УДК: 512:62

https://doi.org/10.52058/2786-5274-2023-10(24)-648-659

Рева Надія Віталіївна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”, Солом’янський район, пр. Берестейський, 37, м. Київ, 03056, тел.: (044) 204-82-46, https://orcid.org/0000-0003-1329-4127

Гришко Олена Миколаївна старший викладач кафедри прикладної математики, Національний авіаційний університет, пр. Гузара Любомира, 1, м. Київ, 03058, тел.: (044) 408-92-07, https://orcid.org/0009-0003-7720-6357

Олійник Олег Петрович старший викладач кафедри вищої математики, Національний авіаційний університет, пр. Гузара Любомира, 1, м. Київ, 03058, тел.: (044) 406-73-24, https://orcid.org/0000-0003-1564-0214

Варивода Вікторія Олександрівна асистент кафедри прикладної математики**,** Національний авіаційний університет, пр. Гузара Любомира, 1, м. Київ, 03058, тел.: (044) 408-92-07, https://orcid.org/0009-0002-1190-8447

РОЛЬ І ЗАСТОСУВАННЯ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Анотація. В математиці ми зазвичай зустрічаємося як з прямими, так і з оберненими діями. Математична операція, яка є обернененою до множення многочлена на многочлен, – це розкладання многочлена на множники. Стаття ілюструє виконання і застосування операції розкладання многочлена на множники, що має широке застосування у різних галузях математики, фізики, інженерії.

В контексті вивчення математитичних дисциплін многочлени відіграють особливу роль, оскільки їх використовують в широкому спектрі математичних моделей та наукових теорій. Застосування многочленів залежить від конкретної галузі науки. Алгебра вивчає многочлени як фундаментальний об'єкт. Їх використовують для розв'язування рівнянь, побудови алгебраїчних розширень, дослідження структури алгебраїчних об'єктів. В аналітичній геометрії за допомогою многочленів описують геометричні об'єкти, такі як криві, поверхні та їхню взаємодію.

Зосереджуючись на аналізі коренів многочленів, стаття висвітлює, як при вивченні математичних дисциплін операція розкладання многочлена на множники допомагає спрощувати обчислення, сприяє пошуку більш простого розв'язання великої кількості задач, в яких многочлени виступають математичними об'єктами (наприклад, встановлення спільної точки двох алгебраїчних кривих, знаходження власних чисел матриці, обчислення деяких границь, пошук екстремумів функцій з похідними у вигляді многочленів тощо). У статті окрім стандартних додаються нові підходи до вивчення многочленів, зокрема, із залученням можливостей програмного пакету Mathcad. Поглиблення знань щодо операції розкладання многочлена на множники посилює розуміння важливості такого математичного обєкту як многочлен, розширює можливості застосування та аналізу певних математичних моделей, сприяючи подальшому розвитку наукових досліджень вже більш складних проблем.

Ключові слова: многочлен, корінь многочлена, розклад многочлена на множники, кратність кореня многочлена, інформаційно-комунікаційні технології, програмний пакет Mathcad.

Reva Nadiia Vitaliivna Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Physics and Differential Equations, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorskyi", Solomyanskyi district, Beresteyskyi Ave., 37, Kyiv, 03056, tel.: (044) 204-82-46, https://orcid.org/0000-0003-1329-4127

Hryshko Olena Mykolaivna Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics, National Aviation University, Guzara Lubomyra Ave., 1, Kyiv, 03058, tel.: (044) 408-92-07, https://orcid.org/0009-0003-7720-6357

Oliynyk Oleh Petrovych Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, National Aviation University, Guzara Lubomyra Ave., 1, Kyiv, 03058, tel.: (044) 406-73-2424, https://orcid.org/0000-0003-1564-0214

Varyvoda Viktoriia Oleksandrivna Teaching Assistant of the Department of Applied Mathematics, National Aviation University, Guzara Lubomyra Ave., 1, Kyiv, 03058, tel.: (044) 408-92-07, https://orcid.org/0009-0002-1190-8447

THE ROLE AND APPLICATION OF POLYNOMIAL FACTORIZATION IN THE MATHEMATICAL DISCIPLINES STUDYING PROCESS

Abstract. In mathematics, we commonly encounter both direct and inverse operations. The mathematical operation that is the inverse of multiplying one polynomial by another is called polynomial factorization or polynomial factoring. This article illustrates the execution and application of the polynomial factorization operation, which finds widespread use in various fields of mathematics, physics, and engineering.

In the context of studying mathematical disciplines, polynomials play a special role as they are used in a wide range of mathematical models, theories, and science in general.

The application of polynomials depends on the specific field of science. Algebra studies polynomials as a fundamental object. They are used for solving equations, constructing algebraic extensions, and investigating the structure of algebraic objects. In analytic geometry, polynomials are used to describe geometric objects such as curves, surfaces, and their interactions.

Focusing on the analysis of polynomial roots, the article highlights how the operation of polynomial factorization aids in simplifying calculations and facilitates finding simpler solutions to a large number of problems in various mathematical disciplines where polynomials serve as mathematical objects (e.g., determining the common points of two algebraic curves, finding eigenvalues of matrices, computing certain limits, searching for extrema of functions with polynomial derivatives, etc.). The article introduces new approaches to studying polynomials, particularly involving the capabilities of the Mathcad software package. Deepening knowledge of the polynomial factorization operation enhances the understanding of the significance of this mathematical object, broadens the possibilities for applying and analyzing certain mathematical models, and contributes to further advancement in scientific research, even for more complex problems.

Keywords: a polynomial, a polynomial root, polynomial factorization, the multiplicity of a root of a polynomial, information and communication technologies, Mathcad software package.

Постановка проблеми. Підвищення якості вищої освіти, зокрема, математичної, є важливим завданням, що потребує активної участі викладачів вищих навчальних закладів (ВНЗ). Одним з аспектів цього завдання є розвиток у студентів навичок застосування теоретичних знань для розв'язання реальних завдань практичного і прикладного спрямування. Навчання математичним дисциплінам передбачає формування важливих для повсякденного життя і майбутньої професійної діяльності математичних умінь і навичок.

Автори досить часто фіксують своєрідну «проблему академічності» в процесі навчання математичним дисциплінам, коли теоретичні знання неосмисленно накопичуються студентами і є ніби відірваними від практичних потреб. Для того, щоб більш ефективно застосовувати навички і набуті теоретичні знання, автори пропонують на деяких етапах розв’язання тієї чи іншої задачі, коли виникають громіздкі обчислення чи є проблеми з візуалізацією умови, впроваджувати в освітній процес елементи інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Розв'язання задач практичного спрямування з використанням ІКТ реалізуватиме прикладну спрямованість курсів математичних дисциплін у ВНЗ.

В якості допоміжного програмного забезпечення автори обрали програмний пакет Mathcad, використання якого підвищує ефективність навчального процесу, звільняє його від рутинних операцій. Переваги впровадження системи Mathcad порівняно з іншими програмними засобами полягають в її інструментарії, який розраховано на процес навчання у ВНЗ, при цьому простота інтерфейсу дозволяє працювати з нею викладачу і студенту без попередньої інформаційної підготовки.

Студентам інженерних спеціальностей під час навчання математичним дисциплінам часто пропонуються прикладні задачі, в яких математичними моделями процесів виступають многочлени. Тому виникає потреба у глибокому осмисленні ролі многочлена, знаходженні і аналізуванні його коренів, вмінні розкладати многочлен на множники.

Насьогодні така теорія широко розвинена, але потребує деталізації та вивчення практичних застосувань. Детальний аналіз проблеми сприятиме подальшій розробці методів розв'язання задач, що вимагають розкладання многочлена на множники, та збагаченню наукового дискурсу в цій області.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія многочленів почала свій розвиток як частина класичної алгебри, що була активно вивчена до середини XIX століття. Над нею працювали математики Джераламо Кардано, Нікколо Тарталья, Нільс Генрік Абель, які досліджували поняття кратності кореня та питання розв'язування алгебраїчних рівнянь.

У шкільному курсі математики елементи теорії многочленів вивчаються з 7 по 11 класи. Викладачі-новатори А.Мерзляк, Є.Нелін, В.Полонський, З.Слєпкань, М.Якір, Ф.Яремчук [1−5, 10] у своїх навчальних матеріалах запропонували приклади застосування алгебри многочленів для прикладних задач, які сприяють поглибленню знань і можуть бути використані при підготовці учнів до олімпіад та позакласної роботи з математики.

В рамках математичної освіти у ВНЗ питання прикладної спрямованості та практичного застосування многочленів у своїх працях розглядали С.Завало [6, 7], В.Швець [8], М.Шкіль [9], Ф.Яремчук [10] та інші українські викладачі-математики, які внесли вагомий внесок у розвиток теорії та її застосування в різних галузях науки і технологій.

Безумовно, питання, розглянуті в роботі, потребують подальших досліджень і дорозвинення. Актуальність даної теми полягає в складності розуміння матеріалу, великої кількості понять і формул, новизни викладу і різного символічного позначення.

Мета статті. Охарактеризувати роль і застосування розкладання многочлена на множники. Проаналізувати основні та запропонувати нові прийоми розв'язання деяких задач, що вимагають розкладання многочлена на множники із використанням програмного засобу Mathcad.

Виклад основного матеріалу. В контексті вивчення математитичних дисциплін многочлени відіграють важливу роль, оскільки застосовуються в широкому спектрі математичних моделей і теорій. Застосування многочленів залежить від конкретної галузі науки. В алгебрі многочлени вивчаються як фундаментальний об'єкт. Вони використовуються для розв'язування рівнянь, побудови алгебраїчних розширень, дослідження структури алгебраїчних об'єктів. В аналітичній геометрії многочлени використовуються для опису геометричних об'єктів, таких як криві, поверхні та їхньої взаємодії. Вони дозволяють знайти точки перетину кривих, визначити їхні типи (точка дотику, перетин або перетин уявний), обчислити довжину дуги, площу фігур і багато іншого. У теорії ймовірностей і статистиці многочлени використовуються для побудови ймовірнісних розподілів, апроксимації функцій розподілу, розв'язування статистичних задач та інших аналітичних обчислень. У фізиці многочлени використовуються для моделювання руху та взаємодії фізичних систем. Вони входять у рівняння руху, рівняння поля, вирази для енергії, потенціалів та багато іншого. Крім того, многочлени використовуються в різних галузях інженерії, включаючи контроль і управління системами, обробку сигналів, теорію керування, цифрову обробку сигналів, телекомунікації та багато іншого.

Наведемо базовий теоретичний матеріал з теорії многочленів.

Многочленом $n-$го степеня, де $n-$натуральне число, називають функцію $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, де $a_0, a_1, a_2, a_n -$довільні сталі коефіцієнти, причому $a_0 \neq 0$.

Розкладання многочлена на множники, тобто заміна многочлена на тотожно рівний добуток двох або декількох многочленів, має широке практичне застосування. Для виконання цієї операції в шкільній програмі відпрацьовуються наступні методи:

- винесення спільного множника за дужки;
- групування і подальше винесення спільного множника за дужки;
- використання формул скороченого множення, зокрема, формули розкладу квадратного тричлена на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Зауважимо, що можливе застосування комбінації вказаних методів або використання інших, які описані нижче.

Наведемо декілька практичних задач, що можуть бути розв'язані шляхом розкладання многочлена на множники.

Задача 1. Дослідити на наявність розв'язків систему лінійних рівнянь з параметром [12]: $\begin{cases} 2x + \lambda y = 1, \\ (3+\lambda)x + 2y = 2\lambda. \end{cases}$

Застосуємо метод Крамера і розкладемо визначники-многочлени Δ, Δx, Δy на множники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3+\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - \lambda(3+\lambda) = 4 - 3\lambda - \lambda^2 = -(\lambda-1)(\lambda+4),$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda^2 = -2(\lambda^2-1) = -2(\lambda-1)(\lambda+1),$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3+\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda - (3+\lambda) = 3\lambda - 3 = 3(\lambda-1).$$

Встановлюємо, що:

$\Delta = 0$ при $\lambda = 1$ або $\lambda = -4$;

$\Delta x = 0$ при $\lambda = 1$ або $\lambda = -1$;

$\Delta y = 0$ лише при $\lambda = 1$.

Робимо висновок:

при $\lambda \in (-\infty;-4) \cup (-4;1) \cup (1;+\infty)$ система має єдиний розв'язок

$$x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2(\lambda-1)(\lambda+1)}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+4};\ \ y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3(\lambda-1)}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = -\frac{3}{\lambda+4};$$

при $\lambda = -4$ система несумісна;

при $\lambda = 1$ система має безліч розв'язків.

Задача 2. Оцінити, яку мінімальну і максимальну кількість точок перетину можуть мати криві $y_1(x) = x^4 - 4x^2$ і $y_2(x) = x^3 + ax$, $(a \in R)$.

Знайдемо спільні точки наведених кривих аналітично:

$$x^4 - 4x^2 = x^3 + ax; \qquad x(x^3 - 4x) - x(x^2 + a) = 0; \qquad x(x^3 - x^2 - 4x - a) = 0.$$

Добуток дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли дорівнює нулю один із множників. Отже, $x_1 = 0$, криві мають принаймні одну спільну точку − $(0;0)$.

Для знаходження інших можливих точок перетину слід розв'язати кубічне рівняння $x^3 - x^2 - 4x - a = 0$, яке за основною теоремою алгебри завжди має три корені, проте (залежно від значень параметра a) серед них дійсних коренів може бути або три, або один [13]. Таким чином, вихідні криві мали б єдину спільну точку $(0;0)$, якби рівняння $x^3 - x^2 - 4x - a = 0$ мало б єдиний дійсний корінь рівний нулю та пару комплексно-спряжених коренів. Розглянемо цей особливий випадок: $a = 0$, $x(x^2 - x - 4) = 0$, звідки отримуємо $x_2 = 0 = x_1$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}))$ − дійсних розв'язків більше ніж один.

Отже, оскільки при будь-яких значеннях параметра $a \in R$ кубічне рівняння має хоча б один дійсний корінь, вихідні криві мають не менше двох спільних точок.

Очевидно, що максимальна кількість точок перетину вихідних кривих може дорівнювати чотирьом. Наприклад, при $a=-4$ матимемо кубічне рівняння $x^3-x^2-4x+4=0$ або $(x-1)(x-2)(x+2)=0$, звідки $x_2=2$, $x_3=-2$, $x_4=1$.

На думку авторів, в задачах такого типу для наочної візуалізації аналітично отриманих результатів буде доречним застосувати графічні можливості пакету Mathcad [14] (рис. 1, рис. 2).

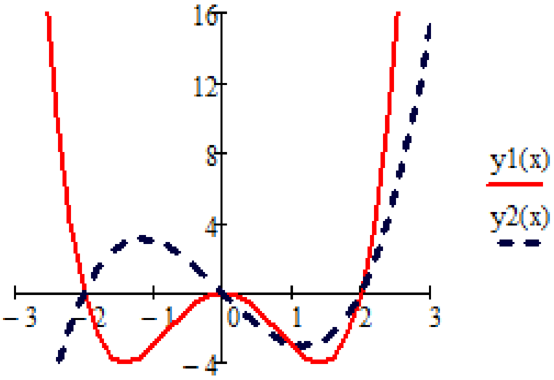

Рис. 1. $a=-4$

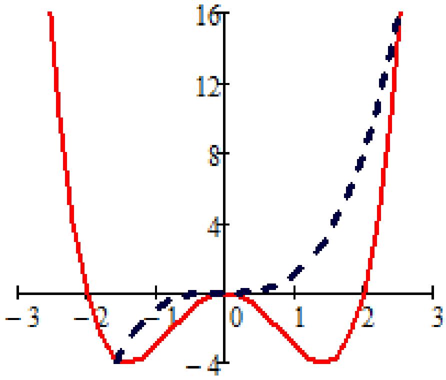

Рис. 2. $a=0$

В деяких практичних задачах може виникати необхідність пошуку границі відношення многочлена до многочлена з невизначеністю типу «нуль на нуль». У такій ситуації процесс розв'язування передбачає розклад многочленів, які знаходяться у чисельнику і знаменнику, на множники. Для цього можуть бути застосовані окремі наслідки теореми Безу [8] та деякі властивості коренів многочлена.

Наслідок 1. Многочлен $P(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x-a$ тоді і тільки тоді, коли $x=a$ є коренем рівняння $P(x)=0$.

Наслідок 2. Якщо $x_0, x_1, x_2, x_n -$ корені многочлена $P(x)$, то його можна записати у вигляді: $P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$.

Наслідок 3. Цілими коренями многочлена $P(x)$ з цілими коефіцієнтами є дільники вільного члена.

Із означення кореня многочлена нескладно отримати наступні *властивості*:

- довільний многочлен з цілими коефіцієнтами має корінь $x=1$, якщо у нього сума усіх коефіцієнтів разом із вільним членом дорівнює нулю;

- довільний многочлен з цілими коефіцієнтами має корінь $x=-1$, якщо у нього сума усіх коефіцієнтів, що стоять при парних степенях змінної, включаючи вільний член, дорівнює сумі усіх коефіцієнтів, що стоять при непарних степенях змінної.

Таким чином, алгоритм розкладання довільного многочлена на множники розпадається на такі складові:

- пошук у будь-який спосіб дійсного кореня многочлена $x=x_0$;

- ділення многочлена на двучлен $x-x_0$ та отримання многочлена, степінь якого на одиницю менша, ніж степінь вихідного;

- за необхідності для отриманого многочлена процедуру повторюють.

*Задача 3***.** Встановити точки розриву функції $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x^3+3x^2-25x+21}$ за умови, що $x<0$.

Шуканими точками розриву даної функції $f(x)$ будуть від'ємні нулі многочлена $P(x)=x^3+3x^2-25x+21$. Отже, знаходимо корені знаменника.

Стандартний підхід (за наслідками 1, 3 теореми Безу). Розглянемо дільники числа 21: $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21$. Оскільки $1+3-25+21=0$, то перший корінь многочлена − число 1. Далі слід виконати ділення $P(x)$ на двочлен $x-1$ (у стовпчик або за схемою Горнера) та продовжити пошук коренів підбором.

Альтернативний підхід (із залученням пакету Mathcad, рис. 3). Якщо v − вектор з коефіцієнтів многочлена, то вбудована до системи Mathcad функція polyroots(v) повертає числові значення усіх коренів многочлена, зокрема і комплексні [14].

<u>*Корені многочлена*</u> $A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0$:

$A3 := 1 \qquad A2 := 3 \qquad A1 := -25 \qquad A0 := 21$

$$V := \begin{pmatrix} A0 \\ A1 \\ A2 \\ A3 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 3

Многочлен $P(x)$ має три дійсних кореня, проте умові $x<0$ задовольняє лише один − $x=-7$. Дослідимо цю точку, враховуючи, розкладання $P(x)$ на множники: $x^3+3x^2-25x+21=(x+7)(x-1)(x-3)$;

$$\lim_{x\to-7}\frac{x^2-49}{x^3+3x^2-25x+21}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-7}\frac{(x+7)(x-7)}{(x+7)(x-1)(x-3)}=$$
$$=\lim_{x\to-7}\frac{x-7}{(x-1)(x-3)}=\frac{-14}{-8\cdot(-10)}=\frac{7}{40}.$$

Тобто існує $\lim\limits_{x\to-7} f(x)$, але при цьому $f(x)$ у точці $x=-7$ не визначена. Отже, функція $f(x)$ у точці $x=-7$ має усувний розрив [12].

*Задача 4***.** Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $2y'''-5y''+6y'-2=0$.

Характеристичне рівняння має вигляд $2k^3-5k^2+6k-2=0$, тобто не є зведеним. Для знаходження його коренів за стандартним підходом застосовують інший наслідок теореми Безу.

Наслідок 4. Якщо многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами має раціональні корені, то їх можна записати у вигляді $\frac{p}{q}$, де p і q – взаємно прості, причому p – дільник вільного члена, q – дільник першого коефіцієнта.

Із чисел $\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{2}$ підстановкою встановлюємо корінь характеристичного рівняння $k_1=\frac{1}{2}$. Для подальшого ділення характеристичного многочлена на двочлен $k-\frac{1}{2}$ можна реалізувати у Mathcad алгоритм схеми Горнера (рис. 4).

<u>Ділення многочлена на двочлен:</u>

$$(A_3K^3+A_2K^2+A_1K+A_0)\ /\ (K-Ko)\ =\ B_2K^2+B_1K+B_0$$

$A3 := 2$ $\quad A2 := -5$ $\quad A1 := 6$ $\quad A0 := -2$

$Ko := 0.5$

$B2 := A3$ $\quad B1 := A2 + Ko\cdot B2$ $\quad B0 := A1 + Ko\cdot B1$

$B2 = 2$ $\quad B1 = -4$ $\quad B0 = 4$

Рис. 4

Характеристичний многочлен $2k^3-5k^2+6k-2=(k-\frac{1}{2})(2k^2-4k+4)$ ще має пару комплексно-спряжених коренів: $k^2-2k+2=0$, $\mathrm{D}=-4=(2i)^2$, $k_{2,3}=1\pm i$.

Зауважимо, що тут ефективніше шукати корені характеристичного многочлена із залученням пакету Mathcad (рис. 5).

$$V := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Рис. 5

Кореням характеристичного рівняння відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1=e^{\frac{x}{2}}$, $y_2=e^x\cos x$, $y_3=e^x\sin x$. Загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)$.

Висновки. Вивчення різноманітних практичних аспектів розкладання многочлена на множники має важливе значення у зв'язку з необхідністю розв'язування різних математичних, фізичних, інженерних та інших задач.

Застосування ІКТ в процесі вивчення математичних дисциплін надає студентам змогу самостійно створювати, спостерігати і досліджувати математичні моделі та можливість аналізувати не лише правильність розв'язання конкретної задачі або виконання окремих операцій, але й ефективність розв'язування. Це стимулює навчання та підвищує якість професійної підготовки студентів як майбутніх фахівців.

Література:

1. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. - Харків: Гімназія, 2019. – 352 с.

2. Алгебра і початки аналізу. 10 кл.: збірник задач та контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 144 с.

3. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. – Харків: Ранок, 2018. – 272 с.

4. Збірник задач з алгебри і початків аналізу: навч. посіб. для учнів 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / З.І. Слєпкань , А.В. Грохольська, А.Є. Волянська - Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 240 с.

5. Прус А.В. Задачі з параметром в шкільному курсі математики: навч.-метод. посіб. / А.В. Прус, В.О. Швець. – Житомир: Рута, 2016. – 468 с.

6. Алгебра и теорія чисел: підручник для фіз.-мат. фак. пед. ін.-тів.: [у 2-х ч.]. / С.Т. Завало, В.М. Костарчук, В.І. Хацет. – Київ.: Вища школа, 1974. – Ч.1 – 462 с.

7. Алгебра і теорія чисел: практикум: навчальний посібник для студ. фізико-матем. фак. пед. інститутів: [у 2-х ч.]. / С.Т. Завало, С.С. Левіщенко, В.В. Пилаєв, І.О. Рокицький. – Київ.: Вища школа, 1986. – Ч.2. – 263 с.

8. Швець В.О. Математика: навч. пос. для студентів вищих навч. закладів І-ІІ рівнів акредитації. / В.О. Швець, Г.І. Білянін – Чернівці: Зелена Буковина, 2011. – 382 с.

9. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник: [у 2-х ч.] . / М.І. Шкіль. – Київ: Вища школа, 2005. – Ч. 1. - 447 с.

10. Яремчук Ф.П. Алгебра и элементарные функции: Справочник. / Ф.П. Яремчук, П.А. Рудченко. - Київ: Наукова думка, 1987. – 648 с.

11. Авдєєва Т.В. Алгебра. Основи алгебраїчних структур: навчальний посібник. / Т.В. Авдєєва, В.М. Горбачук. – Київ: НТУУ "КПІ", 2015. – 79 с.

12. Вища математика: навч.посібник: [у 2-х ч.]. / Олійник О.П., Тупко Н.П., Гришко О.М., Варивода В.О. – Київ.: НАУ, 2021. – Ч. 1. - 216 с.

13. Бондаренко Н.В. Лінійна алгебра: навчальний посібник / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2023. – 180 с.

14. Кундрат А.М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD та MS Excel: навч. посібник. / А.М. Кундрат, М.М. Кундрат. – Рівне: НУВГП, 2014. – 252 с.

References:

1. Merzliak, A.H., Nomirovskyi, D.A., Polonskyi, V.B., & Yakir M.S. (2019). *Alhebra i pochatky analizu: prof. riven [Algebra and beginnings of analysis: prof. level]*. Kharkiv: Himnaziia [in Ukrainian].

2. Merzliak, A.H., Polonskyi, V.B., Rabinovych, Yu.M.., & Yakir, M.S. (2011). *Alhebra i pochatky analizu. 10 kl.:zbirnyk zadach ta kontrolnykh robit [Algebra and beginnings of analysis. 10th grade: a collection of tasks and tests]*. Kharkiv: Himnaziia [in Ukrainian].

3. Nelin, Ye.P. (2018). *Alhebra i pochatky analizu (profilnyi riven) [Algebra and the beginnings of analysis (professional level)]*. Kharkiv: Ranok [in Ukrainian].

4. Sliepkan, Z.I., Hrokholska, A.V., & Volianska, A.Ie. (2003). *Zbirnyk zadach z alhebry i pochatkiv analizu [A collection of problems in algebra and the beginnings of analysis]*. Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky [in Ukrainian].

5. Prus, A.V., & Shvets, V.O. (2016). *Zadachi z parametrom v shkilnomu kursi matematyky [Problems with a parameter in a school mathematics course]*. Zhytomyr: Ruta [in Ukrainian].

6. Zavalo, S.T., Kostarchuk, V.M., & Khatset, V.I. [Ed.]. (1974). *Alhebra y teoriia chysel. [Algebra and number theory]*. (Parts 1-2). Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

7. Zavalo, S.T., Levishchenko, S.S., Pylaiev, V.V., & Rokytskyi, I.O. [Ed.]. (1986). *Alhebra i teoriia chysel: praktykum [Algebra and number theory: workshop]*. (Parts 1-2). Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

8. . Shvets, V.O., & Bilianin, H.I. (2011). *Matematyka [Mathematics]*. Chernivtsi: Zelena Bukovyna [in Ukrainian].

9. Shkil, M.I. [Ed.]. (2005). *Matematychnyi analiz [Mathematical analysis]*. (Parts 1-2). Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

10. Yaremchuk, F.P., & Rudchenko P.A. (1987). *Alhebra y эlementarnыe funktsyy [Algebra and elementary functions]*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].

11. Avdieieva, T.V., & Horbachuk, V.M. (2015). *Alhebra. Osnovy alhebraichnykh struktur [Algebra. Fundamentals of algebraic structures].* Kyiv: NTUU "KPI" [in Ukrainian].

12. Oliinyk, O.P., Tupko, N.P., Hryshko, O.M., & Varyvoda, V.O. [Ed.]. (2021). *Vyshcha matematyka [Higher mathematics]*. (Parts 1-2). Kyiv: NAU [in Ukrainian].

13. Bondarenko, N.V., & Otrashevska, V.V. (2023). *Liniina alhebra [Linear algebra]*. Kyiv: KNUBA [in Ukrainian].

14. Kundrat, A.M., & Kundrat, M.M. (2014). *Naukovo-tekhnichni obchyslennia zasobamy MathCAD ta MS Excel [Scientific and technical calculations using MathCAD and MS Excel].* Rivne: NUVHP [in Ukrainian].