4\}=6.$ Для другої стратегії маємо: $\max\{3,5,4\}=5,$ для третьої — $\max\{8,7,3\}=8,$ а для четвертої — $\max\{5,6,8\}=8.$ Отже, верхня ціна гри становитиме: $\beta=\min\{6,5,8,8\}=5.$

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки $\alpha=\beta,$ то ця гра має сідлову точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максимінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

З наведеного прикладу зрозуміло, чому мінімаксна та максимінна стратегії мають назву песимістичних. Вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти за найгірших для нього умов. Зрозуміло, що в даному разі вибір такої стратегії може не влаштовувати учасників гри. Нехай гравець А вибрав другу (максимінну) стратегію і притримується її. Допустимо, що гравцеві В став відомим вибір стратегії противника, тоді йому доцільно обрати третю стратегію, за якої виграш становитиме 7 одиниць. У свою чергу гравець А також знає про зміну стратегії гравця В на третю і вибирає першу стратегію, що дає йому змогу отримати виграш у сумі 8 одиниць і т. д. Можливість такого розвитку подій виникає тому, що мінімаксна та максимінна стратегії в даному разі ***не є стійкими***. Тобто обставини, за яких обидва гравці використовують мінімаксну та максимінну стратегії, невигідні гравцям у тому разі, коли один з них змінює свою оптимальну стратегію.

Однак така нестійкість властива не всім іграм із сідловою точкою. В деяких випадках сідловій точці відповідають стійкі максимінна та мінімаксна стратегії. В такому разі відхилення від оптимальної стратегії одним з гравців спричиняє таку зміну виграшу, яка є невигідною для цього гравця, оскільки стан або не змінюється, або погіршується.

Отже, в загальному випадку не можна стверджувати, що гра з сідловою точкою визначає стійкі оптимальні стратегії.

Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв’язок такої гри знаходять шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця А — вектор $X = (x_1, x_2, ... x_m)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$;

для гравця В — вектор $Y = (y_1, y_2, ... y_n)$, де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Очевидно, що $x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right)$; $y_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$.

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв’язку визначає теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема (*основна теорема теорії ігор*). Кожна скінченна гра має, принаймні, один розв’язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців А і В за теоремою визначають вектори $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ... x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ... y_n^*\right)$, що дають змогу отримати виграш:

$$\alpha \leq \upsilon \leq \beta.$$

Використання оптимальної змішаної стратегії гравцем А має забезпечувати виграш на рівні, не меншому, ніж ціна гри за умови вибору гравцем В будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \qquad (11.1)$$

З другого боку, використання оптимальної змішаної стратегії гравцем В має забезпечувати за будь-яких стратегій гравця А програш, що не перевищує ціну гри υ, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq \upsilon \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \qquad (11.2)$$

Ці співвідношення використовуються для знаходження розв’язку гри.

Зауважимо, що в даному разі розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри υ незалежно від того, яку із можливих змішаних стратегій вибрав інший гравець.

Геометрична інтерпретація гри 2 × 2

Найпростішим випадком скінченної гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії.

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідлової точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця А через $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця В — через $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець А притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш буде дорівнювати ціні гри. Отже, якщо гравець А притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (11.3), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*).$$

Розв’язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (11.4)$$

тоді:

$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (11.5)$$

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця В, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (11.6)$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*).$$

Розв’язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (11.7)$$

тоді: $y_2^* = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$. (11.8)

Ціну гри υ знаходять, підставлючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (11.3) або (11.6):

$$\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (11.9)$$

Приклад. Знайти розв’язок гри з платіжною матрицею:

B_j A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	3

Розв’язання. Переконаємося, що гра не має сідлової точки:

$$\max\{\min(2;\ 5);\ \min(4;3)\} = \max\{2;3\} = 3 = \alpha,$$

$$\min\{\max(2;\ 4);\ \max(5;3)\} = \min\{4;5\} = 4 = \beta.$$

Отже, ця гра не має сідлової точки. Скористаємося формулами (11.4), (11.5), (11.7), (11.8), (11.9). Маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3-4}{2+3-5-4} = \frac{1}{4};$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$y_1^* = \frac{3}{4};$$

$$y_2^* = \frac{1}{4}.$$

Ціна гри $\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{2+3-5-4} = 3{,}5$.

Отже, оптимальна стратегія кожного гравця полягає в тому, щоб випадково чергувати свої «чисті» стратегії. Гравець А має використовувати першу стратегію з імовірністю $\frac{1}{4}$, а другу — з імовірністю $\frac{3}{4}$, а гравець В — навпаки. За цих умов середній виграш дорівнюватиме 3,5.

Розв’язку гри 2 × 2 можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Розглянемо гру з платіжною матрицею виду:

B_j A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Відмітимо на осі абсцис відрізок довжиною, що дорівнює одиниці (рис. 11.1). Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 0$) буде відповідати стратегії A_1, а правий кінець ($x = 1$) — стратегії A_2, всі проміжні точки цього відрізка відповідатимуть змішаним стратегіям гравця А, причому імовірність x_1 стратегії A_1 буде дорівнювати відстані від точки Р до правого кінця відрізка, а ймовірність x_2 стратегії A_2 — відстані до лівого кінця відрізка. Проведемо через точки A_1 та A_2 два перпендикуляри до осі абсцис: вісь І і вісь ІІ. На першій з них відмітимо виграш за вибору стратегії A_1, а на другій — за стратегії A_2.

Нехай противник вибрав стратегію B_1, їй відповідають на осях І та ІІ дві точки B_1, причому довжина відрізка A_1B_1 дорівнює a_{11}, а довжина відрізка A_2B_1 дорівнює a_{12}.

Аналогічно будуємо пряму B_2B_2, яка відповідає стратегії B_2.

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^*, таку, за якої мінімальний виграш гравця A буде максимальним. Для цього виділимо жирною лінією на малюнку нижню межу виграшу за умови вибору стратегій B_1 та B_2, тобто ламану лінію B_1MB_2. На цій межі знаходяться значення мінімального виграшу гравця A за будь-якої його змішаної стратегії. Очевидно, що найкраще з можливих мінімальних значень у нашому прикладі знаходиться в точці M, а в загальному випадку відповідає тій точці, де крива, що позначає мінімальний виграш гравця A, набуває максимального значення. Ордината цієї точки є ціною гри υ. Відстань до лівого кінця відрізка x_2 та відстань до правого кінця відрізка — x_1 дорівнюють відповідно ймовірностям стратегій A_2 та A_1.

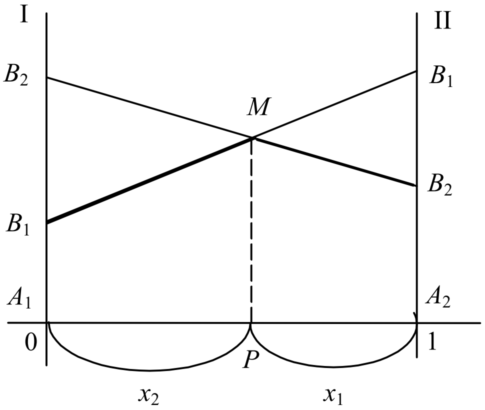

Рис. 11.1

Геометрична інтерпретація дає також змогу наочно зобразити нижню та верхню ціну гри (рис. 11.2). Для нашого прикладу нижньою ціною гри є величина відрізка A_2B_2, а верхньою ціною гри — A_2B_1.

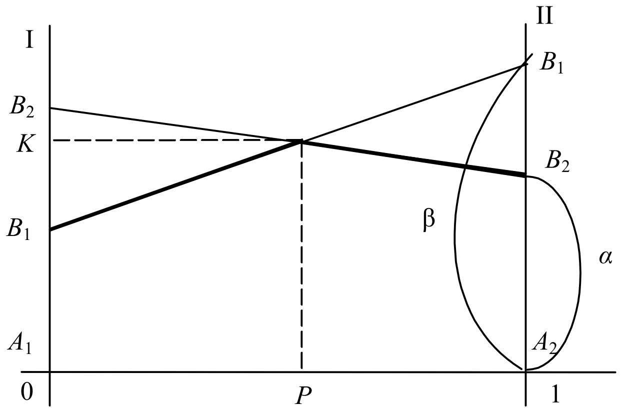

Рис. 11.2

На цьому ж рисунку можна розглянути і геометричну інтерпретацію оптимальних стратегій противника В. Дійсно, частка y_1^* стратегії B_1 в оптимальній змішаній стратегії $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$ дорівнює відношенню довжини відрізка KB_2 до суми довжин відрізків KB_2 та KB_1 на осі I: $y_1^* = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1} = \frac{KB_2}{B_1B_2}$.

З наведених міркувань легко висновувати, що гру 2 × 2 можна розв'язати елементарними прийомами. Аналогічно може бути розв'язана гра 2 × n, тобто коли гравець A має лише дві стратегії, а гравець B – n. У такому разі на рисунку слід зобразити перетин n прямих, що відповідатимуть n стратегіям гравця B. Мінімальні виграші гравця A являтимуть собою також ламану лінію, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для гравця A (рис. 11.3).

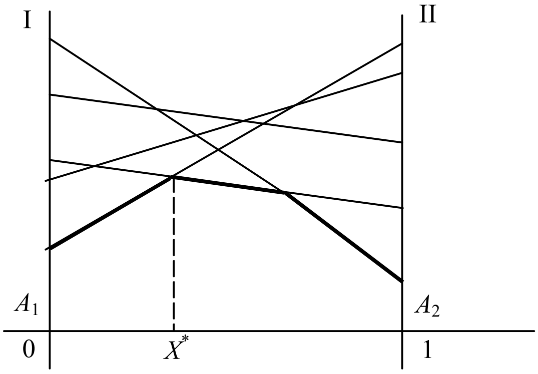

Рис. 11.3

Можна також розв’язати і гру $m \times 2$, з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню і знаходити не максимальне з можливих значення, а мінімальне.

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо гра $2 \times n$ або $m \times 2$ може бути розв’язана геометрично, то у випадку гри $3 \times n$ ($m \times 3$) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. У випадку ж, коли $n > 3$, $m > 3$, геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв’язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця А та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_m$ для гравця В і платіжною матрицею (a_{ij}) $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця А. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) υ, за будь-якої поведінки гравця B.

Допустимо, що гравець А застосовує свою оптимальну стратегію, а гравець В — свою «чисту» j-ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця А дорівнюватиме:

$$a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + ... + a_{mj}x_m^* . \qquad (11.10)$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри. Отже, для будь-якого значення j $(j = \overline{1,n})$ величина виду (11.10) має бути не меншою, ніж υ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + ... + a_{m1}x_m^* \ge \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + ... + a_{m2}x_m^* \ge \upsilon; \\ \text{.......................................} \\ a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + ... + a_{mn}x_m^* \ge \upsilon. \end{cases}$$

Розділивши всі обмеження на υ, отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{21}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{m1}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ a_{12}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{m2}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ \text{...} \\ a_{1n}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{mn}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1. \end{cases}$$

Позначивши $\frac{x_i^*}{\upsilon} = t_i$, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}$$

$$t_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Враховуючи умову, що $x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* = 1$, отримуємо $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, врешті маємо звичайну задачу лінійного програмування.

Цільова функція:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{i=1}^{m} t_i \qquad (11.11)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \qquad (11.12)$$

$$t_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right). \qquad (11.13)$$

Розв’язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо значення $t_i \left(i = \overline{1, m}\right)$, а також величину $\frac{1}{\upsilon}$ і значення $x_i^* = \upsilon t_i$, що є оптимальним розв’язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ для гравця *A*.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця *B*. З цією метою позначимо:

$$u_j = \frac{y_j^*}{\upsilon} \ \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Маємо таку лінійну модель задачі:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \leq 1; \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1. \end{cases}$$

$$u_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця *B* є двоїстою до задачі гравця *A*, а тому оптимальний розв’язок однієї з них визначає також оптимальний розв’язок спряженої.

Розглянемо приклад застосування методів лінійного програмування для знаходження оптимального розв’язку гри.

Приклад. Агрофірма «Зоря» розробила шість бізнес-планів (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) для їх здійснення у наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено п’ять ситуацій (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5). Для кожного варіанта $X_i \left(i = \overline{1, 6}\right)$

бізнес-плану та зовнішньої ситуації $Y_j\ \left(j=\overline{1,5}\right)$ обчислені прибутки, які наведені у табл. 2:

Таблиця .2

Варіант бізнес-плану	Зовнішня ситуація				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів.

Розв'язання.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

$$a=\max\{\min(1{,}0;1{,}5;2;2{,}7;3{,}2);\min(1{,}2;1{,}4;2{,}5;2{,}9;3{,}1);$$
$$\min(1{,}3;1{,}6;2{,}4;2{,}8;2{,}1);\min(2{,}1;2{,}4;3;2{,}7;1{,}8);\min(2{,}4;2{,}9;3{,}4;1{,}9;1{,}5);$$
$$\min(2{,}6;2{,}7;3{,}1;2{,}3;2);\}=\max\{1{,}0;1{,}2;1{,}3;1{,}8;1{,}5;2\}=2,$$

а також

$$\beta=\min\{\max(1{,}0;1{,}2;1{,}3;2{,}1;2{,}4;2{,}6);\max(1{,}5;1{,}4;1{,}6;2{,}4;2{,}9;2{,}7);$$
$$\max(2;2{,}5;2{,}4;3;3{,}4;3{,}1);\max(2{,}7;2{,}9;2{,}8;2{,}7;1{,}9;2{,}3);$$
$$\max(3{,}2;3{,}1;2{,}1;1{,}8;1{,}5;2)\}=\min\{2{,}6;2{,}9;3{,}4;2{,}9;3{,}2\}=2{,}6\ .$$

Отже, $\alpha\neq\beta$, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6$$

за умов:

$$t_1+1{,}2t_2+1{,}3t_3+2{,}1t_4+2{,}4t_5+2{,}6t_6\geq 1;$$
$$1{,}5t_1+1{,}4t_2+1{,}6t_3+2{,}4t_4+2{,}9t_5+2{,}7t_6\geq 1;$$
$$2t_1+2{,}5t_2+2{,}4t_3+3t_4+3{,}4t_5+3{,}1t_6\geq 1;$$
$$2{,}7t_1+2{,}9t_2+2{,}8t_3+2{,}7t_4+1{,}9t_5+2{,}3t_6\geq 1;$$
$$3{,}2t_1+3{,}1t_2+2{,}1t_3+1{,}8t_4+1{,}5t_5+2t_6\geq 1;$$
$$t_i\geq 0\ \left(i=\overline{1,6}\right).$$

Розв'язуємо цю задачу симплексним методом. Оптимальний розв'язок задачі: $t_2=0{,}11$; $t_6=0{,}33$. Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^*=0{,}24$; $x_6^*=0{,}76$. Ціна гри $\upsilon=2{,}264$.

Завдання № 1

Знайти рішення і ціну гри, заданої наступною платіжною матрицею:

1.A=$\begin{pmatrix}12 & 22\\ 33 & 3\end{pmatrix}$ 2.A=$\begin{pmatrix}15 & 22\\ 33 & 5\end{pmatrix}$ 3.A=$\begin{pmatrix}17 & 22\\ 33 & 5\end{pmatrix}$

4.A=$\begin{pmatrix}15 & 22\\ 33 & 3\end{pmatrix}$ 5.A=$\begin{pmatrix}12 & 22\\ 33 & 5\end{pmatrix}$ 6.A=$\begin{pmatrix}17 & 22\\ 33 & 3\end{pmatrix}$

7.A=$\begin{pmatrix}19 & 22\\ 33 & 3\end{pmatrix}$ 8.A=$\begin{pmatrix}19 & 22\\ 33 & 5\end{pmatrix}$ 9.A=$\begin{pmatrix}19 & 22\\ 33 & 7\end{pmatrix}$

10.A=$\begin{pmatrix}15 & 24\\ 35 & 3\end{pmatrix}$ 11.A=$\begin{pmatrix}12 & 24\\ 35 & 5\end{pmatrix}$ 12.A=$\begin{pmatrix}17 & 24\\ 35 & 3\end{pmatrix}$

13.A=$\begin{pmatrix}15 & 26\\ 33 & 3\end{pmatrix}$ 14.A=$\begin{pmatrix}12 & 22\\ 35 & 5\end{pmatrix}$ 15.A=$\begin{pmatrix}17 & 22\\ 35 & 3\end{pmatrix}$

16.A=$\begin{pmatrix}15 & 28\\ 33 & 3\end{pmatrix}$ 17.A=$\begin{pmatrix}12 & 28\\ 35 & 5\end{pmatrix}$ 18.A=$\begin{pmatrix}17 & 22\\ 38 & 3\end{pmatrix}$

19.A=$\begin{pmatrix}15 & 26\\ 35 & 3\end{pmatrix}$ 20.A=$\begin{pmatrix}12 & 22\\ 38 & 5\end{pmatrix}$ 21.A=$\begin{pmatrix}17 & 26\\ 35 & 3\end{pmatrix}$

22.A=$\begin{pmatrix}15 & 26\\ 33 & 5\end{pmatrix}$ 23.A=$\begin{pmatrix}12 & 22\\ 35 & 8\end{pmatrix}$ 24.A=$\begin{pmatrix}17 & 22\\ 35 & 8\end{pmatrix}$

25.A=$\begin{pmatrix}15 & 26\\ 33 & 8\end{pmatrix}$ 26.A=$\begin{pmatrix}12 & 28\\ 35 & 8\end{pmatrix}$ 27.A=$\begin{pmatrix}17 & 28\\ 35 & 8\end{pmatrix}$

28.A=$\begin{pmatrix}17 & 28\\ 33 & 3\end{pmatrix}$

Завдання № 2

1. Навести змістовний приклад конфліктної ситуації, що моделюється у вигляді біматрічної або матричної гри та має не менше чотирьох чистих стратегій для кожного гравця. Побудувати відповідну ігрову модель.

2. Знайти для цієї гри:

1) розв'язання в чистих стратегіях та всі сідлові точки, якщо це можливо;

2) обчислити нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

3. Навести по два приклади матричних ігор (матриць А), які:

1) мають більше однієї сідлової точки і знайти ці сідлові точки та відповідні оптимальні розв'язки;

2) мають тільки одну сідлову точку та знайти відповідний оптимальний розв'язок;

3) не мають оптимальних рішень в чистих стратегіях, обчислити для них нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

У матриці А повинно бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини перебувають у межах відрізка [C1, C2]. Розмірність матриці А та межі C1, C2 вибрати у нижчеподаній таблиці відповідно до номера в журналі:

№	N1	N2	C1	C2	№	N1	N2	C1	C2
1	3	3	-4	5	16	2	6	5	11
2	3	4	-4	5	17	4	3	5	11
3	3	5	-4	5	18	4	5	5	11
4	2	6	-4	5	19	4	4	5	11

5	4	3	-4	5	20	6	2	5	11
6	4	5	-4	5	21	5	2	5	11
7	4	4	-4	5	22	5	3	5	11
8	6	2	-4	5	23	5	4	5	11
9	5	2	-4	5	24	5	5	5	11
10	5	3	-4	5	25	3	3	11	16
11	5	4	-4	5	26	3	4	11	16
12	5	5	-4	5	27	3	5	11	16
13	3	3	5	11	28	2	6	11	16
14	3	4	5	11	29	4	3	11	16
15	3	5	5	11	30	4	5	11	16

Завдання № 3

Розглянемо один з найбільш розповсюджених і відомих видів страхування - страхування автомобілей. У світі страхування автомобілів є обов'язковим, і кожен автолюбитель стикається з даною проблемою. Багато автолюбителів хотіли б, по-перше, максимально знизити свої витрати на страхові внески, а, по-друге, при настанні страхового випадку отримати максимальну виплату. Страховик при цьому, навпаки, хотів би отримувати максимальні премії і виплачувати мінімальні суми при настанні страхового випадку. Інтереси автолюбителя (страхувальника) і страховика антагоністичні, і відносини, в які вони вступають один з одним, можна розглядати в якості парної антагоністичної гри.

У розглянутій конфліктної ситуації присутні дві сторони:

А - це автомобіліст (страхувальник), метою якого являється зменшення витрат на страхування, а в разі дорожньо-транспортної пригоди (ДТП) - отримання максимального виплати. При укладанні договору він страхує автомобіль на повну його вартість;

В - страхова компанія (страховик), метою якої є отримання максимального прибутку (тобто максимальних страхових внесків і мінімальних виплат при настанні страхових випадків).

У автомобіліста існують три стратегії:

A_1 - керувати автомобілем гранично акуратно і при укладенні договору вказувати справжню вартість автомобіля (X_1, тис.грн.). Будемо припускати, що якщо водій уважний за кермом і стежить за дорогою, то ймовірність настання страхового випадку практично дорівнює нулю (виключимо можливість викрадення);

A_2 - керувати автомобілем гранично акуратно і при укладанні договору вказувати занижену вартість автомобіля (страхову суму) (X_2, тис.грн.) з метою зменшення страхових внесків;

A_3 - не стежити за дорогою і вказати завищену вартість автомобіля (X_3, тис.грн.). Оскільки в даному випадку ймовірність настання страхового випадку велика, а власник автомобіля вказав завищену вартість, то при ДТП автомобіліст отримає компенсацію більше, ніж якби він вказав справжню вартість автомобіля.

При цьому слід пам'ятати, що якщо страхова компанія встановить, що аварія сталася з вини водія або що він вказав завищену або занижену вартість автомобіля, то страхової виплати може не бути і автомобіліст може бути оштрафований (нехай в даному випадку це є однією з умов договору).

У страхової компанії існують чотири стратегії:

B_1 - не проводити оцінку вартості автомобіля і повірити автомобілісту на слово, а також не займатися розслідуванням у разі ДТП на предмет встановлення винної .с метою економії часу;

B_2 - проводити розслідування в разі настання страхового випадку, але не робити оцінку вартості автомобіля;

Вз - перевіряти вартість автомобіля, але не проводити розслідування при ДТП;

B_4 - проводити розслідування у випадку ДТП і перевіряти, чи відповідає зазначена вартість автомобіля реальності.

Нехай у разі виявлення невірно зазначеної вартості автомобіля страховик стягує штраф із страхувальника у розмірі 15% від реальної вартості об'єкта страхування. Якщо установлено, що ДТП настало з вини страхувальника, то він не отримує страхову виплату. Страховий внесок за страховий період складає 10% від зазначеної страхової суми. Будемо припускати, що при настанні страхового випадку автомобіль руйнується повністю. За розглянутий страховий період проводиться тільки один внесок, і страховий випадок може наступити не більше одного разу.

Складти платіжну матрицю гри.

Варіанти:

Вар.	1	2	3	4	5	6
X_1	320	350	250	400	450	500
X_2	200	250	150	300	300	400
X_3	440	450	300	500	550	600
Вар.	7	8	9	10	11	12
X_1	330	370	850	480	550	600
X_2	210	250	550	330	380	500
X_3	400	480	900	500	650	700
Вар.	13	14	15	16	17	18
X_1	650	750	350	800	850	900
X_2	550	350	150	300	300	400
X_3	700	850	300	850	950	950

Питання для підготовки до захисту домашньої роботи

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип мінімаксу.
6. Дайте визначення максимінної та мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається скінченною, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
10. Чи будь-який конфлікт моделюється матричною грою?
11. Які припущення про поведінку гравців робляться при моделюванні конфлікту?

12. Чим відрізняються захисна та урівноважена стратегії?
13. За яких умов матрична гра має декілька оптимальних розв’язків?
14. Який сенс мають нижня та верхня ціни гри?

ОСНОВНА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1.Захаров А.В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов – М.: Изд. Дом Высшей школы экономики, 2015.
2.В.И. Данилов. Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа,2002.
3.A. Dixit, B. Nalebuff. The Art of Strategy. New York: W.W. Norton and Company. 2008.
4.Т. Шеллинг. Стратегия конфликта. (Перевод с английского). М.: ИРИСЭН.2007.
5.Теория игр. Искусство мышления в бизнесе и жизни / Авинаш Диксит и Барри Нейлбафф; пер. англ. Н. Яцюк.- М.: Манн, Иванов и Фербер, 2015.- 464 с.
6.Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. М.: МЗ Пресс, 2007.
7. Джеффри А. Джейли, Филип Дж. Рени. Микроэкономика: продвинутый уровень /пер. с англ.; под науч. ред. В. П. Бусыгина, М. И. Левина, Е. В. Покатович. М.:НИУ ВШЭ, 2011.
8. Шагин В. Л. Теория игр с экономичекими приложениями. М.: Издательство ГУ ВШЭ, 2003.
9.Юдкевич М.М., Левина Е.А. Конспект лекций по курсу "Экономические приложения теории игр". М.: ГУ-ВШЭ, 2003.
10. Данилов В.И. Лекции по теории игр. Конспект лекций. РЭШ, 2002.

Олешко Тамара Іванівна

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ»

Підписано до друку 15.09.2016 р. Формат 60х90 1/16.
Папір офсетний. Умовн. др. арк. 3,2
Друк різограф. Тираж 300 прим. Зам. № …..

Підприємство УВОІ "Допомога" УСІ"
Свідотцтво про державну реєстрацію №531018
03056, м. Київ, пров. Політехнічний 6, корп. 5 (КПІ)
Тел.: 277-41-46