УДК 514.142:004.922(043.2)

АФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Бузиль А. В.

Національний авіаційний університет, м. Київ

Науковий керівник: Родіонова О.В., ст. викл. кафедри КММТ

Анотація. *Описано афінні перетворення у просторі. Проаналізовано їх поняття, властивості. Вивчено способи отримання афінних перетворень.*

Ключові слова: *афінне поретворення, матриці, точки, вектори, фрактали, дерево Піфагора.*

Формування зображення та різноманітні дії з ним вимагають від користувача відомої математичної грамотності. Геометричні поняття, формули та факти, що відносяться до плоского та тривимірного випадків, грають у завданнях комп'ютерної графіки особливу роль. Принципи аналітичної геометрії у поєднанні з можливостями обчислювальної техніки, що постійно розширюються, є невичерпним джерелом істотних поступів на шляху розвитку комп'ютерної графіки, її ефективного використання в САПР.

Афінне перетворення (лат. affinis, «пов'язаний з») — відображення площини або простору в собі, при якому паралельні прямі переходять у паралельні прямі, пересічні — в пересічні, мимобіжні — в мимобіжні ($f: = R^x \to R^x$) (рис.1).

Це можна записати у вигляді

$$f(x) = \boldsymbol{M} \cdot x + v,$$

де $\boldsymbol{M}$— невироджена матриця і $v \in R^n$.

Інакше кажучи, відображення називається афінним, якщо його можна отримати таким способом:

1. Обрати «новий» базис простору з «новим» початком координат *{v}*.

2. Координатам x кожної точки простору поставити у відповідність нові координати f (x), які мають те саме положення в просторі відносно «нової» системи координат, яке координати x мали в «старій».

Рис. 1. Ілюстрація афінного перетворення

Під афінним перетворенням розуміють функцію, яка приймає (точку або вектор) і відображає її на іншу точку (або вектор). Для точок перетворення формально записується у вигляді: *Q = T(P)*; а для векторів - у вигляді ***v = R(u)***.

При використанні однорідних координат і векторів і точки представляються у вигляді чотиривимірних матриць-стовпців. У такому разі перетворення має однаковий вигляд і для точок, і для векторів одного і того ж фрейму: ***q=f(p), v=f(u)***.

Для виконання просторових побудов, аналогічно двовимірному завданню, три координати точки *(x, y, z)* замінюються четвіркою чисел *(x, y, z, 1)*. Це дає можливість скористатися матричним записом у складних тривимірних задачах.

Будь-яке афінне перетворення у тривимірному просторі може бути представлене у вигляді суперпозиції обертань, розтягувань, відбитків та переносів. Математично всі перетворення зводяться до перемноження матриць четвертого порядку. Наприклад, матриця обертання навколо осі абсцис на кут j має вигляд:

$$(R_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перетворення на площині та у просторі. У комп'ютерній графіці все, що відноситься до плоского випадку, прийнято позначати *2D (2 Dimensions)* двомірне, а все що відноситься до просторових - *3D (3 Dimensions).*

У *3D* просторі точка (вектор) описується трьома координатами *(x, y, z)*, або чотирма однорідними координатами *(x, y, z, 1)*.

Слід запровадити поняття ліва та права трійка векторів. Три вектори ***a, b, c*** утворюють праву трійку, якщо після суміщення почав векторів найкоротший поворот від ***a*** до ***b*** здається спостерігачеві, що дивиться з кінця вектора ***c*** ідуть проти годинникової стрілки. Правило правої руки – вектор а поєднується з ліктем, вектор ***b*** входить у долоню, вектор ***c*** збігається з великим пальцем. Систему координат прийнято називати правою, якщо її напрямні вектора утворюють праву трійку:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b},$$

де ***c*** – вектор перпендикулярний до обох векторів, утворює з ними праву трійку.

$$C_x = A_y * B_z - A_z * B_y$$

$$C_y = A_z * B_x - A_x * B_z$$

$$C_z = A_x * B_y - A_y * B_x$$

Перетворення залишаються ті ж: обертання (тільки тепер навколо трьох осей), розтягнення, відображення (щодо трьох площин), перенесення.

Обертання проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат для лівої системи координат (для правої – навпаки).

В результаті застосування афінних перетворень побудовано фрактал - дерево Піфагора (рис. 2):

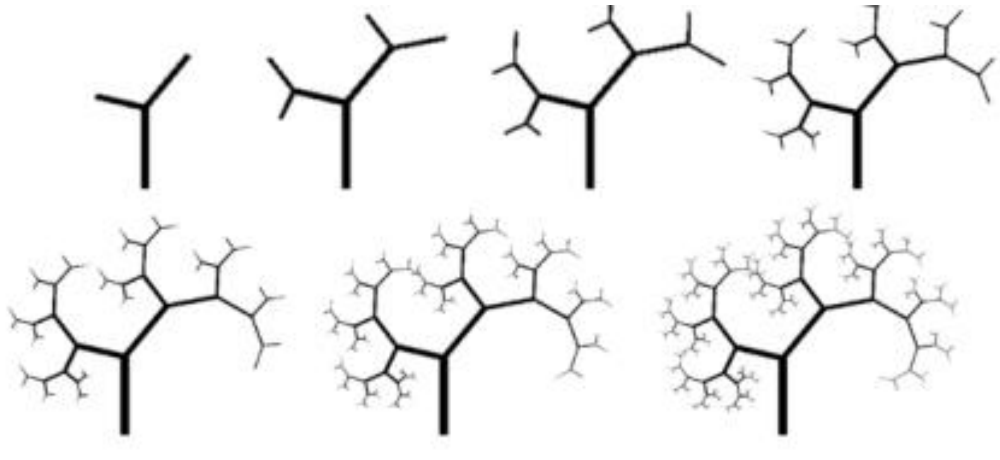

Рис. 2. Етапи побудови дерева Піфагора

У комп’ютерній графіці фрактали широко застосовуються завдяки компактності математичного апарату.

Фрактальні дерева, гори і цілі пейзажі задаються простими формулами а за допомогою математичних розрахунків можна передбачити результат афінного перетворення для конкретної задачі.

Для мультимедійних видань афінні перетворення є складовою і важливою частиною створення графічних об’єктів у *3-D* графіці, в поліграфічній галузі афінні перетворення є незамінними при роботі систем автоматичної переробки інформації – САПР, що суттєво впливає на продуктивність технологічних операцій.

СПИСОК ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Croft, H. T.; Falconer, K. J.; and Guy, R. K. Unsolved Problems in Geometry. New York: Springer-Verlag, p. 3, 1991.

2. Gray, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, p. 130, 1997.

3. Zwillinger, D. (Ed.). "Affine Transformations." §4.3.2 in CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 265-266, 1995.