ПРО ЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗІВИПАДКОВИХ ГРАФІВ

Глухов О.Д.
glukhov07@gmail.com,

Національний авіаційний університет

ON THE CONNECTIVITY OF QUASI-RANDOM GRAPHS

Abstract. In this paper, we consider a new approach to estimating the connectivity of quasi-random graphs based on the concept of a multispanner and of graph

Квазівипадкові графи.

Квазівипадкові графи є моделями дискретних систем, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків [1-2].

Означення 1. Нехай $G = G_n$ - зв'язний граф на n вершинах з множиною вершин G^0 і множиною ребер G_n^1, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $G^0(p) = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = G^1(p)$ ребер для якої виконуються умови:

$Prob(u \in U) = p$, *якщо* $u \in G^1$;

$Prob(u \in U) = 0$, *якщо* $u \notin G^1$.

Будемо розглядати задачу оцінки ймовірності зв'язності квазівипадкового графа $G(p)$ побудованого на основі - 3-реберно зв'язний графа G.

Мультикаркаси графа і С-поліноми.

Нехай G - зв'язний граф, $U \subseteq G^1$ - деяка множина його ребер, через $G[U]$ будемо позначати мінімальний підграф графа G з множиною ребер $(G[U])^1 = U$.

Означення 2. Мультикаркасом графа G будемо називати сімейство множин $\{E_j\}_{j=1}^{s}$, яке задовольняє наступним умовам:

(1) $\forall j\ E_j \subseteq G^1$

(2) Якщо множина W ребер графа G задовольняє умові $\forall j\ W \cap E_j \neq \varnothing$, то граф $G[W]$ буде зв'язним факторграфом графа G (зв'язним підграфом, який містить усі вершини даного графа).

Лема1. Сімейство множин $M = \{E_j\}_{j=1}^{s}$ буде мультикаркасом графа G тоді і тільки тоді, коли для будь-якого реберного розріза U знайдеться таке E_k, що $E_j \subseteq U$.

Означення 3. Нехай $M = \{E_j\}_{j=1}^{s}$ - деякий мультикаркас графа G, $\xi_k(M) = |E \in M : |E| = k|$. С-поліномом або зв'язністним поліномом мультикаркаса графа G назвемо поліном, визначений наступним чином:

$$C(G, M, x) = \sum_k \xi_k x^k .$$

Приклади мультикаркасів.

Нехай G -зв'язний граф, T - його остовне дерево (каркас) з множиною ребер $T^1 = \{u_k\}_1^{n-1}$ $(n = |G^0|)$. Тоді очевидно, що $M = \{E_k\}_1^{n-1}, E_k = \{u_k\},$ є мультикаркасом графа G.

Інший приклад мультикаркаса. $M = \{U_k\}_1^{s}$, де $\{U_k\}_1^{s}$ множина усіх його бондів (мінімільних по включенню реберних розрізів) зв'зного графа G .

Важливість C - полінома випливає з наступного твердження.

Теорема 1. Якщо G зв'язний граф, M - деякий його мультикаркас, то для ймовірності P зв'язності квазівипадкового графа $G(p)$ на основі графа G має місце наступна оцінка:

$P \geq 1 - C(G, M, q)$, де $q = 1 - p$.

Регулярні вкладення графів в 2-многовиди.

Означення 4. 2-кліткове вкладення графа G в 2-многовид називається регулярним, якщо замикання кожної 2-клітки гомеоморфно замкненому диску, а замикання двох різних кліток не можуть мати більше одного спільного ребра графа. [3].

Нескладно довести наступні твердження.

Лема 2. 2-кліткове вкладення графа G в 2-многовид регулярне тоді і тільки тоді, коли дуальний граф G^* є простим графом (графом без петель і кратних ребер).

Зауважимо, що для зручності ми вважаємо, що $(G^*)^1 = G^1$.

Лема 3. Кожному реберному розрізу U регулярно вкладеного графа G відповідає набір $\{Z_j\}_1^k$ простих циклів дуального графа G^*, який задовольняє умовам: $\bigcup_{j=1}^{k} Z_j^1 = U$.

Лема 4. Нехай граф G регулярно вкладений в деякий 2-многовид , а G^* - його дуальний граф, $\{Z_k\}_1^s$ усіх простих циклів графа G^*. Тоді множина $M = \{Z_k^1\}_1^s$ є мультикаркасом графа G.

Лема 5 [4]. Якщо H - простий (без петель і кратних ребер) 3-зв'язний граф, $|H^1| = m,$ то числа $c_k(H)$ k-циклів має місце наступна нерівність:

$$c_k(H) \le \frac{1}{2k}(2m)^{k/2}.$$

Наступні твердження дозволяють оцінювати зв'язність широкого класу квазівипадкових графів, зокрема 3-зв'язних планарних графів.

Теорема 2. Якщо зв'язний граф G допускає регулярне вкладення в деякий 2-многовид , то для ймовірності P зв'язності квазівипадкового графа $G(p)$ на основі графа G має місце наступна оцінка:

$$P \ge 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}(2m)^{k/2} q^k, \text{ де } q = 1 - p.$$

Наслідок. Якщо зв'язний граф G допускає регулярне вкладення в деякий 2-многовид , а $G(p)$ квазівипадковий графа на основі графа G , $p=1-\alpha(m)/\sqrt{m},$ де $\alpha(m)=o(1)$, то граф $G(p)$ буде зв'язним з ймовірністю $1-o(1)$.

Література

1. Diestel R. Graph Theory. –Springer-Verlag, 2000. –322 P.
2. Глухов А.Д. Квазислучайные графы и структурная устойчивость сложных дискретных систем. –Электрон. моделирование, 2016 , 38, №5, с.35–41.
3. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. – Baltimore: John Hopkins Univ. Press, 2001. – 291 P.
4. Глухов О.Д. Про зв'язність планарних pr- графів пуассонівського типу// II Український математичний конгрес, 27-29 серпня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – режим доступу: http://www.imath. kiev.ua/~congress2009.